

Grundlagen des Spannbetons

Berliner Hochschule für Technik
Prof. Dr.-Ing. Andreas Fischer

WS 2023/24



Vorwort

Das nachfolgende Skript ist für die Veranstaltungen Spannbeton und Ingenieurbau erarbeitet worden. Die inhaltliche Reihenfolge ist so gewählt, wie man sie nach Kenntnis des gesamten Stoffumfangs zusammenstellen würde. In der Vorlesung werden wir zwischen den Abschnitten hin und her springen, manches erst kurz anreißen, um es später noch zu ergänzen.

In den Veranstaltungen des Spannbetons können viele Themen nur in den Grundlagen dargestellt werden, diese Grundlagen sollen das ingenieurmäßige Denken so weit prägen, dass einerseits spezielle Themengebiete im Selbststudium erarbeitet und andererseits Weiterentwicklungen der Bauweise in der Berufspraxis verfolgt werden können.

Das Skript ist zur Vor- und Nachbereitung der Lehrveranstaltungen konzipiert, es ersetzt auf keinen Fall den Besuch der Veranstaltung selbst, da dort weitere Themen und Hinweise und insbesondere Beispiele behandelt werden. Auch das Studium weiterführender Literatur ist zum Verständnis des Spannbetonbaus unabdingbar.

Die Umstellung und Anpassung der Bezeichnungen auf den Eurocode 2 ist nur an wenigen Stellen vollzogen, allerdings sind die inhaltlichen Änderungen durch den Eurocode 2 auch sehr gering.

Im Jahr 1949 schrieb Eugène Freyssinet (1879-1962), „an sich ist die Idee der Vorspannung weder kompliziert noch geheimnisvoll, sondern bemerkenswert einfach, aber sie kommt aus einer völlig anderen Welt als die klassischen Materialien der Bautechnik, und die Schwierigkeit für diejenigen, welche als erste auf die Idee der Vorspannung kamen, bestand darin, sich auf diese neue Welt einzulassen“.¹

¹⁾ Billington, David P.: Der Turm und die Brücke - Die neue Kunst des Ingenieurbaus, Ernst u. Sohn, 2013

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	IV
1 Einführung in die Bauweise	1
1.1 Anwendungsbereich.....	1
1.2 Begriffe.....	5
1.3 Technologie des Vorspannens.....	9
1.4 Auswirkungen durch Kriechen und Schwinden.....	10
2 Grundlagen der Berechnung im Gebrauchszustand	11
2.1 Querschnittswerte, Dehnungen, Spannungen und Kräfte im Querschnitt.....	11
2.2 Schnittgrößen infolge Vorspannung.....	16
2.2.1 Schnittgrößen infolge Vorspannung in statisch bestimmten Systemen.....	17
2.2.2 Schnittgrößen infolge Vorspannung in statisch unbestimmten Trägersystemen.....	18
2.2.2.1 Schnittgrößen exemplarisch für einen Zweifeldträger.....	18
2.3 Schnittgrößen für Lastfälle bei verbundlosem Spannglied.....	28
2.4 Spannkraftverluste in Folge Reibung.....	29
2.4.1 Differentialgleichung der Seilreibung.....	29
2.4.2 Reibungskennwert μ	30
2.4.3 Planmäßiger Umlenkwinkel.....	30
2.4.4 Ungewollter Umlenkwinkel $k \cdot x$	33
2.4.5 Spannvorgang und Spannmöglichkeiten.....	34
2.4.6 Nachlassen und Keilschlupf.....	36
2.5 Spannstahlspannungen beim Vorspannen.....	37
2.6 Berechnung des Spannweges.....	38
2.7 Kriechen, Schwinden und Spannstahlrelaxation.....	40
2.7.1 Grundlagen.....	40
2.7.2 Kriechen und Schwinden für zentrisch beanspruchte Bauteile mit symmetrischer Bewehrung.....	46
2.7.3 Kriechen und Schwinden für den Biegefall.....	48
2.7.4 Berücksichtigung der Spannstahlrelaxation.....	52
2.7.5 Kriechen, Schwinden und Relaxation nach EC2.....	53
2.7.6 Kriechen und Schwinden bei statisch unbestimmten Systemen mit Systemumlagerungen.....	54
3 Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit	61
3.1 Nachweis der Dekompression.....	62
3.2 Grundlagen der Berechnung im Gebrauchszustand.....	63
3.2.1 Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen.....	63
3.2.2 Ermittlung der Risschnittgrößen.....	65
3.2.3 Ermittlung der Betonzugfestigkeit.....	67
3.3 Bemessungswerte der Beanspruchungen.....	69
3.3.1 Beanspruchungen aus Last.....	69
3.3.2 Beanspruchungen aus Zwang.....	69
3.3.3 Einfluss von Eigenspannungen.....	70
3.3.4 Zwangbeanspruchte Querschnittsteile bei Lastbeanspruchung.....	71
3.4 Berechnung von Spannungen, Dehnungen und Krümmungen im gerissenen Gebrauchszustand.....	72
3.4.1 Lösung für Querschnitte mit beliebiger Druckzone unter reiner Biegebeanspruchung ohne Mitwirkung des Betons auf Zug.....	75
3.4.2 Iterative Lösung im allgemeinen Fall.....	77
3.4.3 Näherungslösungen.....	78
3.5 Nachweise der Spannungen.....	80
3.5.1 Begrenzung der Betondruckspannungen.....	80
3.5.2 Begrenzung der Spannstahlspannungen.....	81
3.5.3 Begrenzung der Betonstahlspannungen.....	82
3.5.3.1 Begrenzung der Betonstahlspannungen aus Last.....	82

3.5.3.2	Begrenzung der Betonstahlspannungen aus Zwang	83
4	Grenzzustand der Tragfähigkeit für Biegung	84
4.1	Beanspruchungen und Bauteilwiderstände.....	84
5	Grenzzustand der Tragfähigkeit für Querkraft	89
5.1	Grundlagen des Tragverhaltens.....	89
5.2	Fachwerkmodell für Bauteile mit Querkraftbewehrung	93
5.2.1	Tragfähigkeit der Zugstrebe.....	95
5.2.2	Tragfähigkeit der Druckstrebe.....	96
5.2.3	Wahl des Druckstrebenwinkels.....	97
5.3	Bemessungswerte der einwirkenden Querkraft	102
5.3.1	Unterscheidung nach der Art der Lagerung.....	102
5.3.2	Auflagnahe Einzellast bei direkter Lagerung	103
5.4	Nachweis von Bauteilen mit Querkraftbewehrung	104
5.4.1	Praktische Bemessung und Querkraftdeckung für den Standardfall.....	105
5.4.2	Allgemeiner Bemessungsfall.....	106
5.5	Bauteilwiderstand von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung	108
5.5.1	Tragmodell(e) von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung.....	109
5.5.2	Bauteilwiderstand in gerissenen Bauteilabschnitten	109
5.5.3	Bauteilwiderstand in ungerissenen Bauteilabschnitten	112
6	Konstruktive Durchbildung (Detailierung).....	114
6.1	Oberflächenbewehrung bei vorgespannten Bauteilen	114
6.2	Robustheitsbewehrung.....	116
6.3	Einleitung von Ankerkräften	118
6.4	Einleitung von Verbundkräften	119
6.5	Ausreichender Einbau von schlaffer Bewehrung im Krafteinleitungsbereich	122
6.6	Sonstiges.....	123
Literatur	126

1 Einführung in die Bauweise

1.1 Anwendungsbereich

Unbewehrter Beton kann nur sehr geringe Lasten aufnehmen, da er versagt, sobald die Betonzugfestigkeit erreicht wird. Das Prinzip des Stahlbetons ist, die durch einen Riss frei werdende Zugkraft durch Bewehrung aufzunehmen.

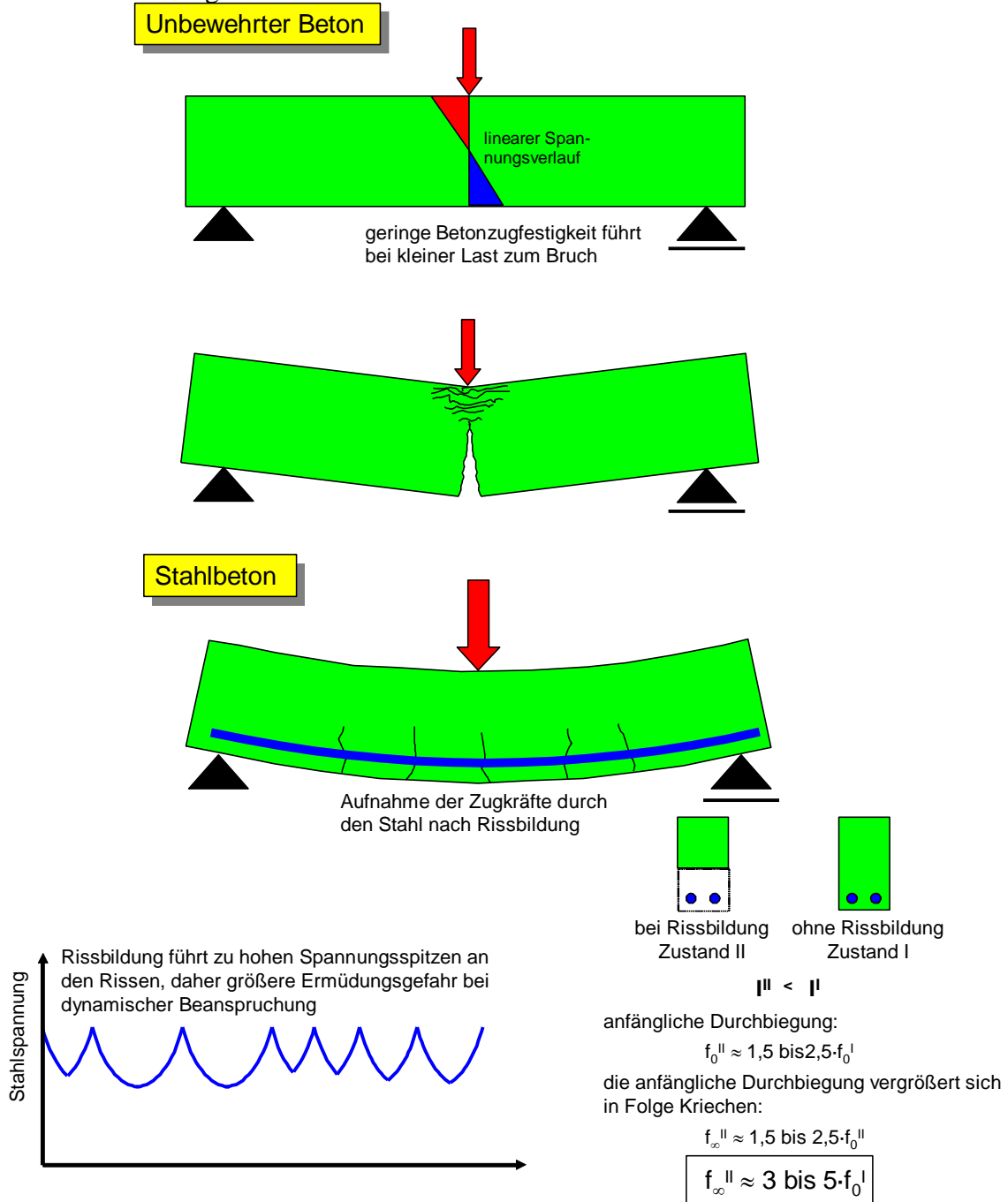


Bild 1-1 Trag-, Bruch- und Verformungsverhalten von unbewehrtem Beton und Stahlbeton

Der Bewehrungsstahl erhält an den Rissstellen hohe Spannungen, die bei hohen dynamischen Beanspruchungen, wie sie z.B. bei Eisenbahnbrücken auftreten, vorzeitig zur Ermüdung führen können. Bei der Rissbildung geht das Bauteil in Verbindung mit einer sprunghaft steigenden Durchbiegung in den Zustand II über. Durch Kriechen des Betons vergrößert sich diese anfängliche Durchbiegung im Laufe der Zeit noch erheblich

Idee des Vorspannens bei Trägern:

- Erzeugung einer künstlichen Druck(vor)spannung zur Vermeidung von Rissen, um die Durchbiegung durch die volle Biegesteifigkeit des ungerissenen Trägers gering zu halten, und Wahl einer sinnvollen Spanngliedführung, um durch Umlenkräfte, die der Belastung entgegenwirken, die anfängliche Durchbiegung und den im Laufe der Zeit entstehenden Durchbiegungsanteil infolge des Kriechens zu verringern.

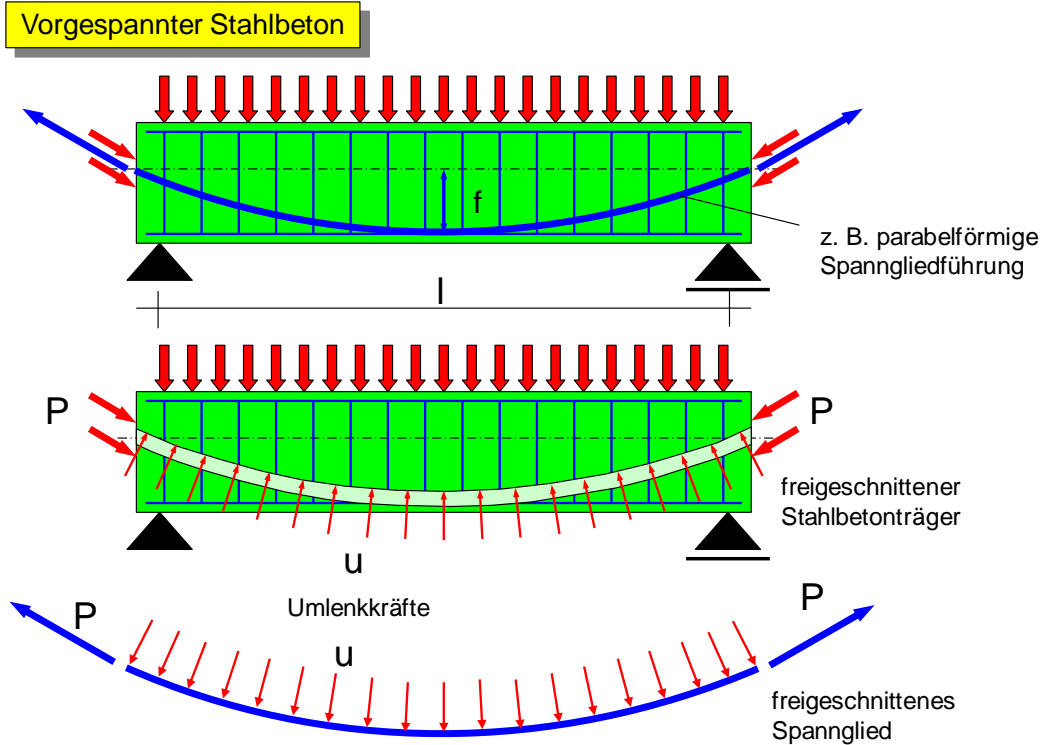


Bild 1-2 Erzeugung einer Umlenkung durch Vorspannung

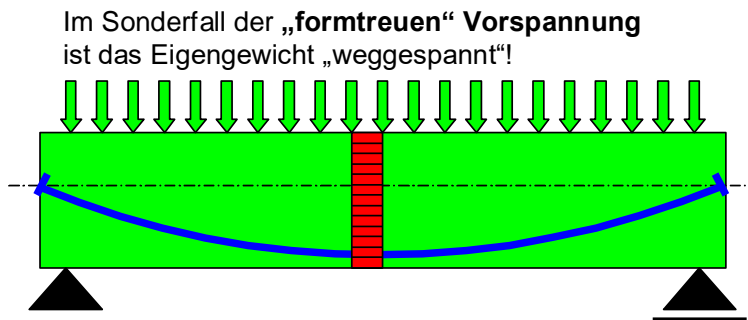


Bild 1-3 Aufheben der Durchbiegung für eine ausgewählte Lastfallkombination

Bei idealer Spanngliedführung und entsprechend hohem Vorspanngrad entstehen für einen bestimmten Lastfall (z.B. Eigengewicht) keine resultierenden Biegemomente, Querkräfte und damit auch keine Durchbiegungen, es verbleiben nur zentrische Druckspannungen (in Folge Kriechen und Schwinden verkürzt sich das Bauteil mit der Folge eines Spannkraftverlustes, wodurch sich dann doch geringe Momente, Querkräfte und Durchbiegungen ergeben).

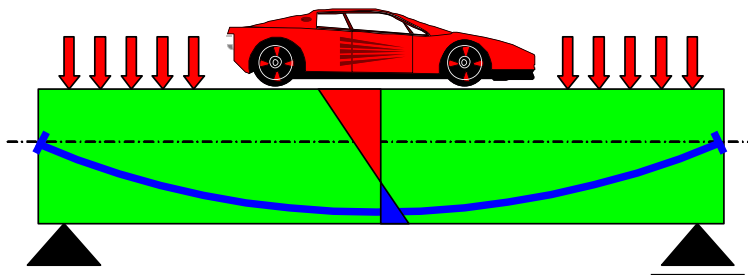


Bild 1-4 Spannungsverlauf unter Gesamtlast

Für weitere Lastfälle (z.B. Verkehrslasten) ergeben sich dann weitere Schnittgrößen und Durchbiegungen, letztere sind wegen des Verbleibens im Zustand I (bei mäßiger Vorspannung gehen Teilbereiche in den Zustand II über) deutlich geringer als bei nicht vorgespanntem Stahlbeton.

Wo wird Spannbeton sinnvoll eingesetzt?

a) dort, wo ohne Vorspannung große Durchbiegungen/Verformungen zu erwarten sind:

bei schlanken, weit gespannten Konstruktionen, z.B. Brücken, Hallenbinder, Flach-decken, Türmen, Schornsteinen.

Durch die Vorspannung können schlankere Bauteile ausgeführt werden, was besonders bei weit gespannten Konstruktionen zur erheblichen Reduzierung des Eigengewichtes führt. Schlanke Bauteile wirken im Allgemeinen ästhetisch und sparen Kosten, z.B. auch für Schalung, Rüstung, Unterbauten und Gründungen.

b) dort, wo hohe dynamische Beanspruchungen vorhanden sind

Eisenbahnbrücken, Kranbahnträgern, Eisenbahnschwellen

Die Spannungsamplituden bleiben klein, da es bei relativ starker Vorspannung wegen der Rissfreiheit keine Spannungsspitzen im Stahl gibt.

c) dort, wo Rissfreiheit die Dichtigkeit gewährleisten soll

Behälter, Klärwerke, Auffangwannen, Wannen im Grundwasser, Start- und Landebahnen

d) dort, wo leichte Konstruktionen eingesetzt werden

im Fertigteilbau, weil Hebezeuge und Transportfahrzeuge die Bauteilgewichte beschränken:
Dachbinder, Pfetten, π -Platten, Hohlplatten

Warum werden nicht alle Bauteile vorgespannt?

- Spannstahl ist teuer
- Die Verarbeitung / Herstellung ist aufwendig
- Spannstahl ist korrosionsempfindlicher als Betonstahl
- Die Einleitung der großen Vorspannkraft erfordert bei Vorspannung ohne bzw. mit nachträglichem Verbund aufwendige (kostenintensive) Ankerkörper.

Entsteht durch den LF Vorspannung (z.B. Knicken, Kippen) ein Stabilitätsproblem in Bauteilen oder vergrößert sich ein aus anderen LF vorhandenes Stabilitätsproblem?

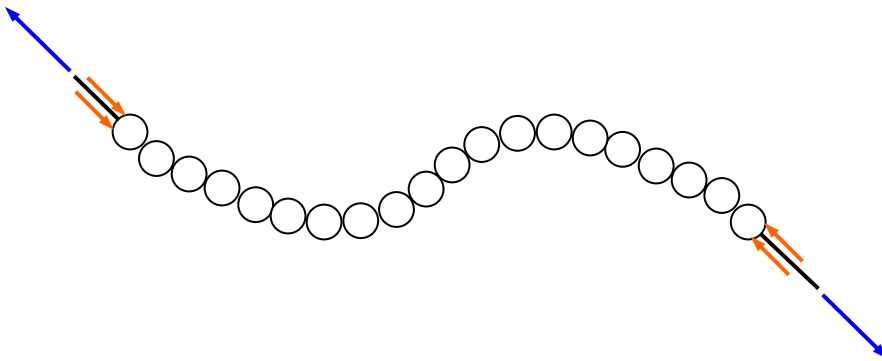


Bild 1-5 Ausknicken einer Perlschnur?

Probieren Sie es mit einer Perlschnur aus: Ziehen Sie an dem Faden und drücken Sie gleichzeitig auf die Perlen.

1.2 Begriffe

Grad der Vorspannung

Die alte DIN 4227 (bis 2001) hat unterschieden:

- volle Vorspannung
- beschränkte Vorspannung
- teilweise Vorspannung

Der Vorspanngrad (die Höhe der Vorspannwirkung) ist bei voller Vorspannung am größten und bei teilweiser Vorspannung am geringsten.

Nach der bisher gültigen DIN 1045-1 war der Nachweis der Dekompression zu führen. Unter einer vorgegebenen Einwirkungskombination muss der gesamte Querschnitt zu jedem Zeitpunkt überdrückt bleiben, d.h., er darf höchstens den Zustand der Dekompression erreichen, an keiner Stelle dürfen Zugspannungen entstehen.

Nachweis der Dekompression, DIN 1045-1

Vorspannung mit sofortigem Verbund

unter **quasi-ständigen / häufigen** LFK: $\sigma_{c,bottom} \leq 0$

Vorspannung mit nachträglichem Verbund

unter **quasi-ständigen** LFK:

kein Nachweis für X0, XC1

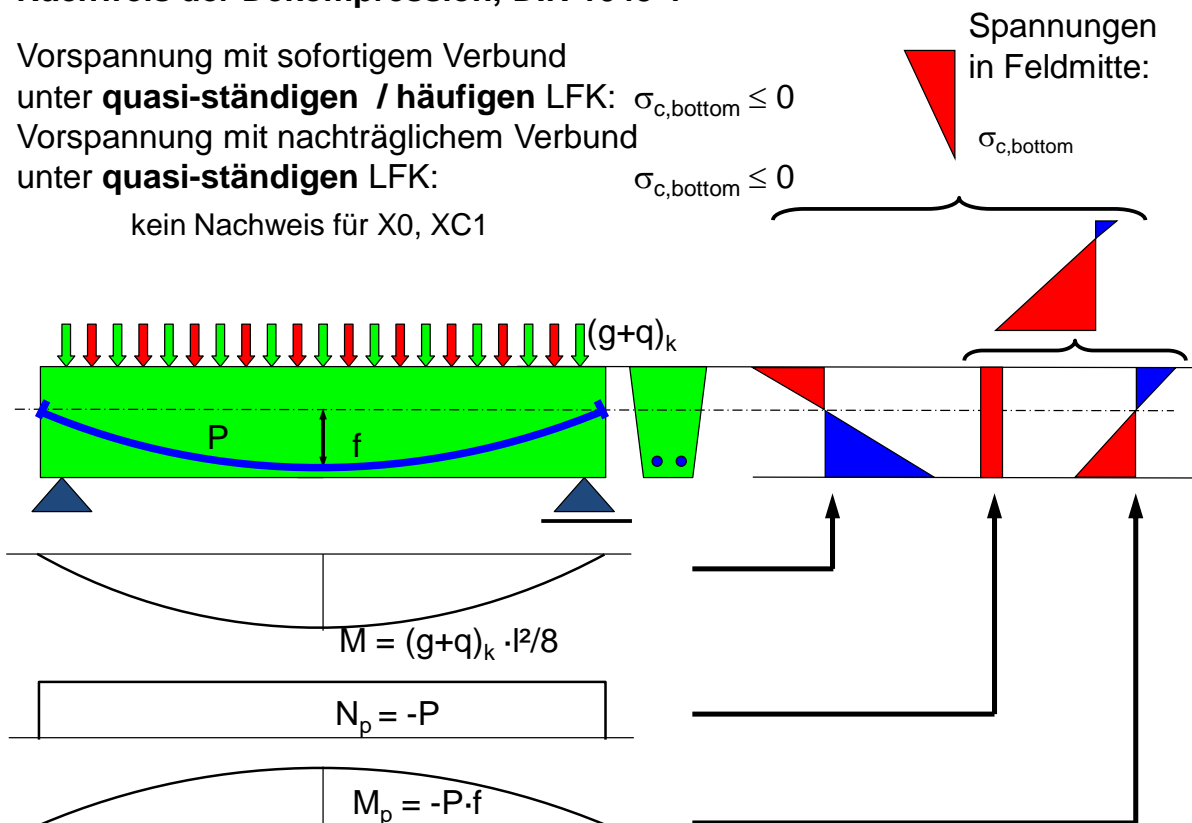


Bild 1-6 Beim Nachweis der Dekompression nach DIN 1045-1 darf für die geforderte Einwirkungskombination keine Zugspannung entstehen

Nach Eurocode 2 ist für die Einhaltung des Grenzzustandes der Dekompression nachzuweisen, dass der Betonquerschnitt um das Spannglied im Bereich von 100mm oder von 1/10 der Querschnittshöhe unter Druckspannungen steht. Die Spannungen sind im Zustand II nachzuweisen.

Aus rechentechnischer Sicht ist es sinnvoll, dass der Querschnitt mindestens unter kriecherzeugender (quasi-ständiger) Beanspruchung vollständig überdrückt bleibt und eine Berechnung im Zustand I möglich wird.

Nachweis der Dekompression, EC2 + NA

Vorspannung mit sofortigem Verbund

unter **quasi-ständigen / häufigen** LFK: $\sigma_{c,p+\Delta h} \leq 0$

Vorspannung mit nachträglichem Verbund

unter **quasi-ständigen** LFK:

kein Nachweis für X0, XC1

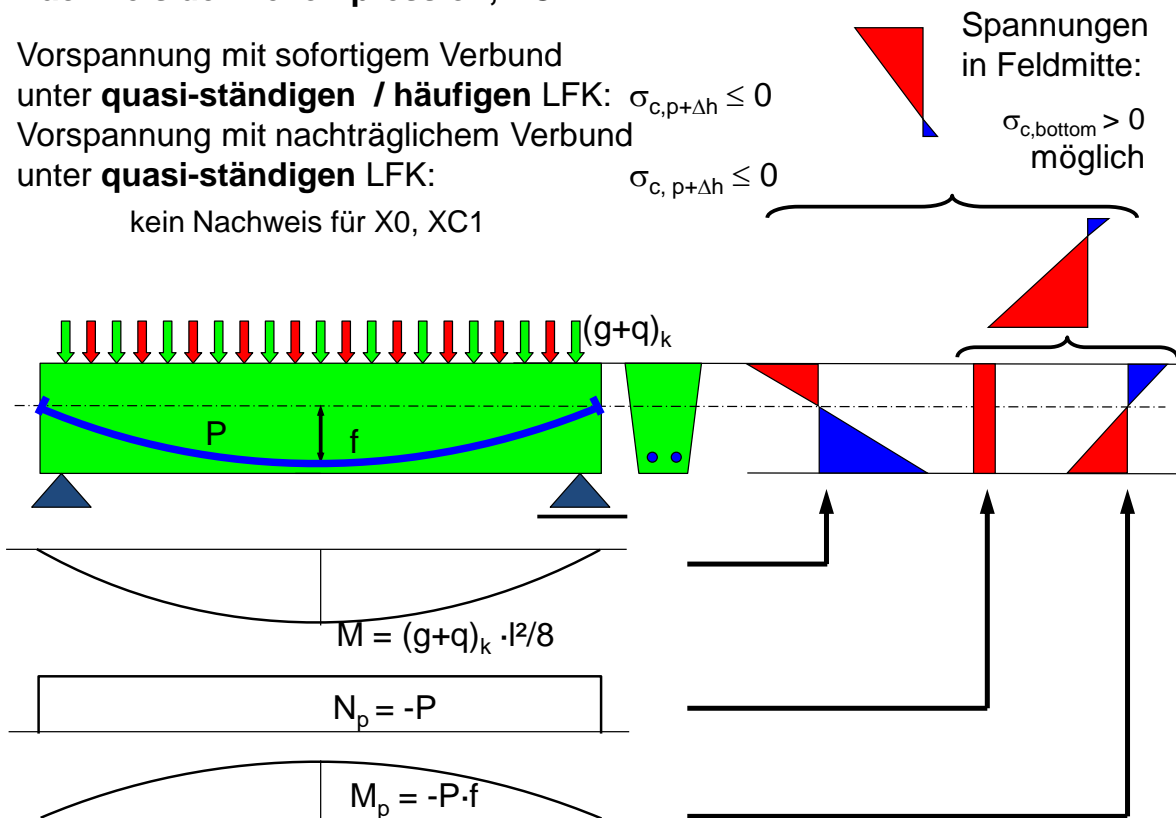


Bild 1-7 Beim Nachweis der Dekompression muss nur der Bereich um die Spannglieder unter Druckspannungen stehen. $\sigma_{c,p+\Delta h} < 0$: im Beton in Höhe des Spannstahls und im Bereich Δh um den Spannstahl herum muss eine Druckspannung gewährleistet sein.

Unterscheidung nach der Art der Herstellung

- Vorspannung ohne Verbund
- Vorspannung mit nachträglichem Verbund
- Vorspannung mit sofortigem Verbund

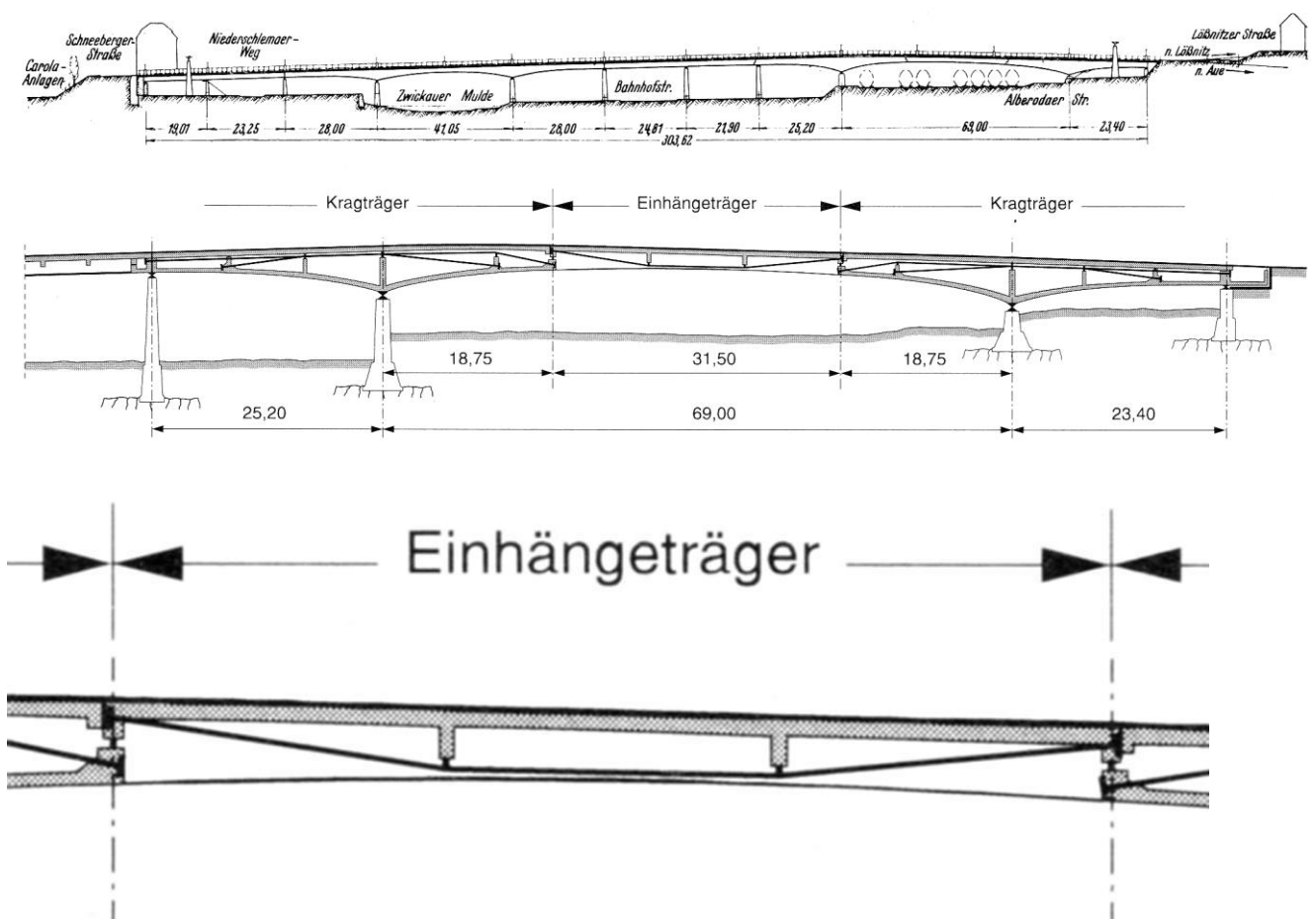


Bild 1-8 Erste Spannbetonbrücke in Deutschland, 1935-37 über die Zwickauer Mulde und den Bahnhof in Aue/Sachsen. Entwurf und Konstruktion: Franz Dischinger (Prof. TU-Berlin), aus [23]
siehe auch: https://www.aue-badschlema.de/de/datei/anzeigen/id/18056,33/bahnhofsbruecke.112111_4.pdf

Vorspannung mit nachträglichem Verbund

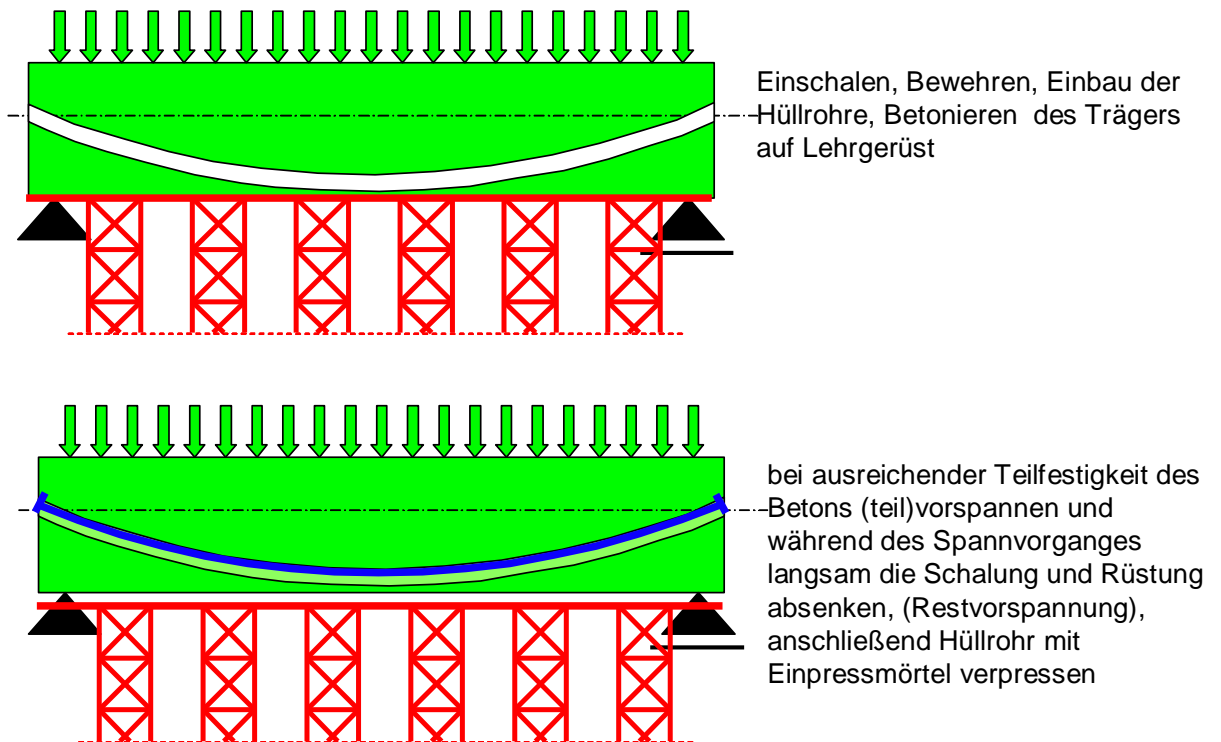
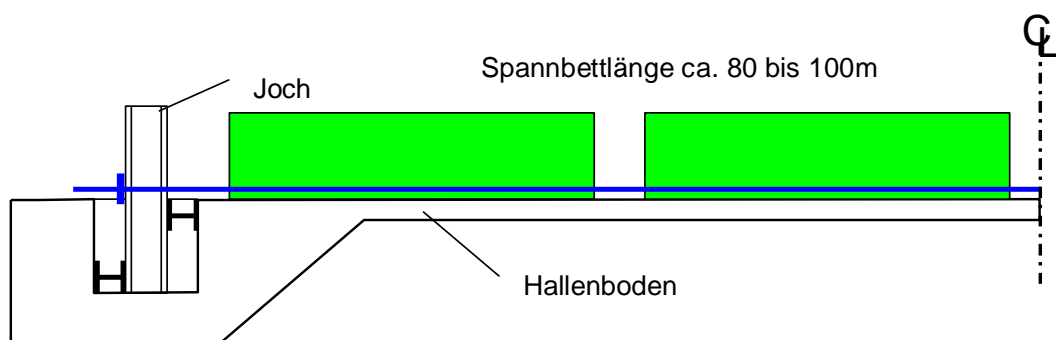


Bild 1-9 Herstellung bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund

Herstellung mit sofortigem Verbund im Spannbett



- Einbau und Spannen der Spannglieder
- schlaife Bewehrung herstellen
- Schalung stellen
- Betonieren
- nach 1-2 Tagen Schalung abrücken
- beim Ablassen der Spannkraft an den Jochen wird die Spannkraft über die Verbundwirkung zwischen Spann Stahl und Beton auf die Bauteile übertragen
- Abtrennen der Spannglieder an den Bauteilenden und Auftragen eines Korrosionsschutzes

Bild 1-10 Vorspannung mit sofortigem Verbund bei Herstellung im Spannbett

1.3 Technologie des Vorspannens

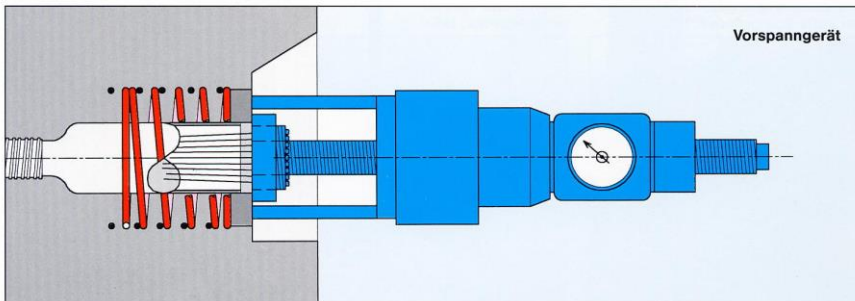
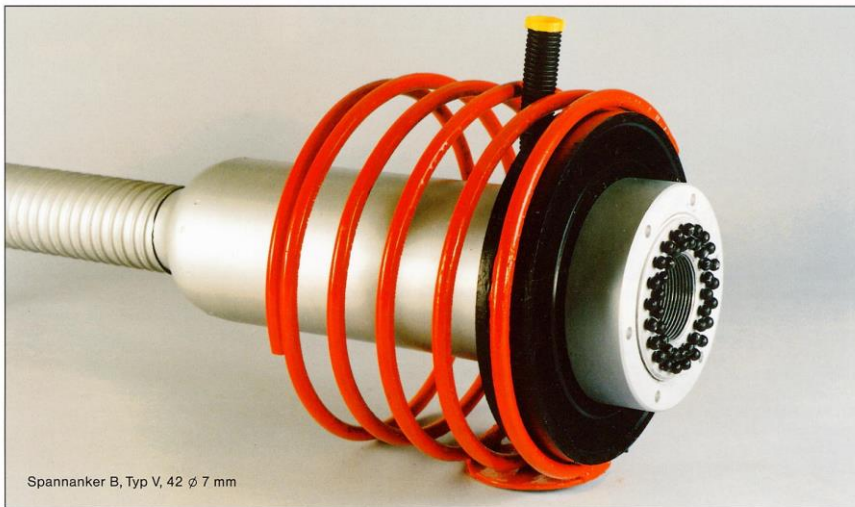


Bild 1-11 Spannanker des BBRV-Verfahrens, Foto und Grafik Firmenprospekt SUSPA

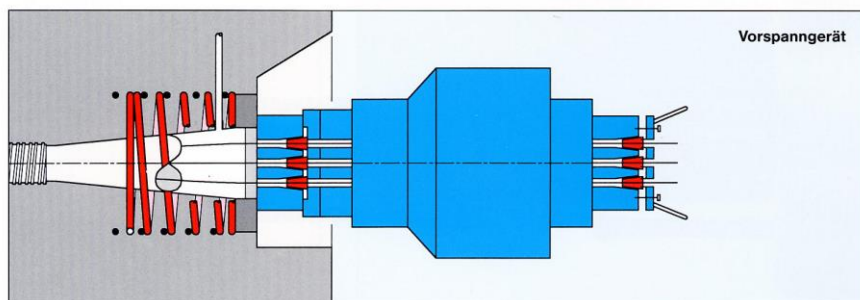
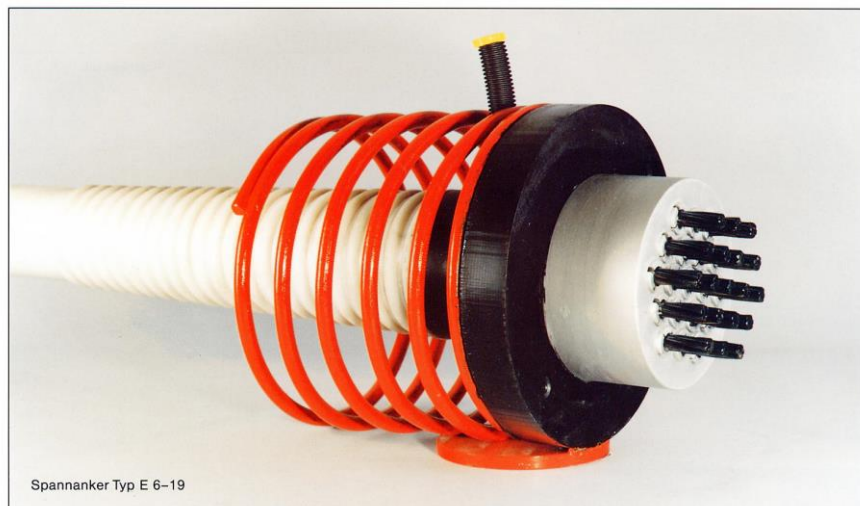


Bild 1-12 Spannanker des Suspa-Litzenspannverfahrens, Foto und Grafik Firmenprospekt SUSPA

1.4 Auswirkungen durch Kriechen und Schwinden

Warum verwenden wir hochvergüteten Spannstahl?

Durch das Vorspannen sind die Bauteile dauernd wirkenden Druckspannungen unterworfen. Beton hat die Eigenschaft - wie viele Baustoffe und andere Stoffe auch – unter dauernd wirkenden Beanspruchungen in Richtung der auftretenden Druck- oder Zugspannung zu kriechen, bei Druckspannungen beginnt der Beton nach der anfänglichen elastischen Dehnung allmählich zu kriechen, d.h. er verkürzt sich. Auch das Schwinden (Volumenverringerung in Folge Austrocknens) führt zu einer Verkürzung der Bauteile. An einem einfachen Bauteil werden die Auswirkungen von Kriechen und Schwinden dargelegt:

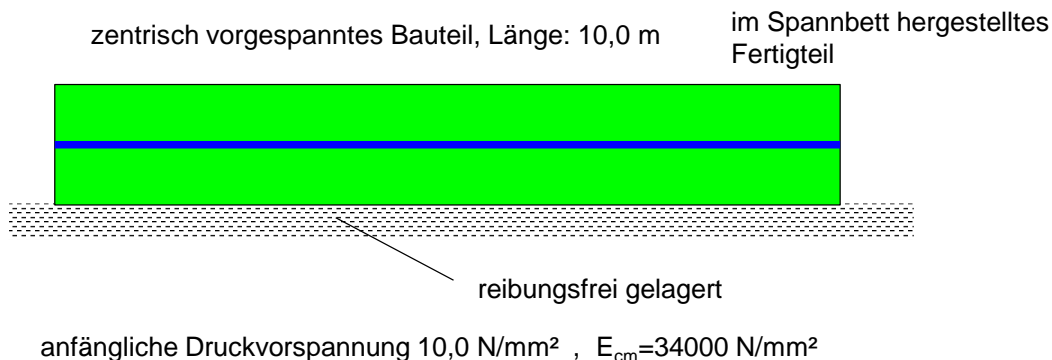


Bild 1-13 Gedankenmodell zum Spannkraftverlust durch Kriechen und Schwinden für ein zentrisch vorgespanntes Bauteil

Tabelle 1-1

		Betonstahl BSt 500/550	St 835/1030	St 1570/1770
zulässige Stahlspannung	N/mm ²	450	720	1350
Stahldehnung $\varepsilon_s = \sigma_s/E$ mit $E=200000 \text{ N/mm}^2$		0,00225	0,0036	0,00675
Stahlverlängerung $\varepsilon_s \cdot l$	mm	22,5	36,0	67,5
elastische Verkürzung des Betons $l \cdot \sigma_c/E_{cm}$	mm	2,9	2,9	2,9
Kriechverkürzung ca. 2,5fache elast. Verkürzung	mm	7,4	7,4	7,4
Schwinden des Betons ca. 0,3 mm/m	mm	3,0	3,0	3,0
Verkürzung des Stahls im Laufe der Zeit	mm	13,3	13,3	13,3
verbleibende Stahlverlängerung	mm	9,2	22,7	54,2
Restspannung	N/mm ²	184,1	454,1	1084,1
prozentualer Spannkraftverlust		59%	37%	20%

Ergebnis: zur Vermeidung hoher Spannkraftverluste ist die Verwendung von hochvergütetem Stahl erforderlich. Bei Biegebauteilen ist der Verlust geringer, er liegt etwa bei 15%.

Anmerkung: Die tatsächlichen Verluste fallen für das Beispiel geringer aus, da die wirksame Druckspannung im Verlauf des Prozesses ebenfalls reduziert wird.

2 Grundlagen der Berechnung im Gebrauchszustand

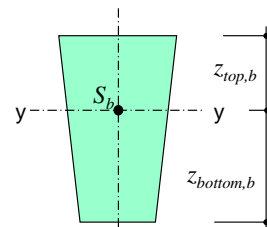
2.1 Querschnittswerte, Dehnungen, Spannungen und Kräfte im Querschnitt

Bei vorgespannten Bauteilen kann bei ausreichend hoher Vorspannung vom ungerissenen Zustand I für Spannungsberechnungen im GZG ausgegangen werden. Abhängig vom Zustand während oder nach der Herstellung sind 2 Arten von Querschnittswerten zu unterscheiden: Nettowerte und ideelle Werte. Die Bruttowerte werden als Ausgangsgrößen für die Ermittlung der Nettowerte und ideellen Werte oder als Näherungswerte verwendet.

Brutto-Querschnittswerte

$$A_{c,b(rutto)}$$

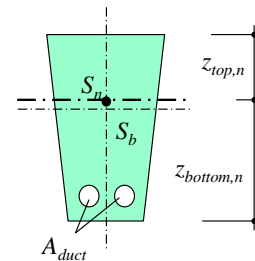
$$I_{c,b(rutto)}$$



Netto-Querschnittswerte

$$A_{c,n} = A_{c,b} - A_{duct}$$

$$I_{c,n} =$$



Ideelle Querschnittswerte

$$A_{c,i} = A_{c,b} + \alpha_p \cdot A_p - A_p \quad \text{mit} \quad \alpha_p = E_p / E_{cm}$$

$$I_{c,i} =$$

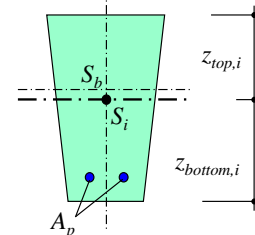


Bild 2-1 verschiedene Querschnittswerte bei Spannbetonquerschnitten

Bei Vorspannung mit sofortigem Verbund ist bei den Nettowerten für den Hüllrohrquerschnitt der Spannstahlquerschnitt einzusetzen.

Es ist zu beachten, dass sich bei variabler Spanngliedführung die Querschnittswerte entlang der Tragwerksachse x ständig verändern.

Die Berechnung der Querschnittswerte in Tabellenform ist sinnvoll.

Spannungsberechnung für Lastfälle mit Verbund in (ungerissenen) oder überdrückten Bauteilabschnitten entsprechend den Regeln der Festigkeitslehre (linearer Spannungsverlauf über die Höhe) unter Verwendung der ideellen Querschnittswerte.

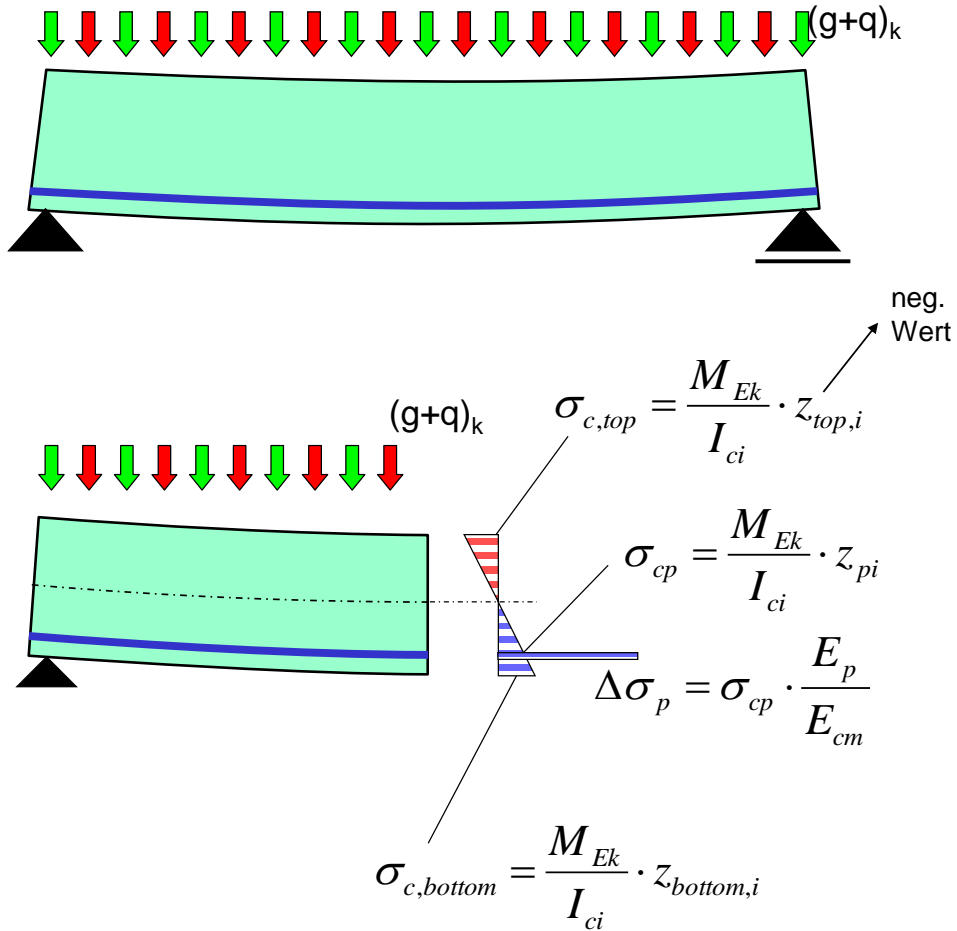
$$P^{(0)} = A_p \cdot \sigma_p^{(0)}$$

$$\sigma_p^{(0)} = E_p \cdot \varepsilon_p^{(0)}$$

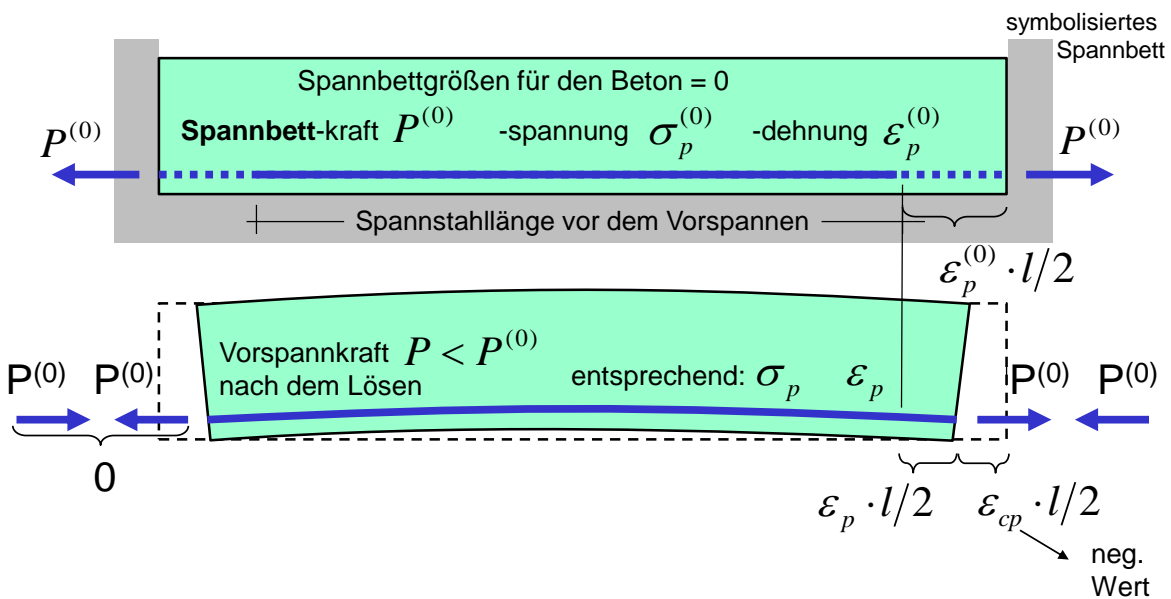
$$P^{(0)} = E_p \cdot A_p \cdot \varepsilon_p^{(0)}$$

Dehnungen, Spannungen und Kräfte in einem biegebeanspruchten Bauteil mit Bewehrung

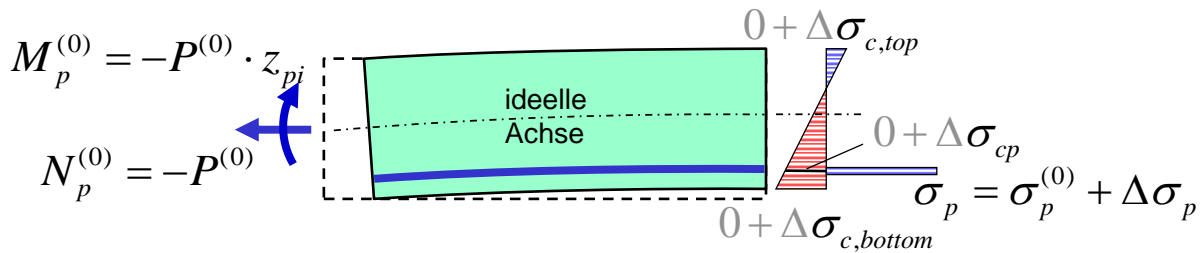
a) Infolge äußerer Belastung für Lastfälle mit Verbund zwischen Spannstahl und Beton



b) infolge Vorspannung mit sofortigem Verbund (Bauteil 1)

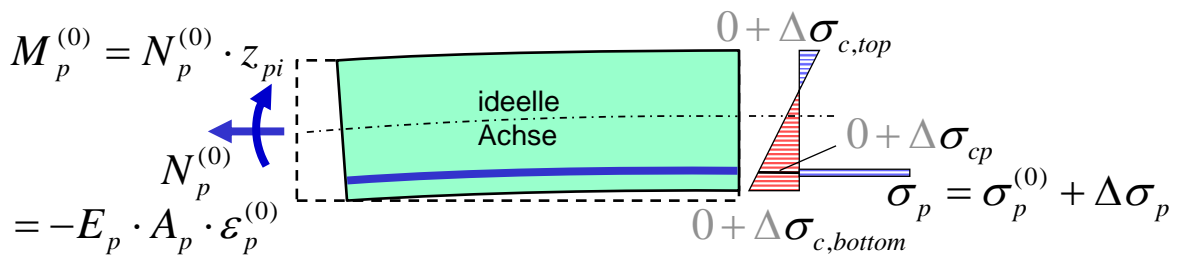


Das Lösen aus dem Spannbett kann entweder als äquivalente „Abkühlung“ des Spannstahls oder auch als Belastung des Verbundquerschnittes durch eine äußere Kraft angesehen werden. Die Schnittgrößen und Spannungen ergeben sich dann



Die Schnittgrößen beziehen sich auf die ideale Achse. Die Spannungen ergeben sich mit den ideellen Querschnittswerten, bei denen der Spannstahl und der Betonstahl berücksichtigt sind.

In einem Zwischenschritt soll noch einmal unterstrichen werden, dass die Schnittgrößen und Spannungen direkt als äquivalente „Abkühlung“ um die Vordehnung $\epsilon_p^{(0)}$ ermittelt werden können:



Spannungen im Beton:

$$\sigma_{c,top} = 0 + \frac{-P^{(0)}}{A_{ci}} + \frac{-P^{(0)} \cdot z_{pi}}{I_{ci}} \cdot z_{top,i}$$

$$\sigma_{cp} = 0 + \frac{-P^{(0)}}{A_{ci}} + \frac{-P^{(0)} \cdot z_{pi}}{I_{ci}} \cdot z_{pi}$$

$$\sigma_{c,bottom} = 0 + \frac{-P^{(0)}}{A_{ci}} + \frac{-P^{(0)} \cdot z_{pi}}{I_{ci}} \cdot z_{bottom,i}$$

... und im Spannstahl:

$$\sigma_p = \underbrace{\frac{P^{(0)}}{A_p}}_{\sigma_p^{(0)} \text{ Spannbettspannung}} + \underbrace{\sigma_{cp} \cdot \frac{E_p}{E_{cm}}}_{\Delta \sigma_p \text{ elastischer Spannungsanteil (-verlust)}} = \frac{P}{A_p}$$

neg. Wert

Der Anteil Spannbettspannung kann alternativ direkt aus der Spannbettdehnung und dem E-Modul bestimmt werden:

$$\sigma_p^{(0)} = \varepsilon_p^{(0)} \cdot E_p$$

Hier soll die Spannstahlspannung für einen späteren Vergleich für zentrische Vorspannung ($z_{pi} = 0$) ermittelt werden:

$$\sigma_p = \frac{P^{(0)}}{A_p} + \frac{\sigma_{cp}}{A_{ci}} \cdot \frac{E_p}{E_{cm}}$$

bzw. altern.

$$\sigma_p = \varepsilon_p^{(0)} \cdot E_p + \frac{-\varepsilon_p^{(0)} \cdot E_p \cdot A_p}{A_{ci}} \cdot \frac{E_p}{E_{cm}}$$

In der Glg. für σ_p sind die Vorspannkraft P und die Spannbettkraft $P^{(0)}$ enthalten. Damit kann das Verhältnis der Kräfte, Dehnungen oder Spannungen zueinander **zwecks Umrechnung** bestimmt werden:

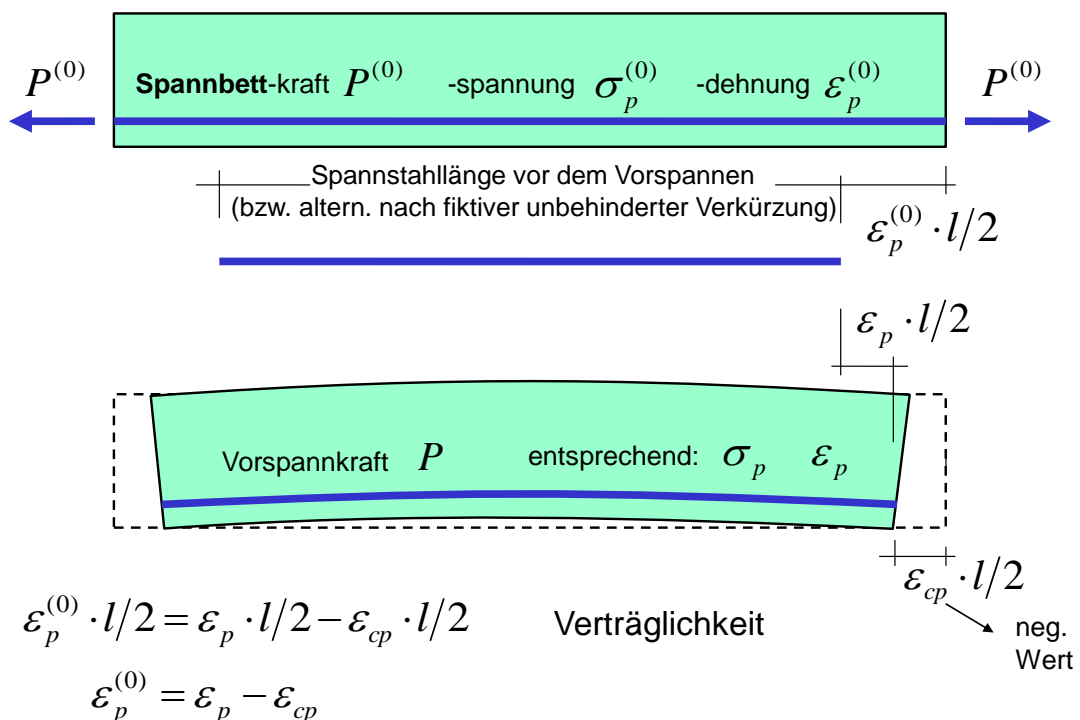
$$\frac{P}{A_p} = \frac{P^{(0)}}{A_p} + \left(\frac{-P^{(0)}}{A_{ci}} + \frac{-P^{(0)} \cdot z_{pi}}{I_{ci}} \cdot z_{pi} \right) \cdot \frac{E_p}{E_{cm}}$$

$$\left[\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p^{(0)}} = \frac{\sigma_p}{\sigma_p^{(0)}} = \frac{P}{P^{(0)}} = 1 - \frac{E_p}{E_{cm}} \cdot \frac{A_p}{A_{ci}} \cdot \left(1 + \frac{A_{ci} \cdot z_{pi}^2}{I_{ci}} \right) \right]$$

oder abgekürzt: $= 1 - \alpha_p \cdot \rho_{pi} \cdot f_i$ mit:

$$\begin{cases} \alpha_p = \frac{E_p}{E_{cm}} \\ \rho_{pi} = \frac{A_p}{A_{ci}} \\ f_i = 1 + \frac{A_{ci} z_{pi}^2}{I_{ci}} \end{cases}$$

Für die Umrechnung von den Spannbettgrößen in die Vorspanngrößen gibt es noch einen 2. Weg:



$$\frac{1}{E_p} \cdot \frac{P^{(0)}}{A_p} = \frac{1}{E_p} \cdot \frac{P}{A_p} - \frac{1}{E_{cm}} \cdot \left[\frac{-P}{A_{cn}} + \frac{-P \cdot z_{pn}}{I_{cn}} z_{pn} \right]$$

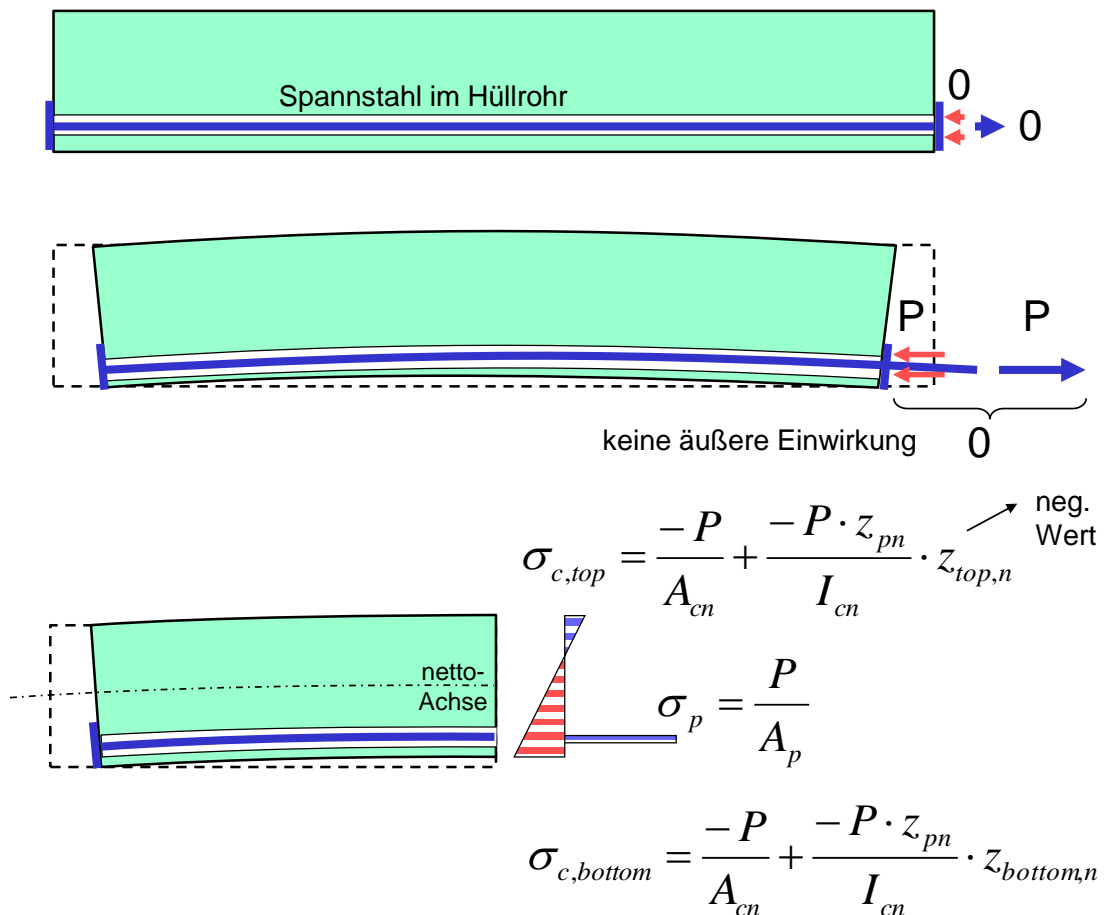
$$\frac{P^{(0)}}{P} = 1 + \frac{E_p A_p}{E_{cm} A_{cn}} + \frac{E_p A_p}{E_{cm} I_{cn}} \cdot \frac{A_{cn}}{A_{cn}} z_{pn}^2$$

$$\frac{\varepsilon_p^{(0)}}{\varepsilon_p} = \frac{\sigma_p^{(0)}}{\sigma_p} = \frac{P^{(0)}}{P} = 1 + \alpha_p \cdot \rho_{pn} \cdot f_n$$

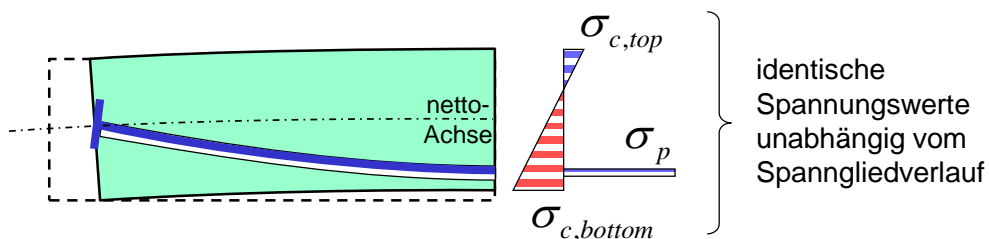
mit: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_p = \frac{E_p}{E_{cm}} \\ \rho_{pn} = \frac{A_p}{A_{cn}} \\ f_n = 1 + \frac{A_{cn} z_{pn}^2}{I_{cn}} \end{array} \right.$

Diese Umrechnungsvariante findet man häufig in der Literatur. Sie liefert die exakt identischen Ergebnisse wie die Variante mit ideellen Werten. Zu beachten ist hier der Kehrwert der Kräfte, das Vorzeichen und der Bezug auf die Netto-Querschnittswerte.

c) Infolge Vorspannung ohne Verbund (Bauteil 2) bzw. mit nachträglichem Verbund



Wenn der Hüllrohrdurchmesser identisch mit dem Spannstahldurchmesser ist, dann ergeben sich bei Vorspannung ohne Verbund (bzw. mit nachträglichem Verbund) und Vorspannung mit sofortigem Verbund aus der Gleichgewichtsbetrachtung jeweils gleiche Spannungen im Beton und im Stahl, **unabhängig vom Herstellverfahren!**



Bei stat. best. Systemen sind die Spannungen im betrachteten Querschnitt **unabhängig vom Spanngliedverlauf entlang des Trägers!** (Bei stat. unbest. Systemen gilt es entsprechend, jedoch nur für den stat. best. Teil der Vorspannung!)

Wenn der Spannungsverlauf unabhängig vom Herstellverfahren ist, dann können für die Umrechnungen der Vorspanngrößen in die Spannbettgrößen näherungsweise die gleichen wie bei Vorspannung mit sofortigem Verbund genutzt werden (s.o.).

„Näherungsweise“, weil der Hüllrohrquerschnitt bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund größer ist als der Spannstahlquerschnitt.

2.2 Schnittgrößen infolge Vorspannung

Am allgemeinsten kann man die **Vorspannwirkung** mit der Wirkung der **Umlenkkräfte** bei gleichzeitiger Wirkung der **Ankerkräfte** beschreiben.

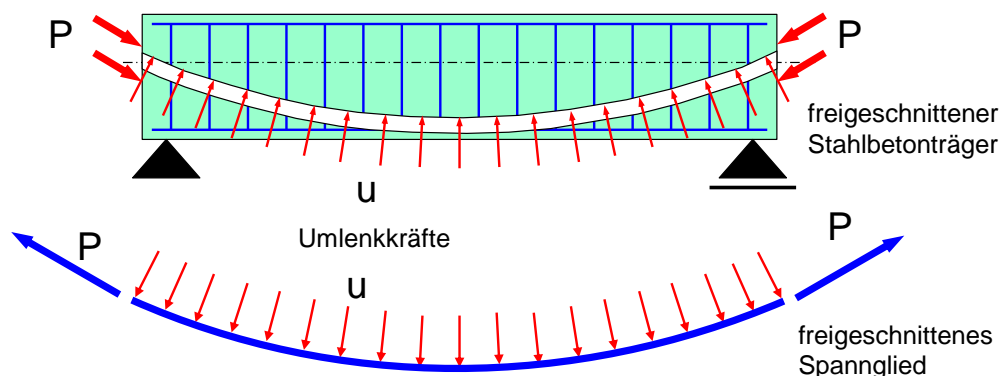


Bild 2-2 Freigeschnittene Trägerteile

Diese Betrachtung mit **Umlenk- und Ankerkräften** ist wichtig bei Vorspannung in flächigen Bauteilen (Platten, Schalen). Sie gilt für stat. best. wie auch für stat. unbest. Systeme. Bevor wir uns dieser Methode zuwenden, betrachten wir die Berechnung in einem statisch bestimmten Trägersystem, also einem einachsigen System.

2.2.1 Schnittgrößen infolge Vorspannung in statisch bestimmten Systemen

Zunächst werden Trägersystemen (einachsige Systeme) betrachtet.

Schnittgrößen im LF Vorspannung allein

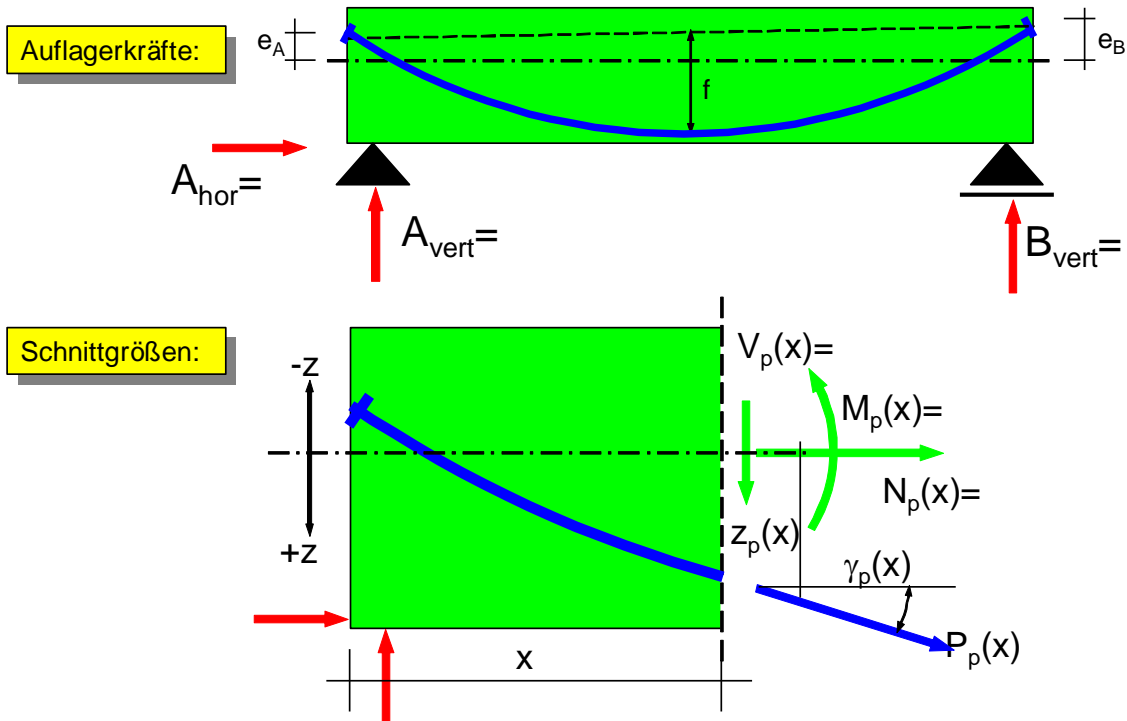
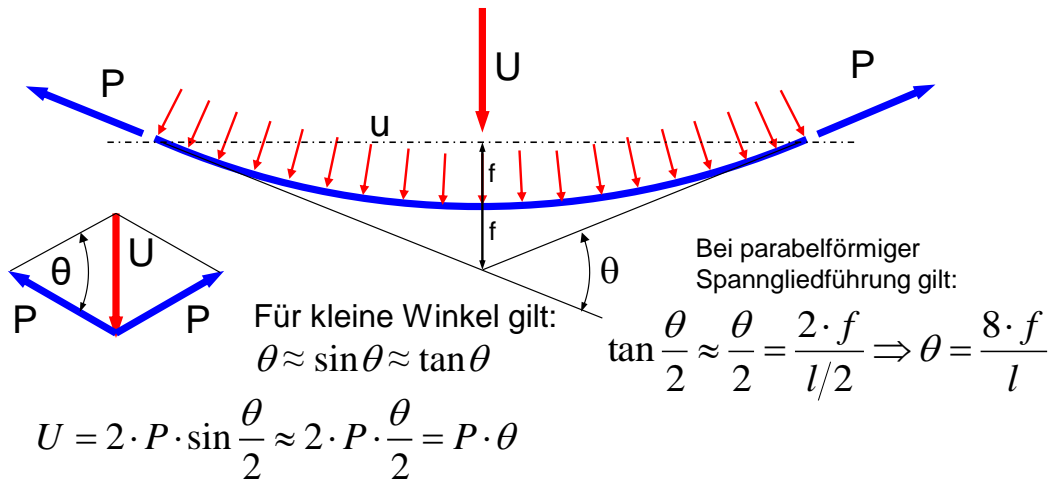


Bild 2-3 Schnittgrößen bei statisch bestimmten Balken

Trotz der mathematischen Näherungen an einer beliebigen Stelle x aufgrund der kleinen Neigungswinkel des Spannglieds ergibt sich für das extremale Biegemoment in Feldmitte die exakte Lösung: $M_p = -P \cdot \max z_p$.

Schnittgrößen infolge Vorspannung aus Berechnung über Anker- und Umlenkkräfte

Die Umlenkkräfte in Bild 2-2 wirken bei reibungsfreier Gleitung im Hüllrohr senkrecht zum Spannglied. Bei parabol förmigen Spanngliedverlauf und geringem Parabelstich und damit verbundenen kleinen Tangentenwinkeln können die Umlenkkräfte näherungsweise durch eine Gleichlast ersetzt werden. Exzentrisch wirkende Ankerkräfte müssen berücksichtigt werden.



Wenn die gesamte Umlenkkraft als Gleichlast wirkend angenommen wird: $U = u \cdot l \Rightarrow u = P \cdot \frac{\theta}{l} = P \cdot \frac{8 \cdot f}{l^2}$

In einem Träger ergibt sich dann als Moment:

$$\Rightarrow M_p = -u \cdot \frac{l^2}{8} = -P \cdot \frac{8 \cdot f}{l^2} \cdot \frac{l^2}{8} = -P \cdot f \quad \text{und in einer zweiachsig gespannten Platte...?}$$

Bild 2-4 Schnittgrößen aus Umlenkkraften

Wenn der Stich f mit $\max z_p$ übereinstimmt (im Fall ohne Exzentrizität an den Verankerungen), dann ergibt sich trotz der angenommenen Näherungen in Feldmitte die exakte Lösung wie hergeleitet für einachsig gespannte Systeme.

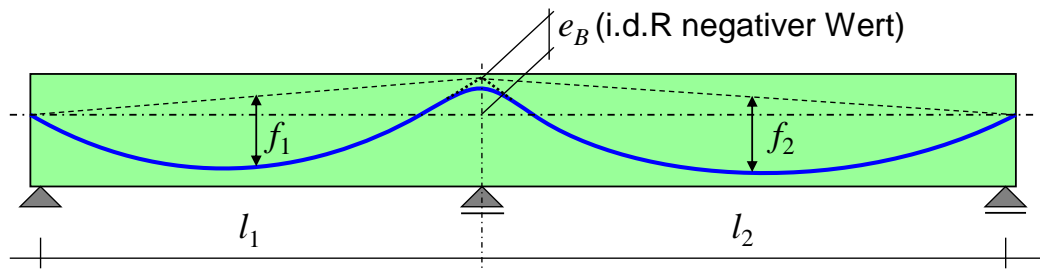
Die Annahme einer Gleichlast für die Umlenkkräfte kann daher bei parabelförmiger Spanngliedführung als sehr gute Näherung verwendet werden.

Diese Betrachtung der Schnittgrößenberechnung über Umlenk- und Ankerkräfte ist insbesondere für die Berechnung von Schnittgrößen in flächigen Bauteilen wie in Platten und in Schalen von Bedeutung. Exzentrisch angreifende Ankerkräfte dürfen bei der Momentenberechnung nicht vergessen werden.

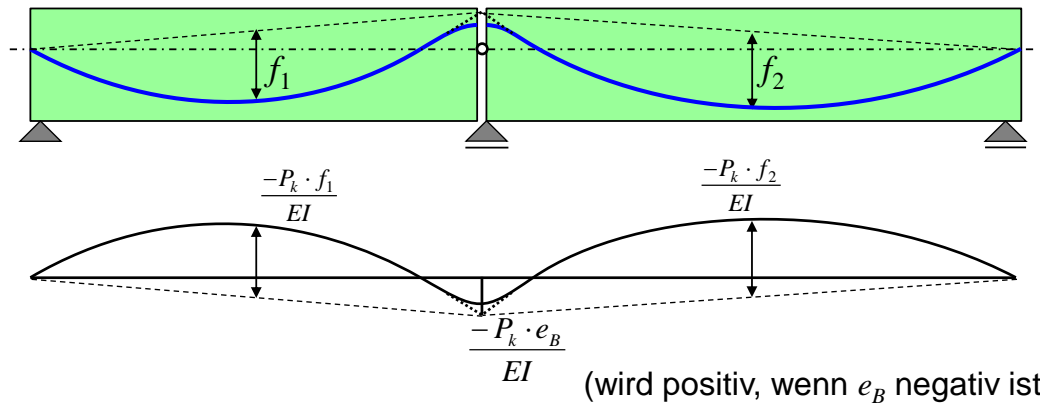
2.2.2 Schnittgrößen infolge Vorspannung in statisch unbestimmten Trägersystemen

2.2.2.1 Schnittgrößen exemplarisch für einen Zweifeldträger

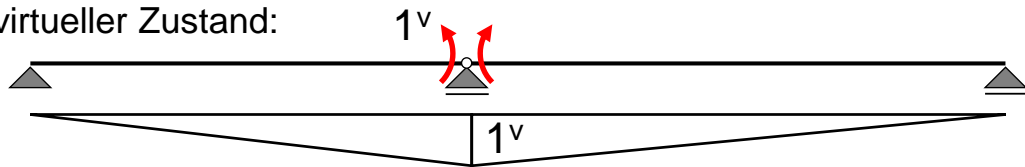
Für den Lastfall Vorspannung allein sollen die Schnittgrößen mit dem Kraftgrößenverfahren exemplarisch für einen allgemeinen Zweifeldträger ermittelt werden. Es wird vorausgesetzt, dass der Zweifeldträger durch Gleichlasten aus äußerer Einwirkung beansprucht wird. Für diese Belastung wird ein feldweise parabelförmig geführter Spanngliedverlauf mit einer Ausrundung im Bereich der Mittelstütze gewählt. Es erscheint zweckmäßig, die Ausrundung möglichst klein zu wählen ohne dabei den minimal zulässigen Krümmungsradius der Spannglieder zu unterschreiten.



statisch bestimmtes Grundsystem:



virtueller Zustand:

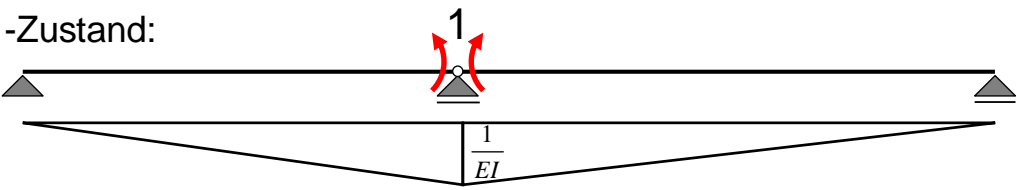


$$1^v \cdot \delta_{10} = \int_0^{l_1} 1^v \cdot \left(-\frac{P_k \cdot f_1}{EI} - \frac{P_k \cdot e_B}{EI} \right) dx + \int_0^{l_2} 1^v \cdot \left(-\frac{P_k \cdot f_2}{EI} - \frac{P_k \cdot e_B}{EI} \right) dx$$

$$1^v \cdot \delta_{10} = \left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{P_k \cdot f_1}{EI} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{P_k \cdot e_B}{EI} \right) \right] \cdot 1^v \cdot l_1 + \left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{P_k \cdot f_2}{EI} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{P_k \cdot e_B}{EI} \right) \right] \cdot 1^v \cdot l_2$$

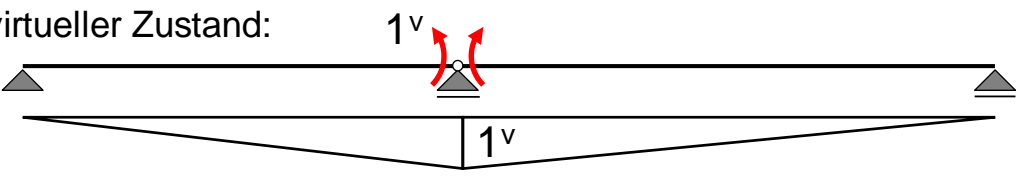
$$\delta_{10} = \left[-f_1 \cdot l_1 - f_2 \cdot l_2 - e_B \cdot (l_1 + l_2) \right] \cdot \frac{P_k}{3EI}$$

1-Zustand:



$$\kappa^1 = \frac{M^1}{EI}$$

virtueller Zustand:



$$1^v \cdot \delta_{11} = \int_0^{l_1} 1^v \cdot \frac{1}{EI} dx + \int_0^{l_2} 1^v \cdot \frac{1}{EI} dx$$

$$1^v \cdot \delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EI} \cdot 1^v \cdot l_1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EI} \cdot 1^v \cdot l_2 \quad \Rightarrow \delta_{11} = (l_1 + l_2) \cdot \frac{1}{3EI}$$

Damit erhält man folgende Lösung für die statisch Unbestimmte:

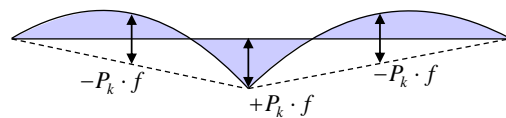
im allgemeinen Fall:

$$X_{1p} = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \left[\frac{f_1 \cdot l_1 + f_2 \cdot l_2}{l_1 + l_2} + e_B \right] \cdot P_k \quad \text{für } f_1 = f_2 = f$$

(e_B ist i.d.R. negativ)

nach Superposition, an der Stütze:

$$M_p^{idealisiert} = M_p^0 + X_{1p} \cdot M^1 = \frac{f_1 \cdot l_1 + f_2 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \cdot P_k \quad M_p^{idealisiert} = P_k \cdot f$$



Für den Sonderfall des Zweifeldträgers mit gleichem Stichmaß f für beide Felder kann für den idealisierten Momentenverlauf folgendes festgestellt werden:

- die Momentenlinie ist unabhängig von der Auslenkung e_B über der Stütze
- die Nullpunkte sind immer an gleicher Stelle, sie sind im Vergleich mit den Nullstellen des statisch bestimmten Momentenanteils weiter in das Feld verschoben
- je größer der Stich f , um so weniger Spannglieder sind erforderlich
- bei gleichem Stich f in beiden Feldern ist der Momentenverlauf unabhängig von den einzelnen Spannweiten
- der Verlauf der Momente ist unabhängig von der Lage der Schwerlinie

Allerdings hängt der maximal mögliche Stich f und damit die Größe des Vorspannmomentes sehr wohl von der Lage der Schwerlinie ab, wie im folgenden Bild zu erkennen ist.

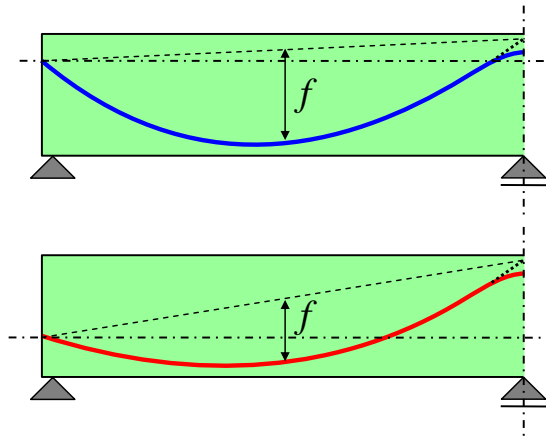


Bild 2-5 Umlenkwirkung ist abhängig von der Lage der Schwerelinie

Bei hoch liegender Schwerlinie braucht bei gleichem Moment aus Vorspannung nur eine geringere Vorspannkraft aufgebracht werden. Aus den geometrischen Randbedingungen und dem minimal einzuhaltenden Krümmungsradius der Spannglieder über der Stütze ergibt sich der mögliche Stich f in der Mitte eines Endfeldes. Gegebenenfalls kann eine Exzentrizität am Trägerende vorgesehen werden:

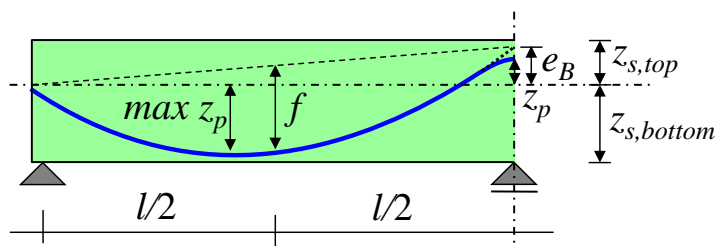
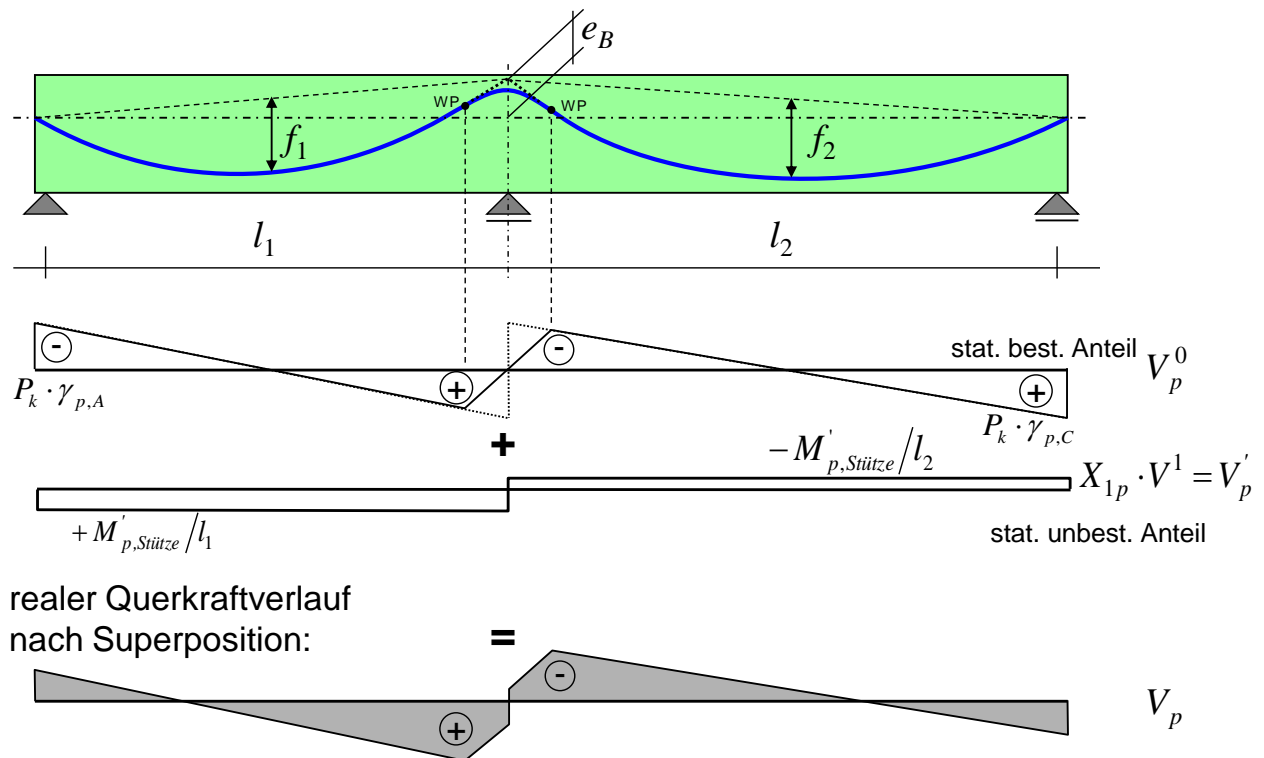
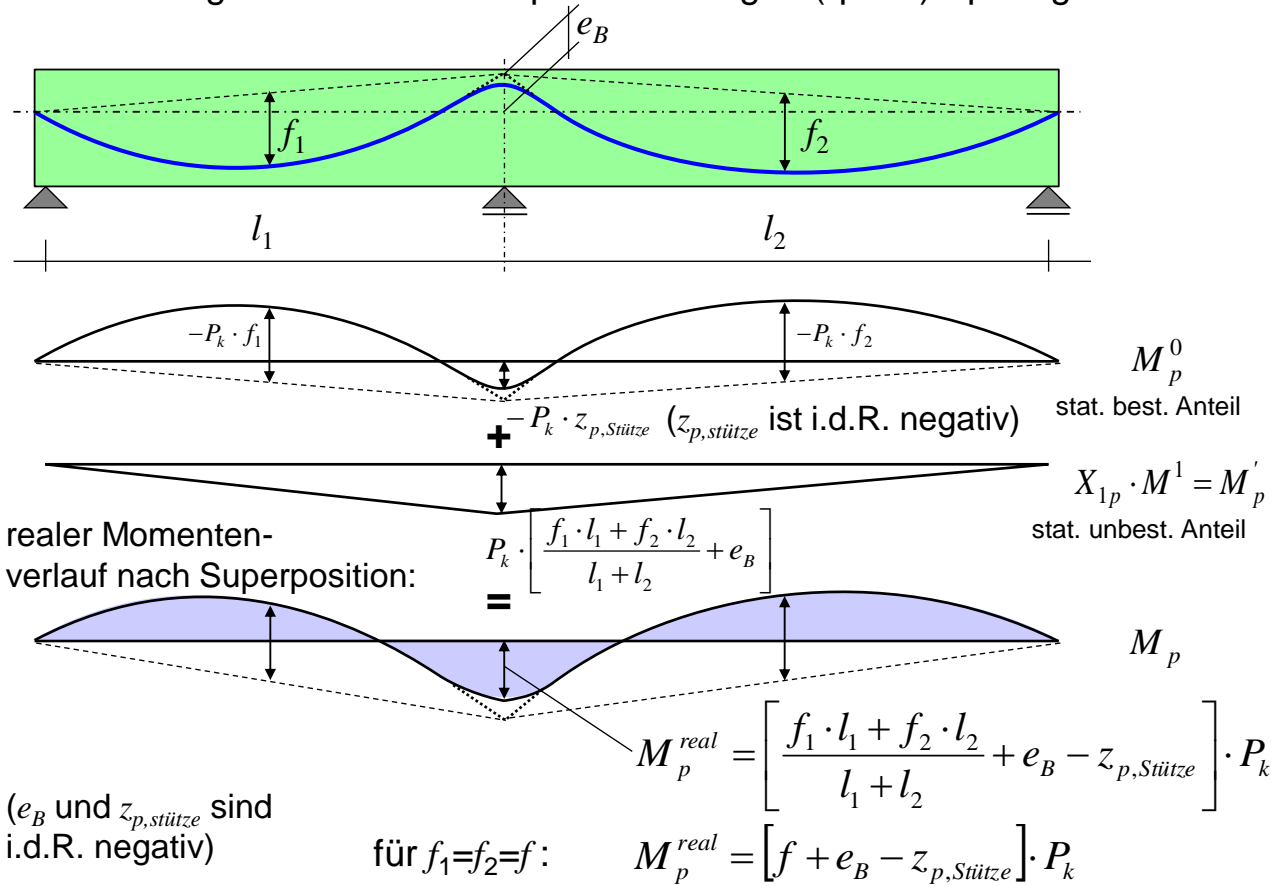


Bild 2-6 Maße und Bezeichnungen

Im Bereich des Stützmomentes weicht der reale Momentenverlauf infolge der ausgerundeten Spanngliederführung von dem idealisierten spürbar ab, wodurch das Verhältnis von Stützmoment zu Feldmoment kleiner wird und somit nicht mehr in idealer Weise zu den äußeren Momenten infolge gleichmäßiger Vollbelastung beider Felder passt. Durch die feldweise ungünstige Anordnung der Verkehrslasten wird das Verhältnis von betragsmäßig maximalen Stützmoment zu maximalen Feldmoment infolge äußerer Belastung allerdings ebenfalls verringert und entspricht so dem Verhältnis aus Vorspannung wieder besser.

reale Schnittgrößenverläufe bei parabelförmigen (quad.) Spanngliedverlauf:



Eine Gegenüberstellung der Momentenverhältnisse aus Vorspannung einerseits und äußerer Belastung andererseits reicht jedoch nicht aus, da auch das Verhältnis der Widerstandsmomente und die Normalkraft infolge Vorspannung deutlichen Einfluss auf nachzuweisende Spannungen (z. B. Nachweis der Dekompression) haben.

Erst wenn infolge der Spannungsnachweise im Feld und an der Stütze unterschiedliche Vorspannkraft erforderlich werden, können die Auswirkungen verschiedener Maßnahmen untersucht und diskutiert werden:

- Durch eine leicht veränderte Spanngliedführung kann das Umlagerungsmoment (der statisch unbestimmte Anteil) aus der Vorspannung und damit sowohl das endgültige Stützmoment als auch das Feldmoment infolge Vorspannung günstig beeinflusst werden.
- Über der Stütze können z. B. mehr Spannglieder als in den Feldern angeordnet werden.

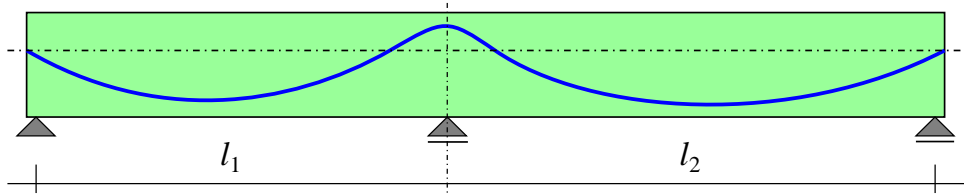
Wenn in beiden Feldern eines unsymmetrischen Zweifeldträgers jeweils der maximal mögliche Stich gewählt wird, dann ergeben sich bei gleicher Spannstaahlmenge in den Feldern auch etwa gleiche Feldmomente infolge der Vorspannung. Die Feldmomente aus äußerer Belastung hingegen haben bekanntlich unterschiedlich große Feldmomente. Bei deutlich unterschiedlichen Stützweiten des Zweifeldträgers ist es daher sinnvoll, die Anzahl der Spannglieder in beiden Feldern und auch über der Stütze unterschiedlich zu wählen. Ein kleinerer Stich im kleinen Feld und damit verbunden ein größerer Abstand der Spannglieder vom unteren Rand wird bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund nicht empfohlen, da dann zum einen für den Nachweis im GZT für Biegung der innere Hebelarm unnötig verkleinert wird und zum anderen die Spannglieder nicht mehr für die Beschränkung der Rissbreite angerechnet werden können. *Hinweis:* bei einer feldweise ungleichen Anzahl der Spannglieder ist die oben verwendete Voraussetzung einer annähernd gleichen Spanngliedkraft über die gesamte Trägerlänge nicht mehr gegeben.

Bei nicht parabelförmig geführten Spanngliedern oder bei zwischenverankerten Spanngliedern (zur Anpassung an die äußeren Momente) wird die analytische Lösung der statisch Unbestimmten sehr aufwändig. Weiterhin zeigt sich, dass es sinnvoll ist, sich beim Entwurf vorgespannter Tragwerke von unnötigen Zwängen bei der Wahl des Spanngliedverlaufs zu befreien. Für optimal angepasste Spanngliedverläufe und zwischenverankerte Spannstaahlstränge empfiehlt sich daher die numerische Integration, z. B. nach Simpson.

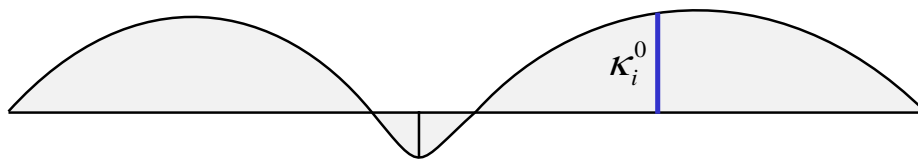
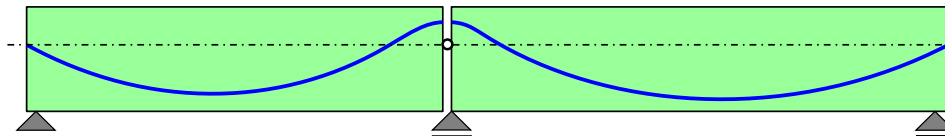
In der Literatur wird zur Berechnung stat. unbest. Systeme vielfach auch empfohlen, die Schnittgrößen mit Hilfe von Umlenk- und Ankerkräften zu bestimmen. Diese Methode ist zwar sehr anschaulich, kann aber nur dann einfach umgesetzt werden, wenn die Spannglieder im Feld und über der Stütze jeweils einer quadratischen Parabel entsprechen. Eine freie Optimierung des Spanngliedverlaufs durch Beeinflussung des Umlagerungsmomentes wird genau mit dieser Einschränkung wiederum verhindert.

Die am Zweifeldträger dargestellten Überlegungen können sinngemäß auf Mehrfeldsysteme übertragen werden.

Bei einer numerisch angepassten Spanngliedführung müssen die Verformungen aus dem statisch bestimmten Momentenverlauf durch numerische Integration bestimmt werden.

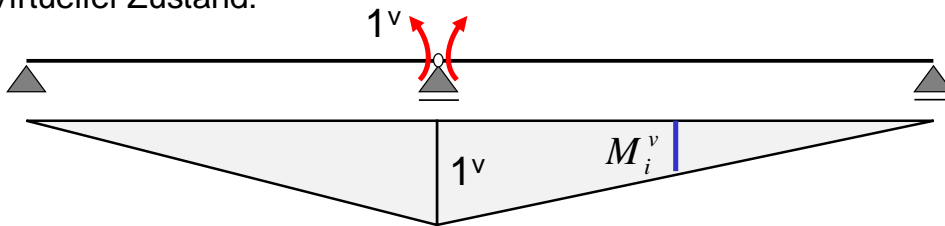


statisch bestimmtes Grundsystem:

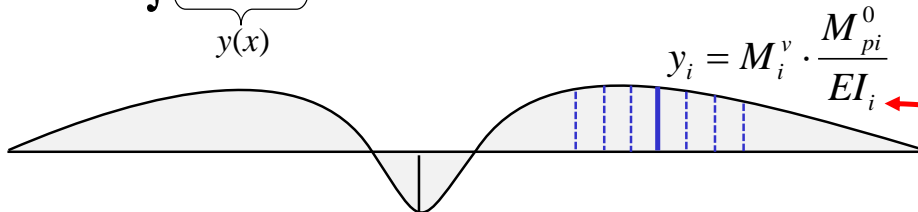


$$\kappa^0 = \frac{M_p^0}{EI}$$

virtueller Zustand:

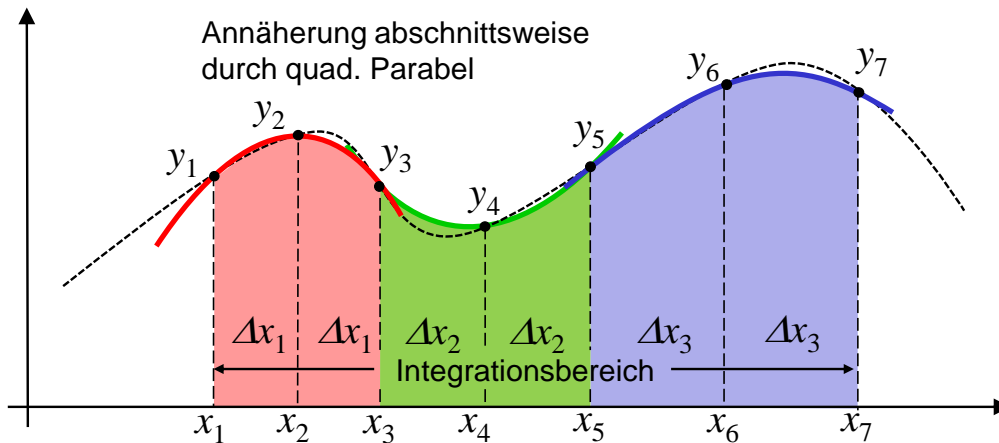


$$1^v \cdot \delta_{10} = \int \underbrace{M^v \cdot \kappa^0}_{y(x)} dx \quad \text{mit numerischen Methoden}$$



Hinweis: die numerische Integration eignet sich auch bei veränderlicher Biegesteifigkeit

Numerische Integration nach Simpson



die Abstände Δx müssen bei der Simpsonregel **mindestens paarweise gleich** sein!

In diesem Fall gilt allgemein:

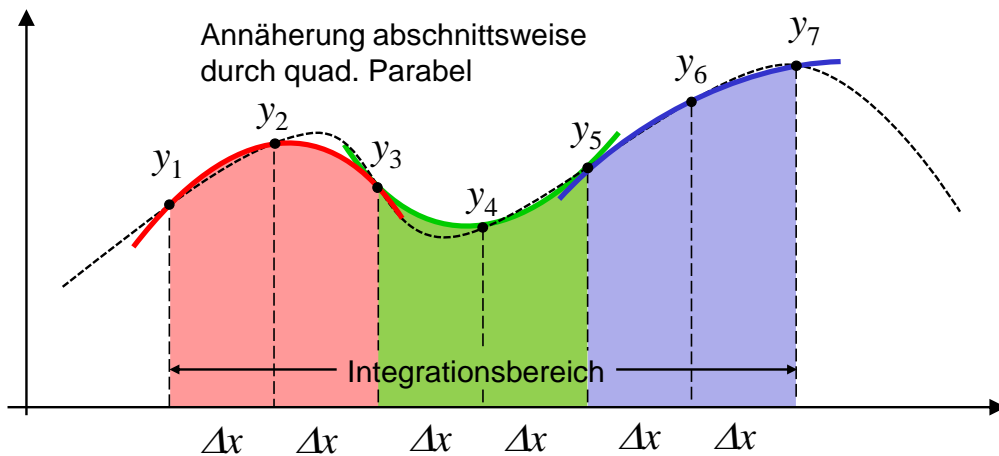
$$A_1 = (x_3 - x_1) / 6 \cdot (1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3)$$

$$A_2 = (x_5 - x_3) / 6 \cdot (1 \cdot y_3 + 4 \cdot y_4 + 1 \cdot y_5)$$

$$A_3 = (x_7 - x_5) / 6 \cdot (1 \cdot y_5 + 4 \cdot y_6 + 1 \cdot y_7)$$

$$\Sigma A = A_1 + A_2 + A_3$$

Sonderfall: alle Δx -Abstände gleich



$$A_1 = 2\Delta x / 6 \cdot (1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3)$$

$$A_2 = 2\Delta x / 6 \cdot (1 \cdot y_3 + 4 \cdot y_4 + 1 \cdot y_5)$$

$$A_3 = 2\Delta x / 6 \cdot (1 \cdot y_5 + 4 \cdot y_6 + 1 \cdot y_7)$$

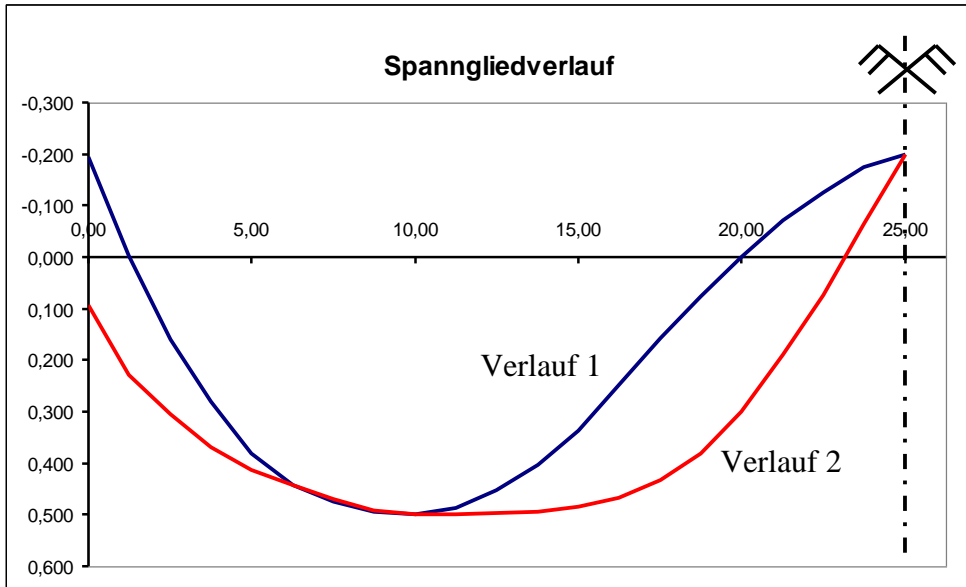
$$\Sigma A = \Delta x / 3 \cdot (1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + 4 \cdot y_4 + 2 \cdot y_5 + 4 \cdot y_6 + 1 \cdot y_7)$$

für diese Summe müssen alle Abstände Δx gleich sein!

Eine ungerade Anzahl von Funktionswerten ist erforderlich!

Auf dem nächsten Bild erkennt man, wie stark das Umlagerungsmoment und damit der gesamte Momentenverlauf aus dem Lastfall Vorspannung durch Variation des Spanngliedverlaufs beeinflusst werden kann.

Auswirkungen des Spanngliedverlaufes auf Umlagerungs- und Gesamtmoment aus Vorspannung für einen symmetrischen Zweifeldträger



Die Spanngliedabstände im Feld und über der Stütze sind jeweils gleich!

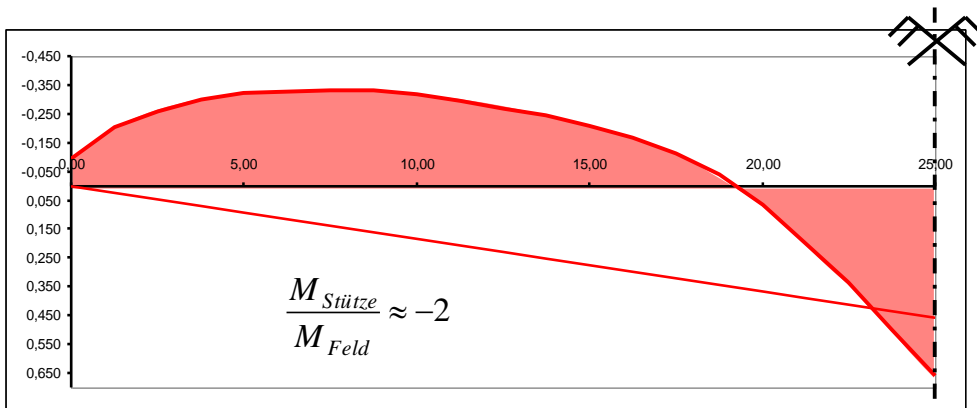
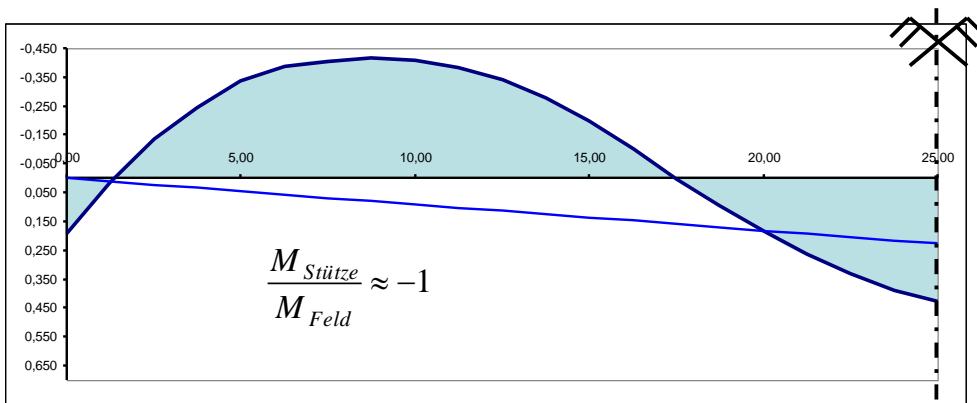
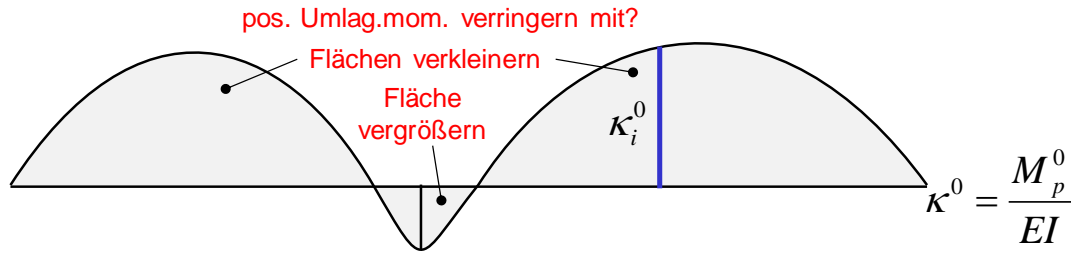
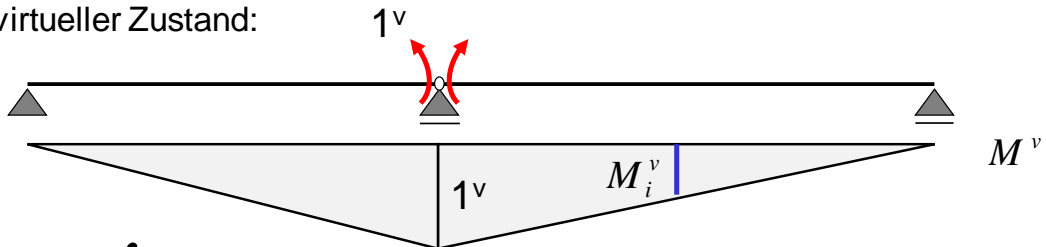


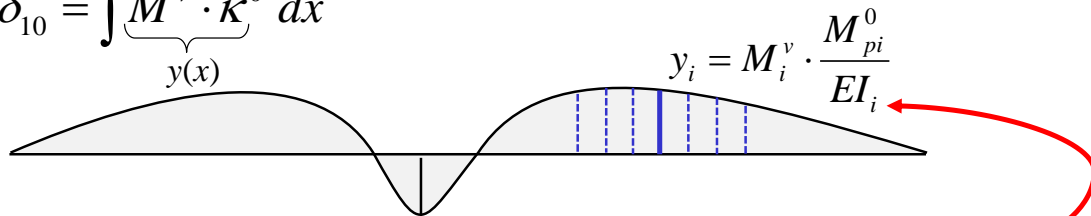
Bild 2-7 Vorspannmomente für Spanngliedverlauf 1 und 2



virtueller Zustand:



$$1^v \cdot \delta_{10} = \int \underbrace{M^v \cdot \kappa^0}_{y(x)} dx$$



Hinweis: die Simpson-Integration eignet sich auch bei veränderlicher Biegesteifigkeit

2.3 Schnittgrößen für Lastfälle bei verbundlosem Spannglied

Bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund oder ohne Verbund wirken beim Vorspannen die Lastfälle Vorspannung und Eigengewicht stets gleichzeitig auf das Bauteil. Zur Spannkraft aus dem Lastfall Vorspannung allein kommt ein weiterer Anteil aus der Hängewerkswirkung infolge des Eigengewichtes g_1 beim Vorspannen hinzu. Die Summe beider Kraftanteile wird an der Spannpressse abgelesen, man nennt sie daher auch Pressenkraft und bezeichnet sie mit $P_{pg} = P + P_{g1}$. In der Berechnung kann die Hängewerkskraft wie ein zusätzlicher Teil der Vorspannkraft behandelt werden.

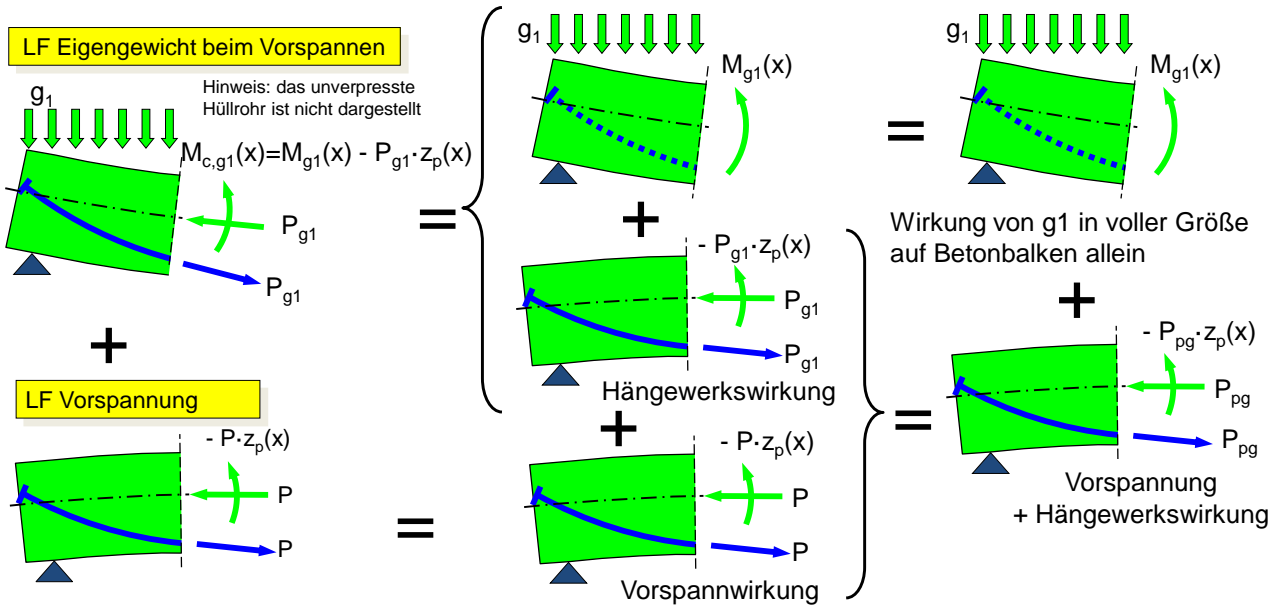


Bild 2-8 Betrachtung der Hängewerkswirkung als Teil der Vorspannung bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund (unverpresstes Hüllrohr jeweils nicht dargestellt). Gilt so auch für Vorspannung ohne Verbund.

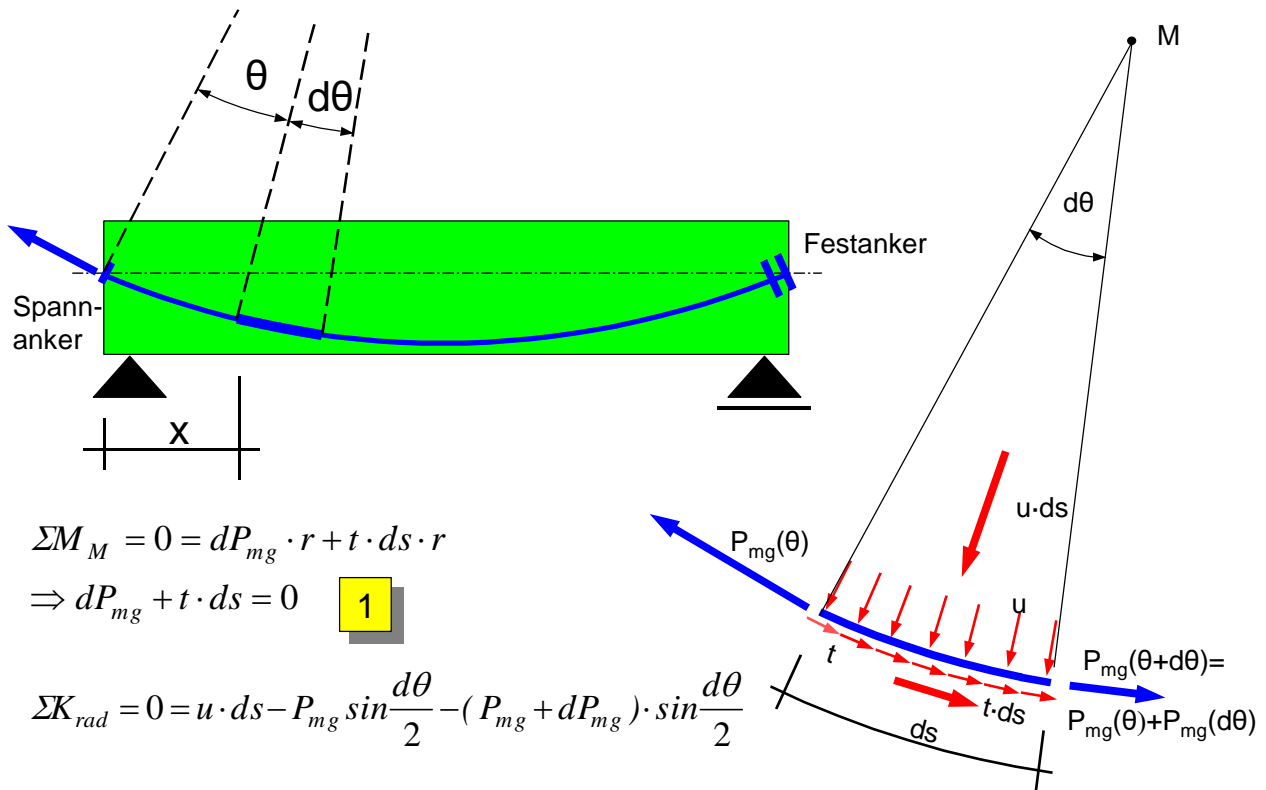
Für diese Lastfälle die Netto-Querschnittswerte verwenden!

Lastfälle nach Herstellung des Verbundes wirken auf den idellen Querschnitt.

Bei Vorspannung ohne Verbund erzeugen alle Lastfälle eine Hängewerkswirkung.

2.4 Spannkraftverluste in Folge Reibung

2.4.1 Differentialgleichung der Seilreibung



$$\sum M_M = 0 = dP_{mg} \cdot r + t \cdot ds \cdot r$$

$$\Rightarrow dP_{mg} + t \cdot ds = 0 \quad \mathbf{1}$$

$$\sum K_{rad} = 0 = u \cdot ds - P_{mg} \sin \frac{d\theta}{2} - (P_{mg} + dP_{mg}) \cdot \sin \frac{d\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 0 = u \cdot ds - 2 \cdot P_{mg} \cdot \frac{d\theta}{2} - dP_{mg} \cdot \frac{d\theta}{2} \quad \text{mit } \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$$

$$\Rightarrow u \cdot ds = P_{mg} \cdot d\theta \quad \mathbf{2} \quad \text{von höherer Ordnung klein}$$

$$\text{Coulomb'sches Reibungsgesetz: } t = \mu \cdot u \quad \mathbf{3}$$

$$\mathbf{3} \text{ in } \mathbf{1} = \mathbf{4} \quad dP_{mg} + \mu \cdot u \cdot ds = 0$$

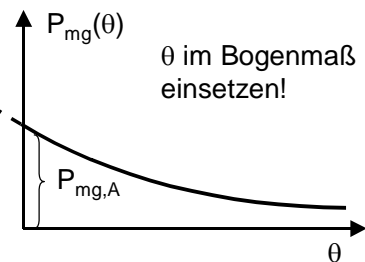
$$\mathbf{2} \text{ in } \mathbf{4} \quad dP_{mg} + \mu \cdot P_{mg} \cdot d\theta = 0$$

Differentialgleichung der Seilreibung	$\frac{dP_{mg}}{d\theta} + \mu \cdot P_{mg} = 0$
--	--

allgemeine Lösung: $P_{mg}(\theta) = C \cdot e^{-\mu \cdot \theta}$

mit $P_{mg}(0) = P_{mg,A(nfang)}$

$P_{mg}(\theta) = P_{mg,A} \cdot e^{-\mu \cdot \theta}$



2.4.2 Reibungskennwert μ

Der bei der Seilreibung zu verwendende Reibungskennwert μ ist der Zulassung des jeweiligen Spannverfahrens zu entnehmen, er ist das Produkt aus dem Reibungsbeiwert μ_0 und dem Klemmbeiwert κ :

$$\mu = \mu_0 \cdot \kappa$$

Der Reibungsbeiwert wird aus Versuchen mit Einzeldrähten, -litzen bzw. -stäben ermittelt und liegt etwa zwischen 0,15 und 0,30.

Der Klemmbeiwert berücksichtigt die Anordnung mehrerer Einzeldrähte, -litzen bzw. -stäbe in einem Hüllrohr und die dabei entstehende Vergrößerung der Reibungskräfte:

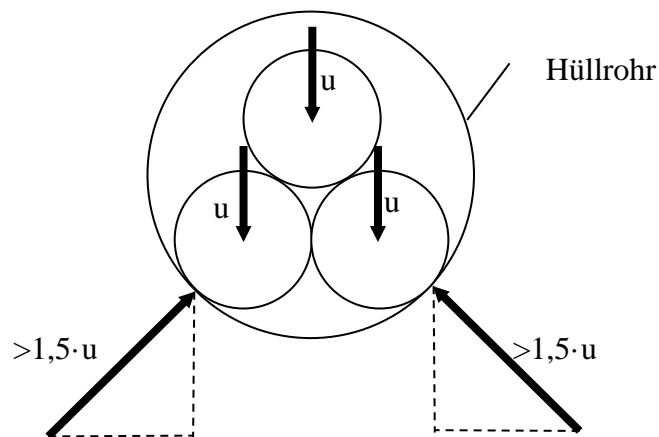


Bild 2-9

2.4.3 Planmäßiger Umlenkwinkel

Bei einem Spannglied ergibt sich der planmäßige Umlenkwinkel vom Spannanker bis zu einer Stelle k :

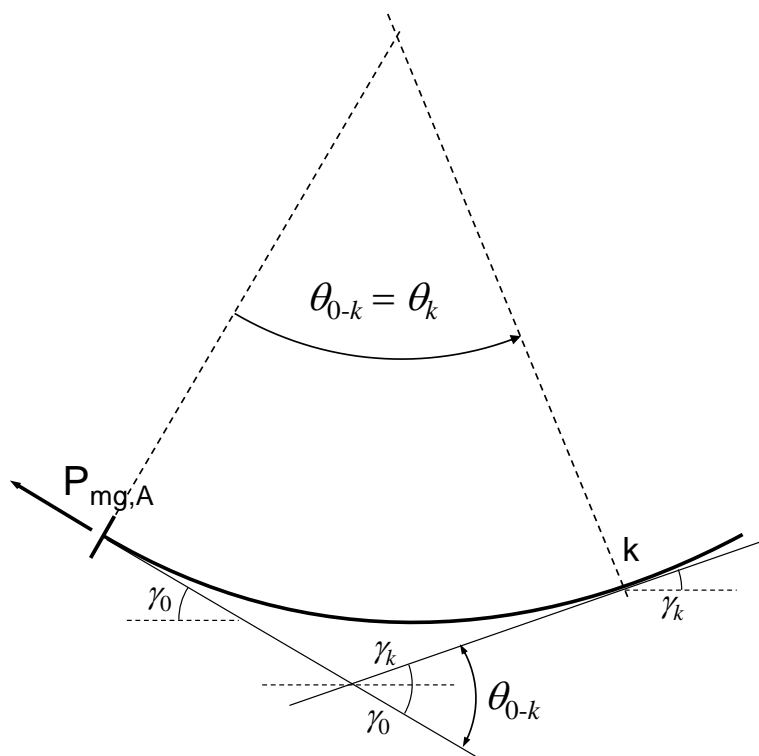
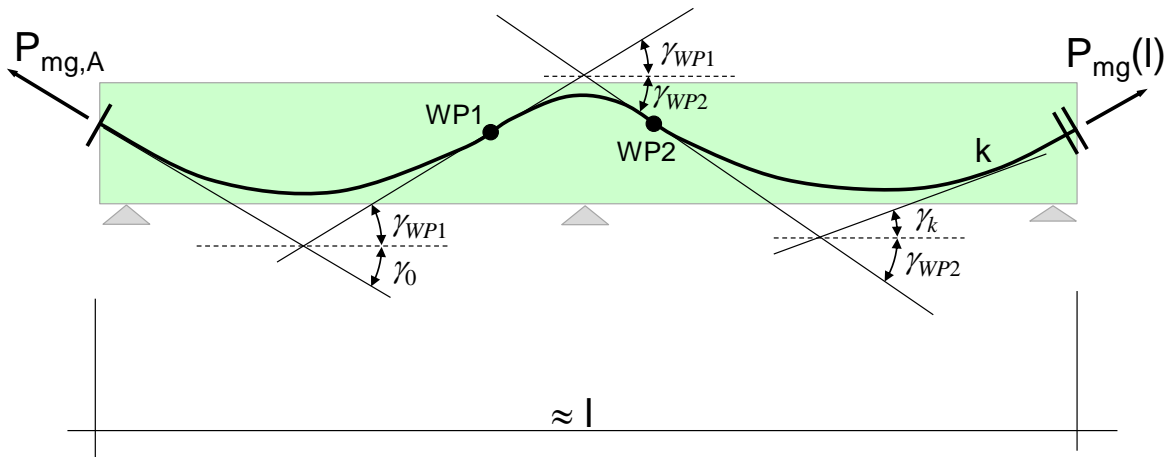


Bild 2-10

Bei einem Spannglied mit mehrfachem Krümmungswechsel ergibt sich der planmäßige Umlenkwinkel z.B. bis zur Stelle k:

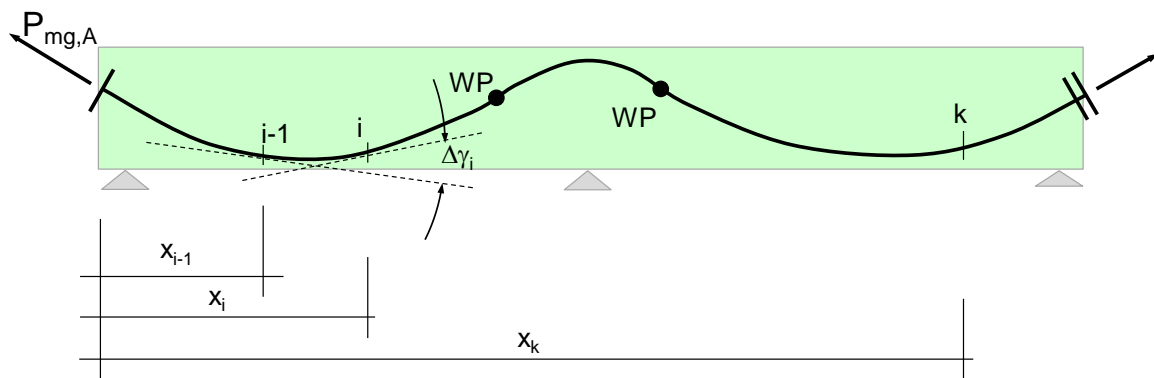
dargestellt am Beispiel eines Zweifeldträgers:



$$\theta_k = |\gamma_0| + |\gamma_{WP1}| + |\gamma_{WP1}| + |\gamma_{WP2}| + |\gamma_{WP2}| + |\gamma_k|$$

Bild 2-11

Für die zu führenden Nachweise der Gebrauchstauglichkeit und der Tragsicherheit ist die Berechnung des Spannkraftverlustes eines Spanngliedes auch an mehreren Zwischenpunkten x_1 bis x_n erforderlich. Der Umlenkwinkel an der Stelle x_k ergibt sich dann:



$$\theta_k = \sum_{i=1}^k |\gamma_i - \gamma_{i-1}|$$

Bild 2-12

Dabei ist zu beachten, dass die Wendepunkte des Spanngliedverlaufes als Zwischenpunkte berücksichtigt werden.

Folgt der Spanngliedverlauf einer mathematischen Funktion, dann können die Winkel γ_i über $\gamma(x)$, der Ableitung der Funktion für den Spanngliedverlauf, ermittelt werden. Bei einem nur durch einzelne Punkte definierten Spanngliedverlauf müssen die Winkel näherungsweise mit Hilfe numerischer Methoden bestimmt werden (siehe nachfolgende Bilder zu Sekanten- und Tangentenwinkel-Methode).

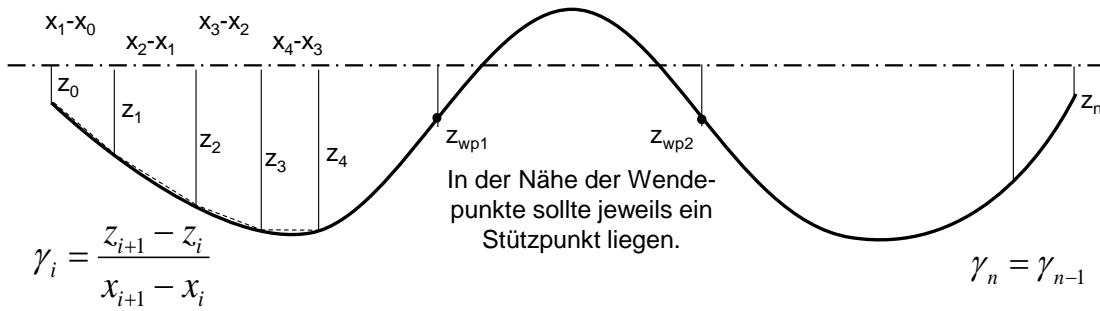


Bild 2-13 Sekantenwinkel-Methode

Bei der Methode nach Bild 2-14 wird durch jeweils 3 benachbarte Punkte näherungsweise eine Parabel gelegt und für den mittleren Punkt die Tangente bestimmt.

Die Abstände Δx müssen gleich sein.

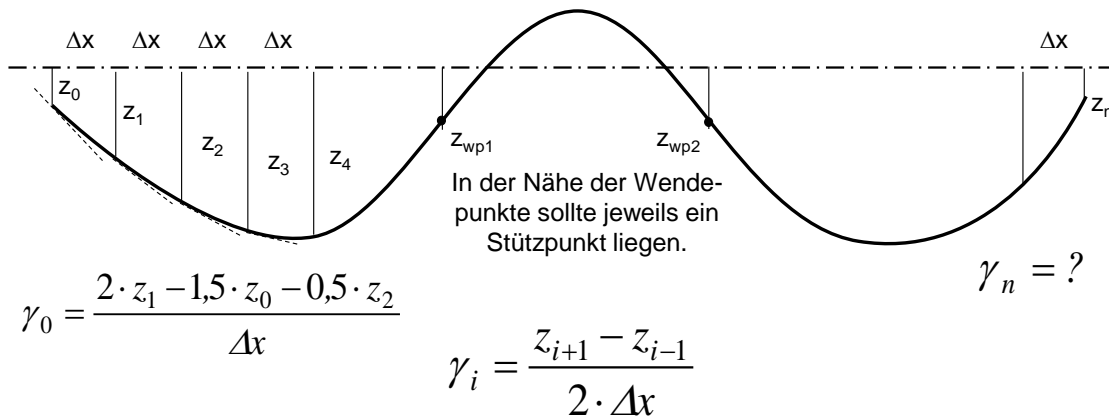
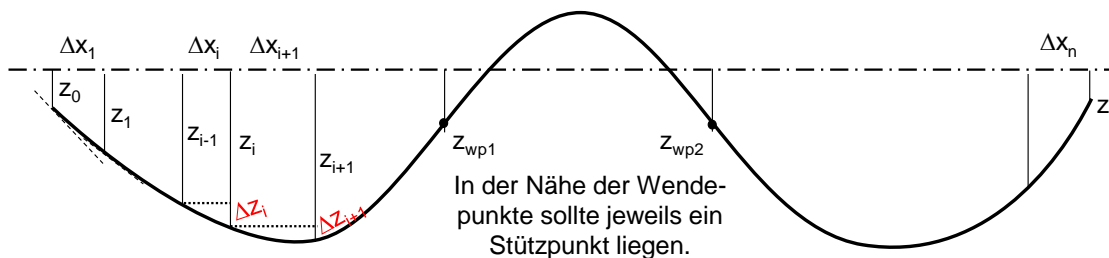


Bild 2-14 Tangentenwinkel-Methode



aus

$$\gamma_i = \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\Delta z_i + \Delta z_{i+1}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\Delta z_i}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\Delta z_{i+1}}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2}$$

wird für unterschiedliche Δx -Werte noch eine gewichtete Mittelung vorgenommen:

$$\gamma_i = \frac{\Delta z_i}{\Delta x_i} \cdot \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} + \frac{\Delta z_{i+1}}{\Delta x_{i+1}} \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \quad \text{für Parabel exakt gilt nicht für } \gamma_0 \text{ und } \gamma_n$$

Bei paarweisem Δx am Anfang und Ende kann die Lösung für γ_0 und γ_n aus der zuvor genannten Methode übernommen werden.

Bild 2-15 Tangentenwinkel-Methode für ungleiche Δx

2.4.4 Ungewollter Umlenkswinkel $k \cdot x$

Ein ungewollter Umlenkswinkel entsteht durch Verformung des Hüllrohres zwischen den Hüllrohrunterstützungen. Die Hüllrohre hängen durch, wenn die Spannglieder vor dem Betonieren in den Hüllrohren liegen, sie schwimmen zwischen den Unterstüzungen auf, wenn sie beim Betonieren leer sind.

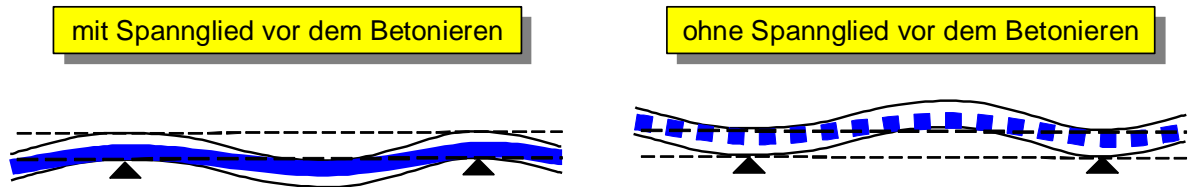


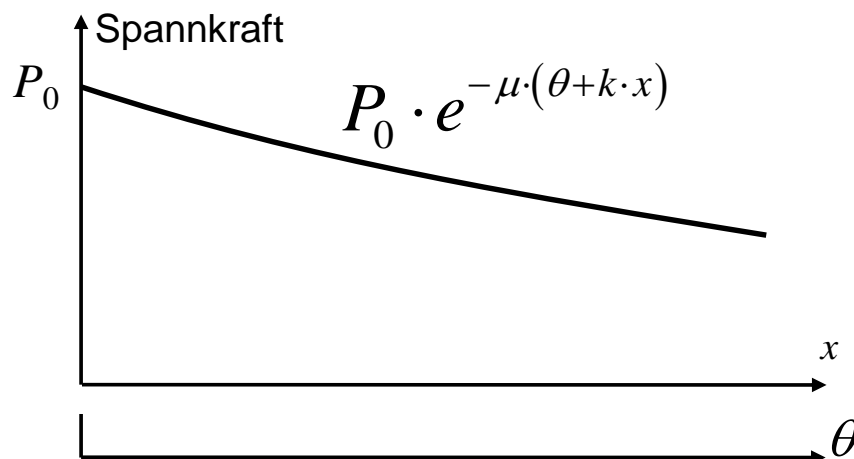
Bild 2-16

Angaben zu k (DIN 4227: β) in $[\text{°}/\text{m}]$ sind den Zulassungen zu entnehmen. Wirken der gewollte Umlenkswinkel θ und der ungewollte Umlenkswinkel in der gleichen Ebene (bei üblichen Trägern der Fall), dann addieren sich die Winkel:

$$\theta + k \cdot x \quad x: \text{Länge von der Spannstelle aus}$$

Wirken sie in verschiedenen Ebenen (z.B. bei ringförmig vorgespannten Behältern), dann addieren sie sich vektoriell.

Wenn die größte Vorspannkraft für einen Nachweis in den Grenzzuständen der Gebrauchstauglichkeit oder der Tragsicherheit erforderlich wird, dann sollte auf der sicheren Seite liegend $k = 0$ angenommen werden.



2.4.5 Spannvorgang und Spannmöglichkeiten

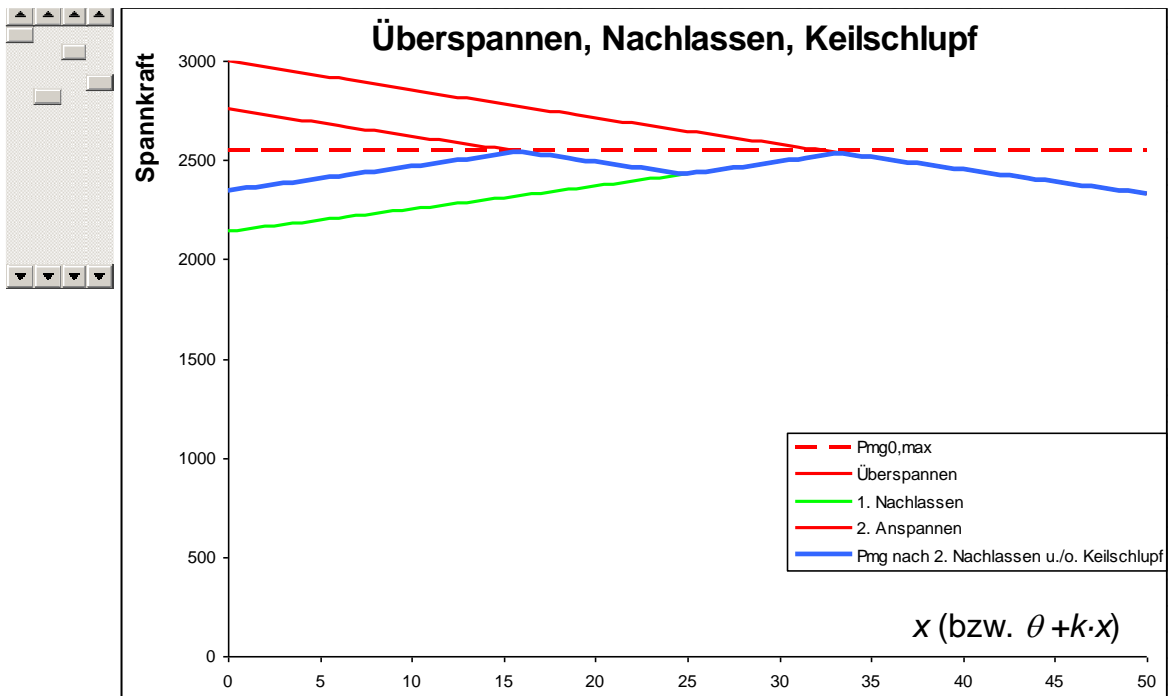


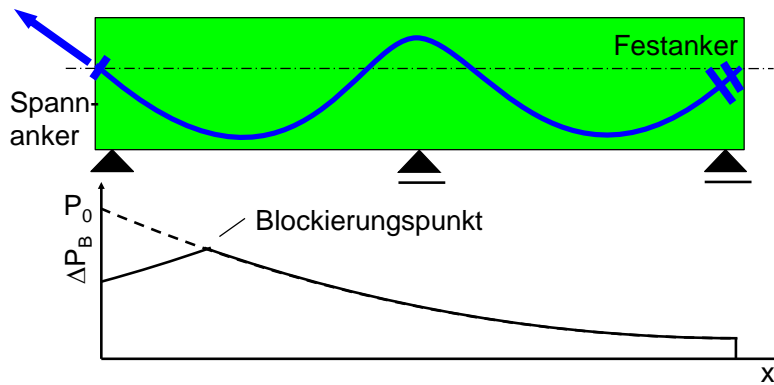
Bild 2-17

Die Spannglieder können

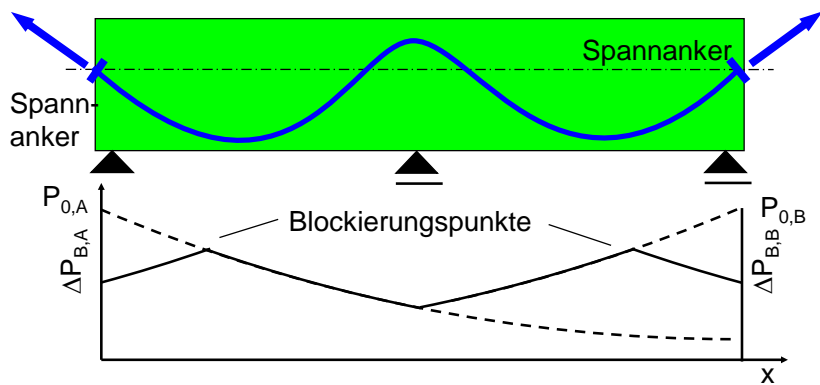
- einseitig,
- beidseitig bzw.
- wechselseitig

gespannt werden.

einseitiges Spannen



beidseitiges Spannen



wechselseitiges Spannen

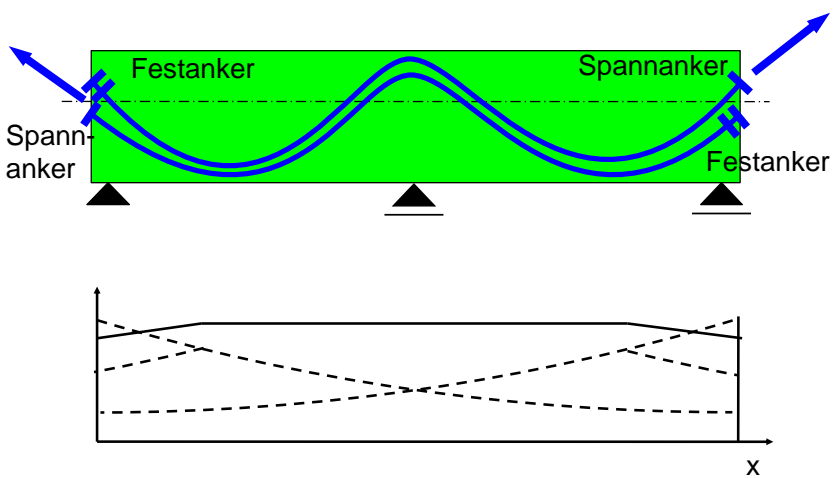


Bild 2-18

2.4.6 Nachlassen und Keilschlupf

Während des Spannvorganges sind vorübergehend größere Spannstahlspannungen zulässig als im Endzustand. Dieses kann ausgenutzt werden, um die Reibungsverluste in einiger Entfernung von der Spannstelle gering zu halten. Man spricht dann vom Überspannen. Die Spannkraft des überspannten Spanngliedes muss anschließend nachgelassen werden.

Das Nachlassen der Spannglieder muss berechnet werden, wenn davon aus wirtschaftlichen Gründen bei der Ausführung Gebrauch gemacht werden soll. Die Zusammenhänge sind dem folgenden Bild zu entnehmen. Der Nachlassweg ergibt sich als Flächeninhalt, wenn an Stelle der Spannkraft die Stahldehnungen über x aufgetragen werden.

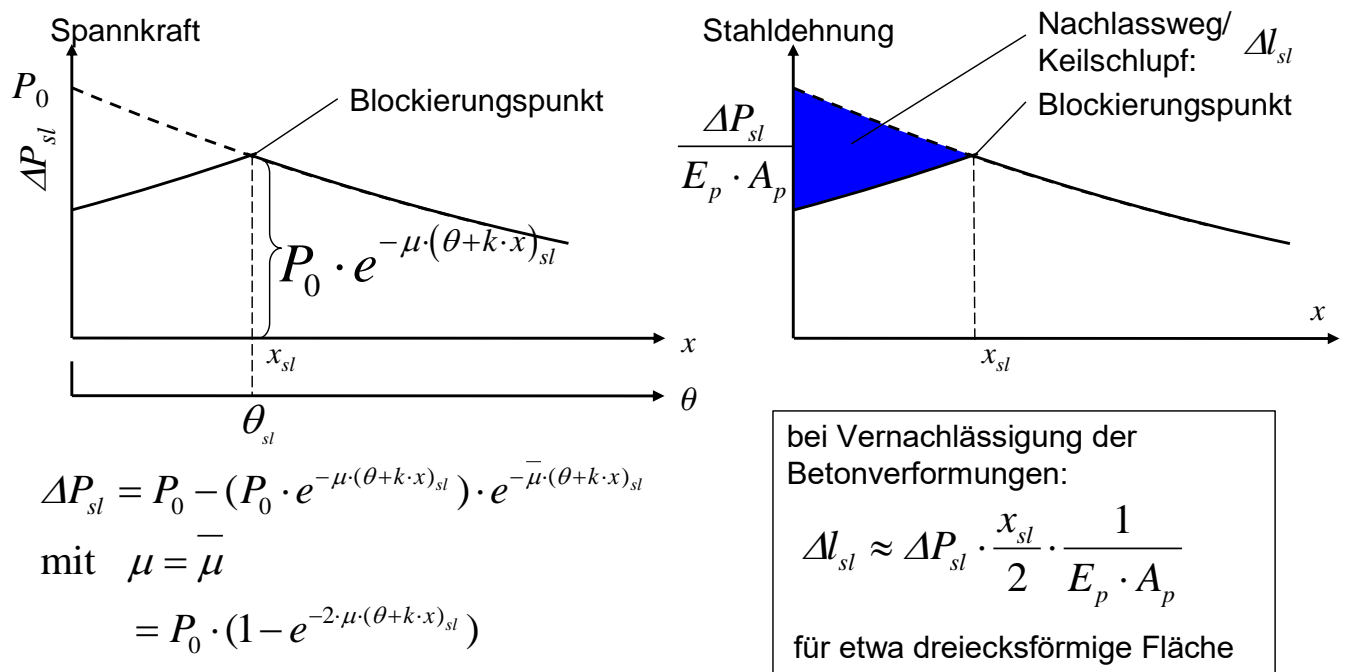


Bild 2-19

Hinweis: Die schraffierte Fläche kann auch sehr von einer Dreiecksfigur abweichen, insbesondere bei weit entfernten Blockierungspunkten und ungleichmäßiger Zunahme des Winkels $\theta + k \cdot x$. Dann muss der Flächeninhalt z.B. numerisch ermittelt werden.

Durch mehrfaches Überspannen und Nachlassen und entsprechender Wahl gestaffelter Blockierungspunkte (sägezahnförmiger Verlauf der Spannkraft über die Bauteillänge) kann die Spannkraft recht weit in das Bauteil hinein auf einem hohen Spannungsniveau ausgebildet werden.

Da derzeit die zul. Überspannkraft nur geringfügig über der zulässigen Spannkraft am Ende des Spannvorganges liegt, ist wiederholtes Spannen und Nachlassen kaum noch von Bedeutung.

Bei Litzenspannverfahren werden die einzelnen Litzen mit Hilfe von kegelförmigen Keilen in der Ankerbüchse verankert. Bis zum Kraftschluss dieser Verankerung ergibt sich ein Keilschlupf von ca. 6 mm. Dieser muss, sofern nachgelassen wird, vom Nachlassweg abgezogen werden, da er ohnehin entstehen würde. Wenn nicht nachgelassen wird, so ist der Spannkraftabfall zwischen Spannanker und Blockierungspunkt gegebenenfalls zu berücksichtigen.

2.5 Spannstahlspannungen beim Vorspannen

Spannungsgrenzen für den Spannstahl nach DIN 1045-1, Abs. 8.7.2 bzw. EC2, 5.10.2 und 5.10.3 (Schnittgrößen vorgespannter Tragwerke)

Nachfolgende Spannungsgrenzen sind im Zusammenhang mit den Spannstahlspannungen beim Vorspannen oder unmittelbar nach dem Spannvorgang einzuhalten.

Während des Spannvorgangs nachfolgende Grenzen nicht überschritten werden:

$$\sigma_{p0} \leq 0,8 \cdot f_{pk}$$

$$\sigma_{p0} \leq 0,9 \cdot f_{p0,1k}$$

Bei sofortigem Verbund wird die Spannbettspannung maßgebend.

Bei Vorspannung mit nachträglichem bzw. ohne Verbund wird die Spannung unter der Pressenkraft maßgebend.

Ein Überspannen (Überspannreserve) auf

$$\sigma_{p0} \leq 0,95 \cdot f_{p0,1k}$$

ist nur zulässig, wenn die Messunsicherheit der Spannpresse $\leq \pm 5\%$ ist (bezogen auf den Endwert der Vorspannkraft). Diese Reserve sollte bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund nicht in der Planungsphase berücksichtigt werden, sondern vollständig als Reserve für die Bauausführung zur Verfügung stehen, wenn sich z.B. beim Spannvorgang unerwartet hohe Reibungsverluste einstellen.

Zusätzlich wird bei Vorspannung mit sofortigem Verbund nach dem Lösen aus dem Spannbett bzw. bei Vorspannung mit nachträglichem oder ohne Verbund nach Absetzen der Pressenkraft (nach Abschluss des gesamten Spannvorganges) für den Spannstahl zum Zeitpunkt $t = 0$ gefordert:

$$\sigma_{pm0} \leq 0,75 \cdot f_{pk}$$

$$\sigma_{pm0} \leq 0,85 \cdot f_{p0,1k}$$

Hierbei dürfen alle zum Zeitpunkt $t = 0$ eingetretenen Spannkraftverluste berücksichtigt werden. bei Herstellung im Spannbett auch die Kurzzeitrelaxation des Spannstahls berücksichtigt werden.

2.6 Berechnung des Spannweges

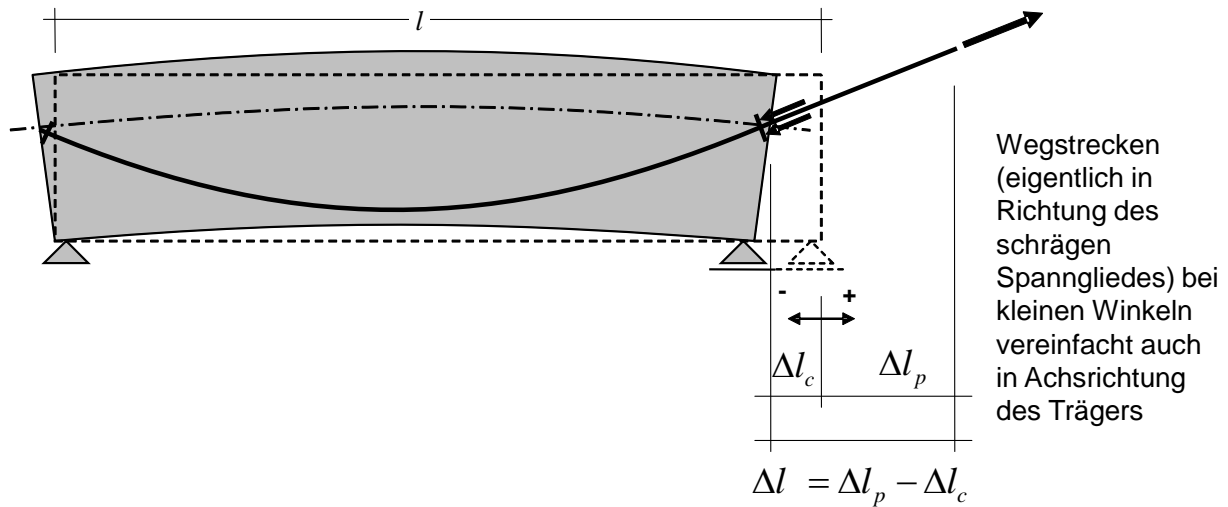


Bild 2-20 Verformungen beim Anspannen

Verformung mit dem P.d.v.K. allgemein: $1^v \cdot \Delta l = \int_0^l \varepsilon(x) \cdot N^v(x) dx + \int_0^l \kappa(x) \cdot M^v(x) dx + \dots$

Damit ergibt sich die Stahlverlängerung:

$$1^v \cdot \Delta l_p = \int_0^l \frac{P_{mg0}(x)}{E_p \cdot A_p} \cdot 1^v dx$$

und die Betonverkürzung:

$$1^v \cdot \Delta l_c = \int_0^l \frac{-P_{mg0}(x)}{E_{cm} \cdot A_{c,netto}(x)} \cdot 1^v dx + \int_0^l \frac{-P_{mg0}(x) \cdot z_p(x)}{E_{cm} \cdot I_{c,netto}(x)} \cdot (1^v \cdot z_p(x)) dx + \int_0^l \frac{+M_{g1}(x)}{E_{cm} \cdot I_{c,netto}(x)} \cdot (1^v \cdot z_p(x)) dx$$

Der Spannweg insgesamt:

$$\Delta l = \Delta l_p - \Delta l_c = \int_0^l \frac{P_{mg0}(x)}{E_p \cdot A_p} dx + \int_0^l \frac{P_{mg0}(x)}{E_{cm} \cdot A_{c,netto}(x)} dx + \int_0^l \frac{P_{mg0}(x) \cdot z_p(x) - M_{g1}(x)}{E_{cm} \cdot I_{c,netto}(x)} \cdot z_p(x) dx \approx 0$$

näherungsweise:

$$\Delta l \approx \int_0^l \frac{P_{mg0}(x)}{E_p \cdot A_p} dx + \int_0^l \frac{P_{mg0}(x)}{E_{cm} \cdot A_{c,netto}(x)} dx$$

Anspannen der Spannglieder nacheinander:

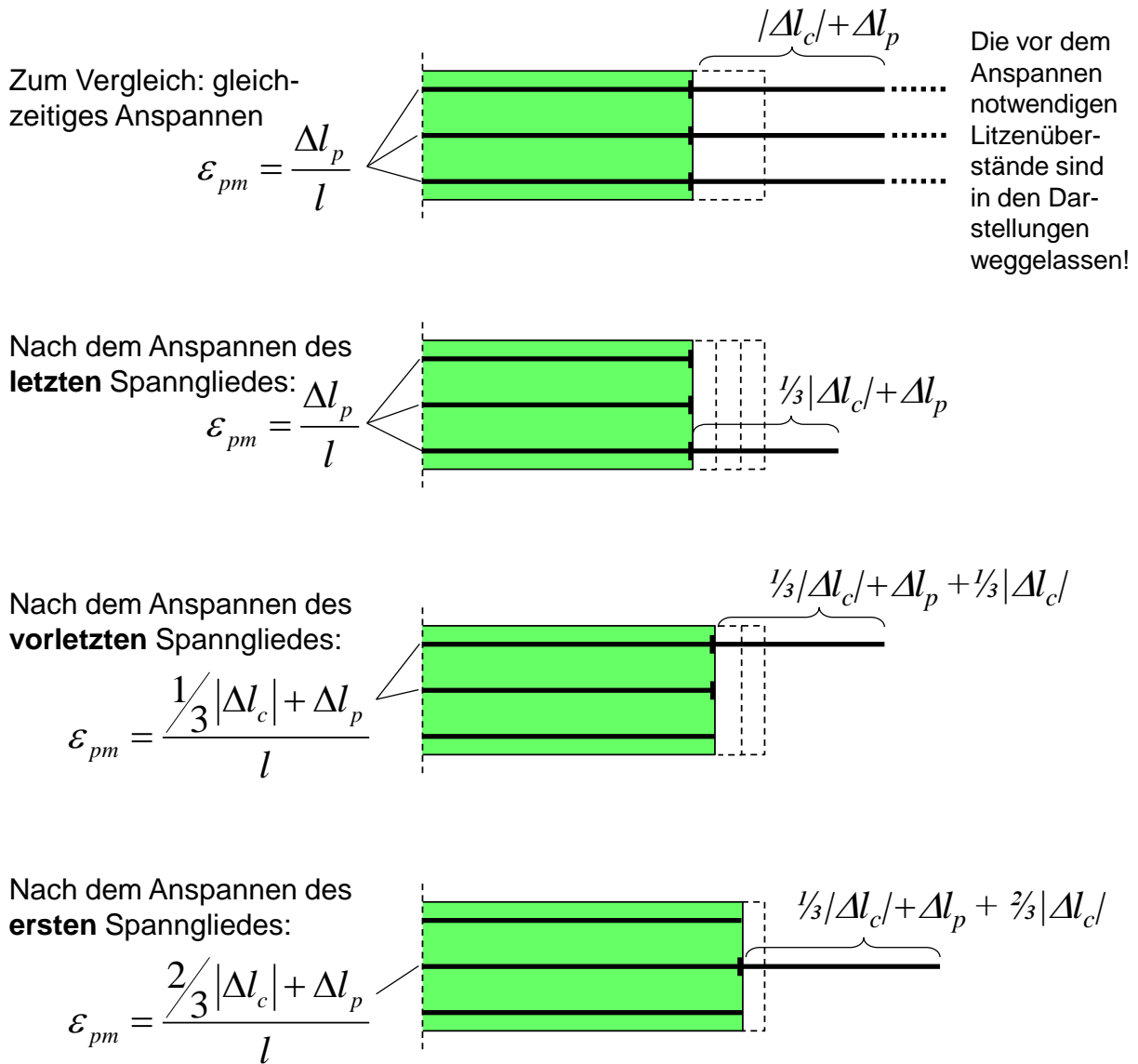


Bild 2-21 Dehnungen und Spannwege beim Vorspannen. Sofern Reibungsverluste vorhanden sind, sind die über die Bauteillänge gemittelten Dehnungen gemeint.

2.7 Kriechen, Schwinden und Spannstahlrelaxation

2.7.1 Grundlagen

Um die Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit einer Konstruktion langfristig zu gewährleisten, ist es notwendig, das Langzeitverhalten des Betons näher zu betrachten.

Unter **Schwinden** des Betons versteht man die beanspruchungsunabhängige Verkürzung des Betons, die durch die Austrocknung des Bauteils bedingt ist.

Unter **Kriechen** versteht man die Erscheinung, dass sich der Beton unter einer konstanten Spannung im Laufe der Zeit verformt.

Relaxation ist der Abfall der Spannungen im Laufe der Zeit, wenn eine anfänglich aufgebrachte Dehnung über die Zeit konstant gehalten wird.

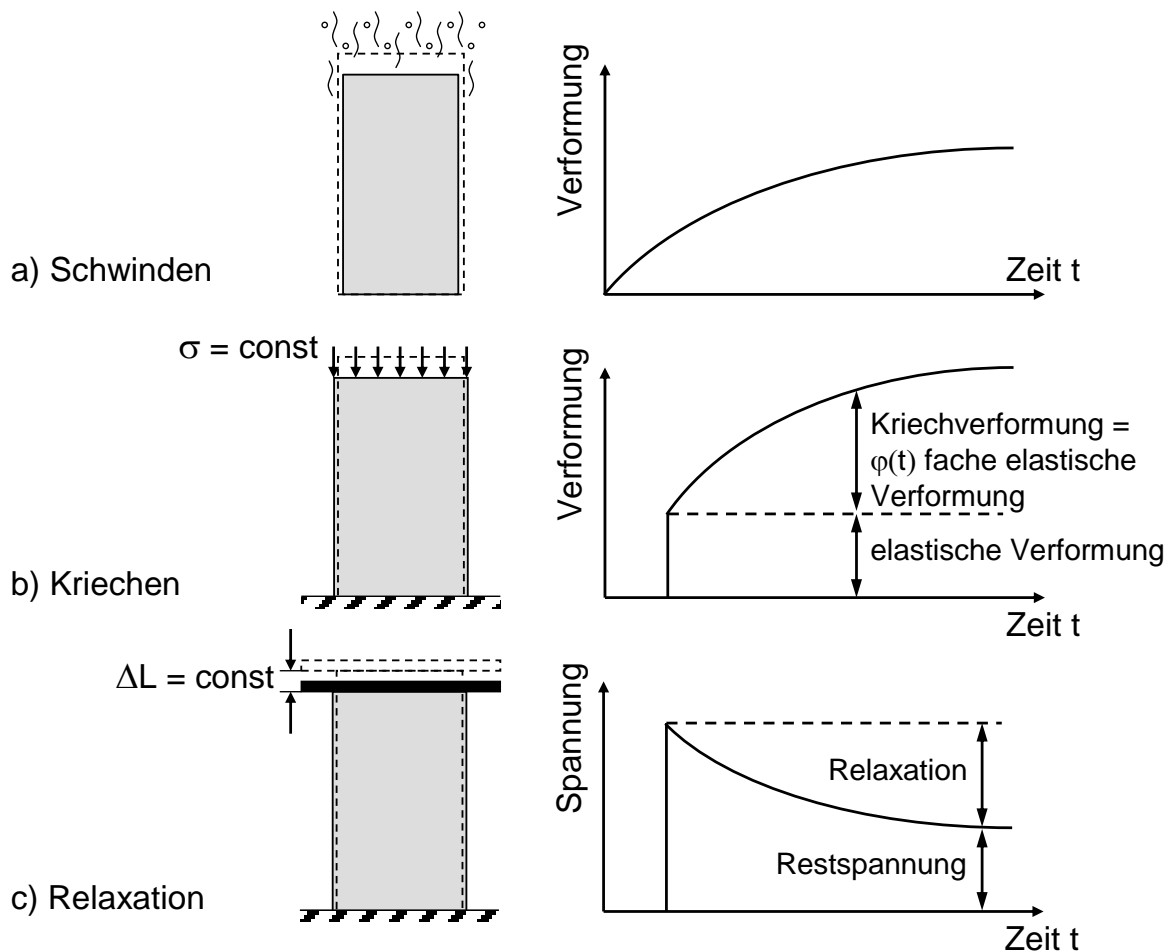


Bild 2-22

Auswirkungen von Kriechen und Schwinden:

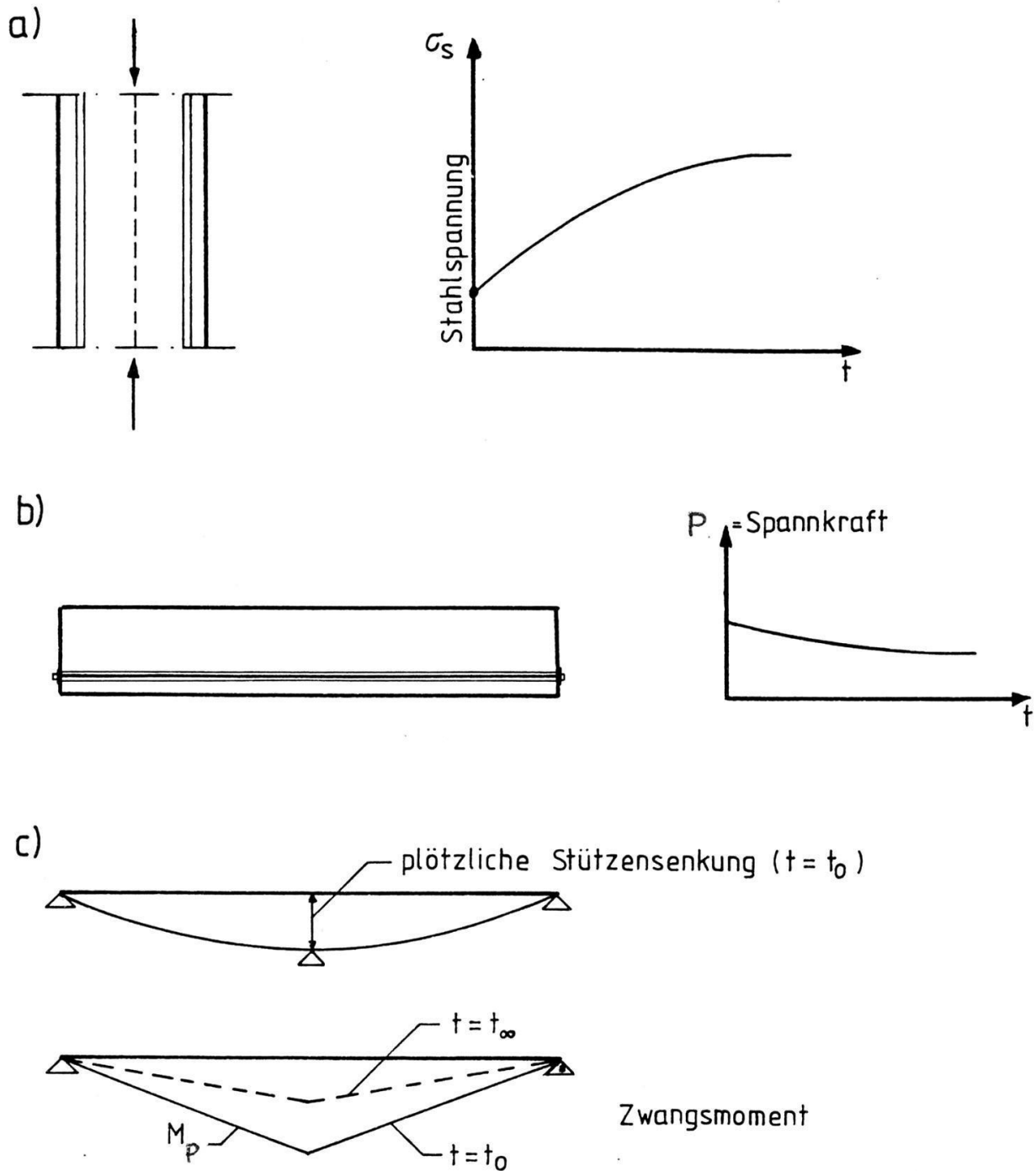
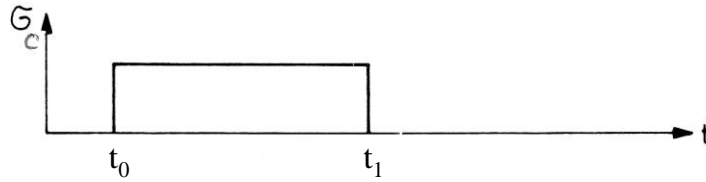


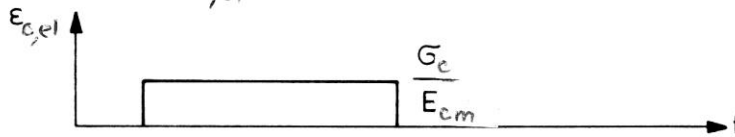
Bild 2-23 aus [24]

Die zeitabhängige Betondehnung $\epsilon_c(t)$ unter konstanter Spannung σ_c setzt sich aus drei Anteilen zusammen

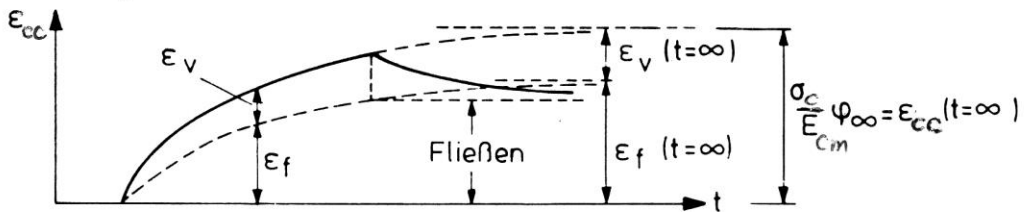
a) konst. Spannung \bar{G}_c im Zeitraum $t_0 \leq t \leq t_1$



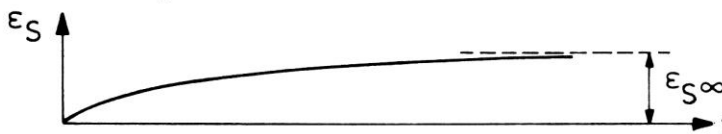
b) elast. Dehnung $\epsilon_{c,el}$



c) Kriechdehnung als Summe von irreversiblen und reversiblen Anteilen



d) Schwinddehnung



e) gesamte Dehnung

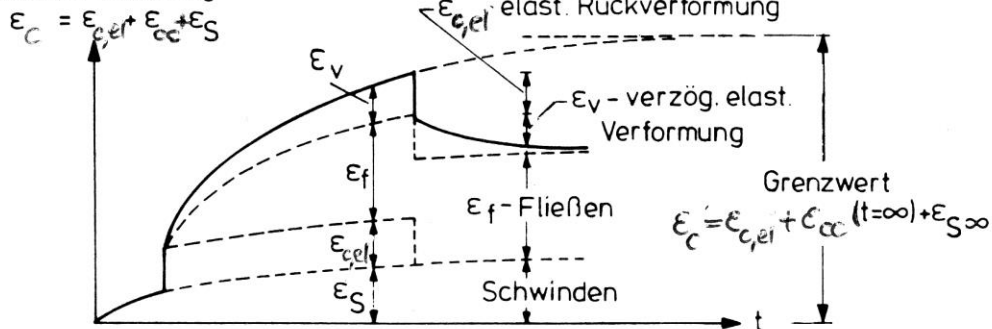


Bild 2-24 aus [25] mit geänderten Bezeichnungen

Für veränderliche Beanspruchungen innerhalb eines Betrachtungszeitraumes ist ein Superpositionsgesetz notwendig. Überlegungen hierzu gehen auf Boltzmann zurück.

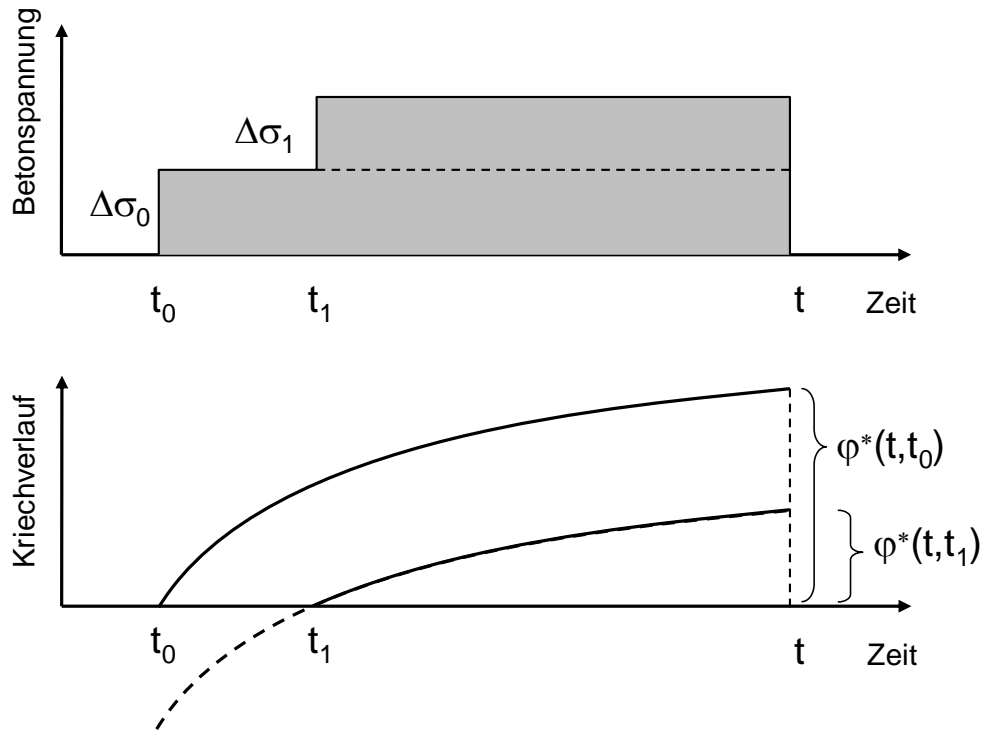


Bild 2-25

Hinreichend genaue Ermittlung der Kriechdehnung zur Zeit t : $\varepsilon_{cc,t} = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta\sigma_i}{E_{cm}} \cdot \varphi^*(t, t_i)$

Berechnungsverfahren nach Trost [26]

Für viele Bauteile ist der dargestellte Verlauf der Beanspruchung mit hoher Anfangsspannung und geringer Spannungsdifferenz über einen Zeitraum charakteristisch.

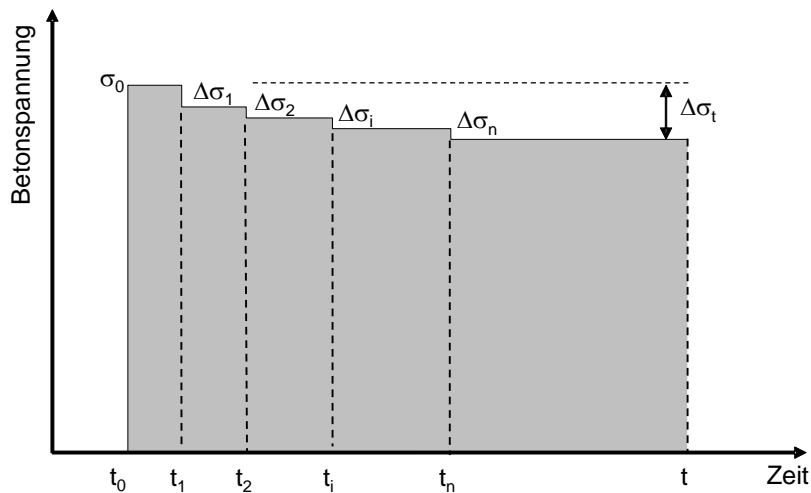


Bild 2-26

Für Beton gilt:

Gesamtverf. = elast. Verformung + Kriechverformung + Schwindverformung

$$\delta_c(t) = \varepsilon_c(t) \cdot l = \varepsilon_{c,el} \cdot l + \varepsilon_{cc}(t) \cdot l + \varepsilon_{cs}(t) \cdot l$$

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c,el} + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t)$$

entsprechend Superposition

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_0}{E_{cm}} + \frac{\Delta\sigma_t}{E_{cm}} + \frac{\sigma_0}{E_{cm}} \cdot \varphi^*(t, t_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta\sigma_i}{E_{cm}} \cdot \varphi^*(t, t_i)} + \varepsilon_{cs}(t)$$

Ansatz von Trost: $\frac{\Delta\sigma_t}{E_{cm}} \cdot \rho \cdot \varphi^*(t, t_0)$ mit dem Relaxationsbeiwert $\rho < 1,0$

Da nun nur noch eine Kriechzahl von Interesse ist, kann man für sie eine kürzere Schreibweise wählen

$$\varphi^*(t, t_0) = \varphi_t^*$$

Für alle normal belasteten Betonkonstruktionen (geringes Verhältnis $\Delta\sigma_t/\sigma_0$) mit $1,5 \leq \varphi_t^* \leq 4,0$ ist $\rho = 0,8$ eine gute Näherung

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_0}{E_{cm}} [1 + \varphi_t^*] + \frac{\Delta\sigma_t}{E_{cm}} [1 + \rho \cdot \varphi_t^*] + \varepsilon_{cs}(t)$$

oder wieder als Verformung:

$$\delta_c(t) = \delta_0 [1 + \varphi_t^*] + \delta_t [1 + \rho \cdot \varphi_t^*] + \delta_{cs}(t)$$

Einflussparameter auf Kriechen und Schwinden

Schwinden wird maßgeblich durch das bei der Hydratation überschüssige Wasser beeinflusst, es ist stärker ausgeprägt

- je höher der Wasserzementwert ist,
- je größer der Zementgehalt ist,
- je trockener die Umgebungsbedingungen sind und
- je dünner das Bauteil ist.

Das Kriechen findet im wesentlichen in der Zementsteinmatrix statt. Infolge dauernd wirkender Spannungen entstehen Gefügeveränderungen, die sich als plastische (bleibende) und verzögert elastische Verformungen darstellen. Kriechen ist stärker ausgeprägt,

- je höher der Wasserzementwert ist,
- je größer der Zementgehalt ist,
- je trockener die Umgebungsbedingungen sind,
- je dünner das Bauteil ist,
- je geringer der Reifegrad des Betons beim Aufbringen der Belastung ist,
- je höher das Niveau und die Dauer der Belastung ist

Endkriechzahlen und Endschwindwerte nach EC2

Die zeitlichen Endwerte für das Kriechen und schwinden können EC2, 3.1.4 entnommen werden. Kriech- und Schwindzahlen zu beliebigen Zeitpunkten und Kriechzahlen bei zeitlich veränderlicher Betonspannung können entnommen werden.

Die Kriechdehnung ist nach EC2 unter Bezug auf den Tangentenmodul im Ursprung definiert

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot \frac{\sigma_c}{E_{c0}} \quad \text{bzw. in Kurzform: } \varepsilon_{cc,t} = \varphi_t \cdot \frac{\sigma_c}{E_{c0}}$$

(Werte für φ_∞ können dem Bild 3.1 des EC2 entnommen werden)

und ist zu elastischen Verformungen zu addieren, wie es z.B. beim Verfahren nach Trost notwendig war. Die elastischen Verformungen werden jedoch auf den Sekantenmodul bezogen. Es empfiehlt sich daher, die ermittelten Kriechzahlen entsprechend auf den Sekantenmodul umzurechnen:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c,el} + \varepsilon_{cc}(t) = \frac{\sigma_c}{E_{cm}} + \varphi_t \cdot \frac{\sigma_c}{E_{c0m}} = \frac{\sigma_c}{E_{cm}} + \varphi_t^* \cdot \frac{\sigma_c}{E_{cm}} = \frac{\sigma_c}{E_{cm}} \cdot (1 + \varphi_t^*)$$

$$\text{mit: } \varphi_t^* = \varphi_t \cdot \frac{E_{cm}}{E_{c0}} = \varphi_t / 1,05$$

Die Schwinddehnung ergibt sich aus dem Trocknungsschwinden und aus der Schrumpfdéhnung.

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca}$$

Werte können dem EC2 entnommen werden.

2.7.2 Kriechen und Schwinden für zentrisch beanspruchte Bauteile mit symmetrischer Bewehrung

Betonstahlbewehrte Stütze

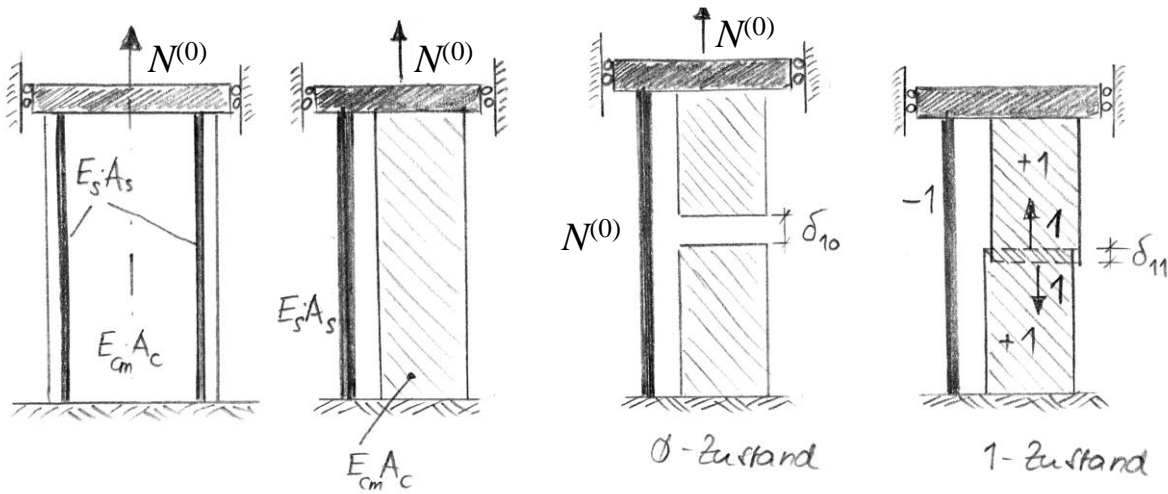


Bild 2-27

$$\delta_{10} + X_1(0) \cdot \delta_{11} = 0$$

mit $\delta_{10} = \delta_{1N} = -\frac{l^v \cdot N^{(0)}}{E_s \cdot A_s} \cdot l$ und $\delta_{11} = \frac{l^v \cdot 1}{E_s \cdot A_s} \cdot l + \frac{l^v \cdot 1}{E_{cm} \cdot A_c} \cdot l$

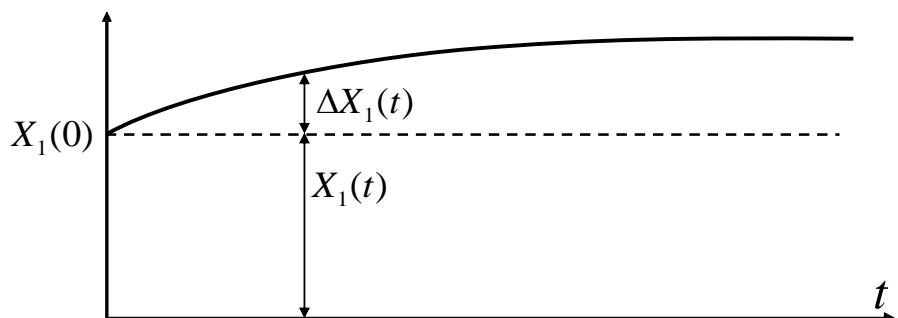
$$X_1(0) = N_c(0) = \frac{N^{(0)} \cdot \frac{1}{E_s \cdot A_s}}{\frac{1}{E_s \cdot A_s} + \frac{1}{E_{cm} \cdot A_c}} = \frac{N}{1 + \alpha_e \cdot \frac{A_s}{A_{cn}}} \quad \text{Kraft im Beton, Zeitpunkt } t = 0$$

$$\sigma_c(0) = \frac{N_c(0)}{A_{cn}} = \frac{N^{(0)}}{A_{cn} + \alpha_e \cdot A_s} = \frac{N^{(0)}}{A_{ci}}$$

Übertragung auf Biegebauteile:

$$\sigma_c(0) = \frac{N^{(0)}}{A_{ci}} + \frac{M^{(0)}}{I_{ci}} \cdot z_i$$

zu beliebiger Zeit t: $\delta_{1N}(t) + \delta_{1s}(t) + X_1(t) \cdot \delta_{11}(t) = 0$ mit $\delta_{1s}(t) = -\varepsilon_s^{(0)}(t) \cdot l$



$\delta_{1N}(t)$: im Nullzustand ist der Beton nicht beansprucht, er kann daher auch in diesem Zustand nicht kriechen. Daher ist $\delta_{1N}(t)$ hier nicht von der Zeit abhängig $\delta_{1N}(t) = \delta_{1N}$

$X_1(t)$: Durch das Kriechen wird sich die Kraft $X_1(t)$ mit der Zeit verändern. Ganz allgemein formuliert ergibt sich $X_1(t)$ aus einer Anfangskraft $X_1(0)$ und einem Kraftzuwachs $\Delta X_1(t)$.

$\delta_{ik}(t)$: die Verformungsanteile, die im Beton entstehen, werden durch das Kriechen größer.

a) über die Zeit konstante Verformungsanteile werden mit dem Faktor $(1 + \varphi_t^*)$ vergrößert.

b) im Laufe der Zeit entstehende Verformungszuwächse werden mit dem Faktor $(1 + \rho \cdot \varphi_t^*)$ vergrößert.

Für Gleichung (1) ergibt sich somit:

$$\delta_{1N} + [X_1(0) + \Delta X_1(t)] \cdot \delta_{11}(t) - \varepsilon_s^{(0)}(t) \cdot l = 0$$

$$\delta_{1N} + X_1(0) \cdot \delta_{11}(t) + \Delta X_1(t) \cdot \delta_{11}(t) - \varepsilon_s^{(0)}(t) \cdot l = 0$$

$$\delta_{1N} + X_1(0) \cdot \left[\frac{l}{E_s \cdot A_s} + (1 + \varphi_t^*) \cdot \frac{l}{E_{cm} \cdot A_c} \right] + \Delta X_1(t) \cdot \left[\frac{l}{E_s \cdot A_s} + (1 + \rho \cdot \varphi_t^*) \cdot \frac{l}{E_{cm} \cdot A_c} \right] - \varepsilon_s^{(0)}(t) \cdot l = 0$$

$$\underbrace{\delta_{1N} + X_1(0) \cdot \delta_{11}}_{=0} + X_1(0) \cdot \varphi_t^* \cdot \frac{l}{E_{cm} \cdot A_c} + \Delta X_1(t) \cdot \left[\frac{l}{E_s \cdot A_s} + (1 + \rho \cdot \varphi_t^*) \cdot \frac{l}{E_{cm} \cdot A_c} \right] - \varepsilon_s^{(0)}(t) \cdot l = 0$$

$$\Delta X_1(t) = \Delta N_c(t) = \frac{\overbrace{\varepsilon_c^{(0)}(t)}^{-\varphi_t^* \cdot \frac{N_c(0)}{E_{cm} \cdot A_{cn}}} + \varepsilon_s^{(0)}(t)}{\frac{1}{E_s \cdot A_s} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi_t^*}{E_{cm} \cdot A_{cn}}} \quad X_1(0) = N_c(0)$$

$\frac{1 + \rho \cdot \varphi_t^*}{E_{cm}} = \frac{1}{E_{c,eff}}$

Zw.-Ergebnis:

$$\Delta \sigma_c(t) = \frac{(\varepsilon_c^{(0)}(t) + \varepsilon_s^{(0)}(t)) \cdot E_s \cdot A_s}{A_{cn} + \frac{E_s}{E_{c,eff}} \cdot A_s} \quad A_{ci,eff}$$

$\varepsilon_c^{(0)}(t) + \varepsilon_s^{(0)}(t) = \varepsilon_{cs}^{(0)}$
 $\Delta \sigma_c(t) = \sigma_{c,cs}$

Schwindwerte mit positivem Vorzeichen!

Weitere Umformungen:

$$\sigma_{c,cs} = \varepsilon_{cs}^{(0)} \cdot \frac{E_{c,eff} \cdot A_{cn} + E_s \cdot A_s - E_{c,eff} \cdot A_{cn}}{A_{ci,eff}}$$

$$= \varepsilon_{cs}^{(0)} \cdot E_{c,eff} \cdot \frac{A_{cn} + \frac{E_s}{E_{c,eff}} \cdot A_s - A_{cn}}{A_{ci,eff}} = \varepsilon_{cs}^{(0)} \cdot E_{c,eff} \cdot \left(1 - \frac{A_{cn}}{A_{ci,eff}} \right)$$

zur Erinnerung:

$$N_c^{(0)} = + \left(\underbrace{\varepsilon_c^{(0)}(t) + \varepsilon_s^{(0)}(t)}_{\varepsilon_{cs}^{(0)}} \right) \cdot E_{c,eff} \cdot A_{cn}$$
 ist die nach dem „Lösen“ aufzubringende äußere Kraft auf den Querschnitt_{ideell-eff}

$$\sigma_{c,cs} = \underbrace{\varepsilon_{cs}^{(0)} \cdot E_{c,eff}}_{\text{„Vor“spannung des Betons im fiktiven „Spannbettzustand“}} + \underbrace{\frac{-\varepsilon_{cs}^{(0)} \cdot E_{c,eff} \cdot A_{cn}}{A_{ci,eff}}}_{\text{elast. Spannungsanteil aus „äußerer Gegenkraft“ auf Querschnitt_{ideell-eff}}}$$

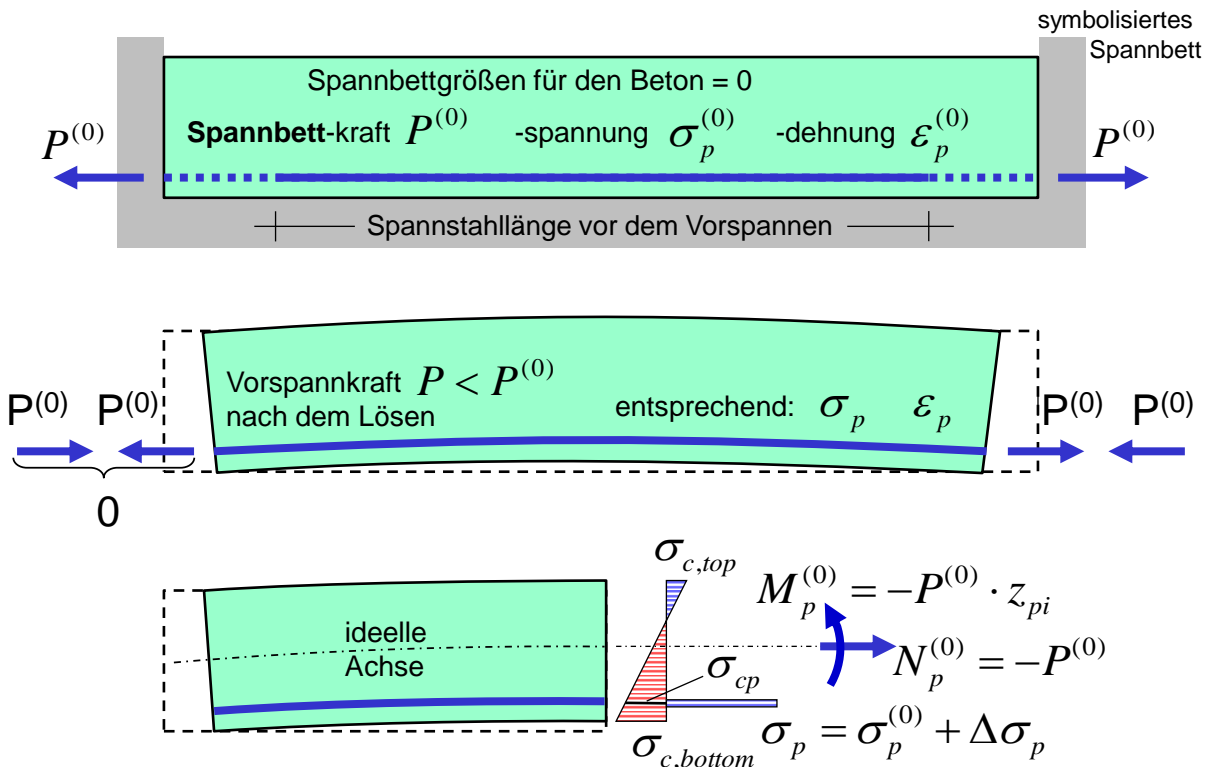
Analogie zum LF zentrische Vorspannung: (im Skript Seite 14)

$$\sigma_p = \underbrace{\varepsilon_p^{(0)} \cdot E_p}_{\sigma_p^{(0)}} + \underbrace{\frac{-\varepsilon_p^{(0)} \cdot E_p \cdot A_p}{A_{ci}} \cdot \frac{E_p}{E_{cm}}}_{\Delta\sigma_p \text{ elastischer Spannungsanteil (-verlust)}}$$

Spannbettspannung = Vorspannung

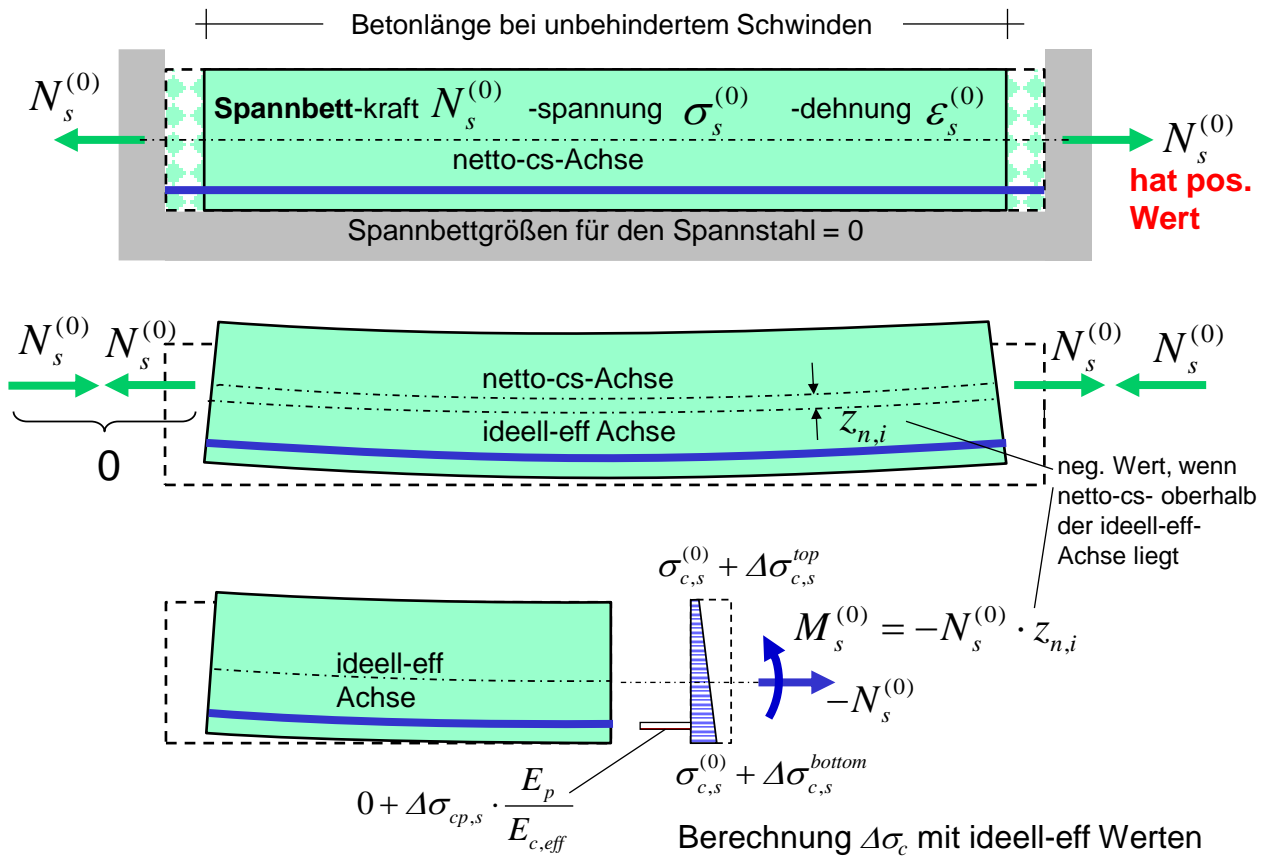
2.7.3 Kriechen und Schwinden für den Biegefall

Bei der Übertragung auf Biegebauteile hilft es, eine Analogie zum Lastfall Vorspannung zu finden. Nochmalige Betrachtung des Lastfalls **Vorspannung**:

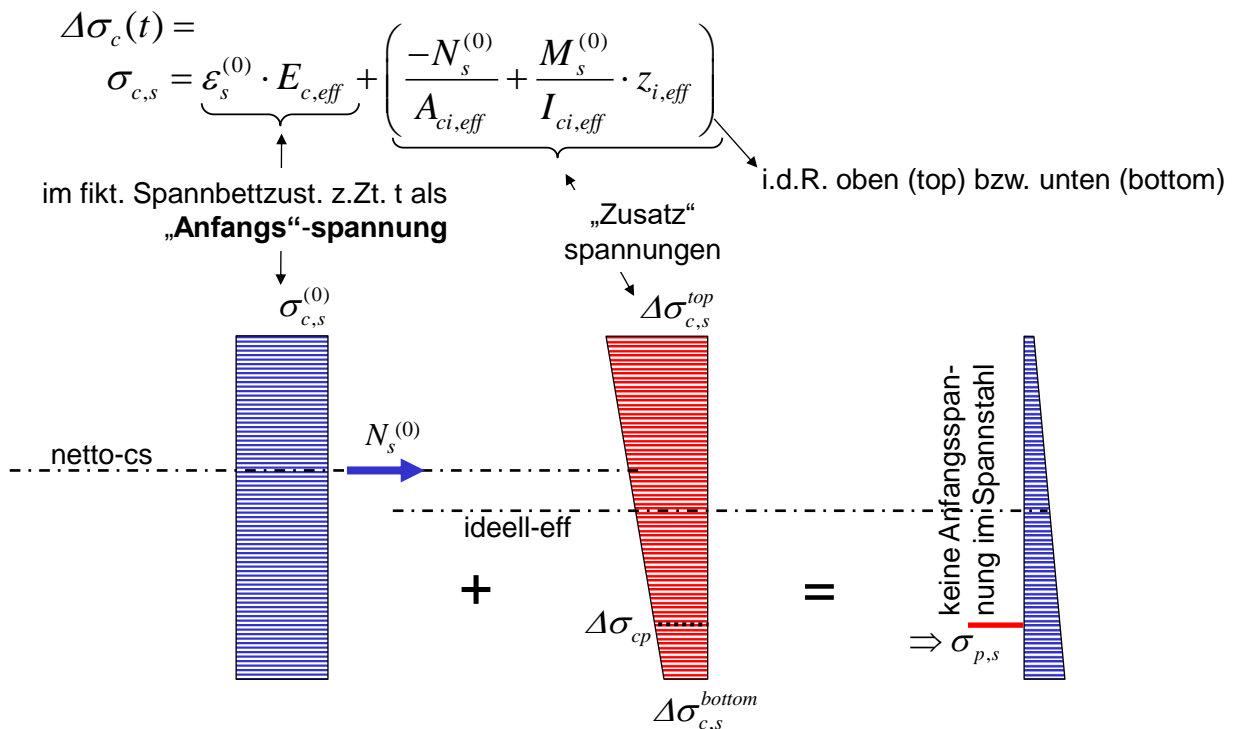


Spannungsberechnung mit ideellen Werten

Betrachtung des Lastfalls **Schwinden**:



Übertragung auf Biegebauteile für **konstantes Schwinden** ($\varepsilon_c^{(0)} = 0$)
 (konstant über die Querschnittshöhe) :



Spannungen in Biegebauteilen für **konstantes Schwinden** allein ($\epsilon_c^{(0)} = 0$)
 (konst. über die Querschnittshöhe) :

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \rho \cdot \varphi_t^*}$$

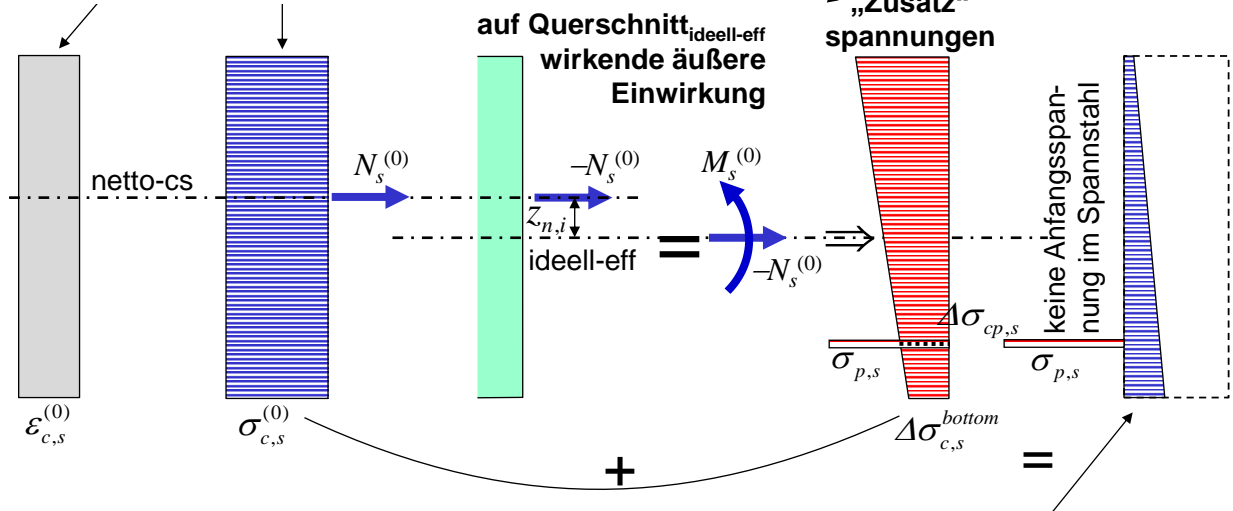
$$N_s^{(0)} = +\epsilon_s^{(0)} \cdot E_{c,eff} \cdot A_{cn}$$

$$M_s^{(0)} = -N_s^{(0)} \cdot z_{n,i}$$

$$\Delta\sigma_c(t) = \underbrace{\epsilon_s^{(0)} \cdot E_{c,eff}}_{\text{im fikt. Spannbetzzust. z.Zt. t als „Anfangs“-dehnung und -spannung}} + \underbrace{\left(\frac{-N_s^{(0)}}{A_{ci,eff}} + \frac{M_s^{(0)}}{I_{ci,eff}} \cdot z_{i,eff} \right)}_{\text{i.d.R. oben (top) bzw. unten (bottom)}}$$

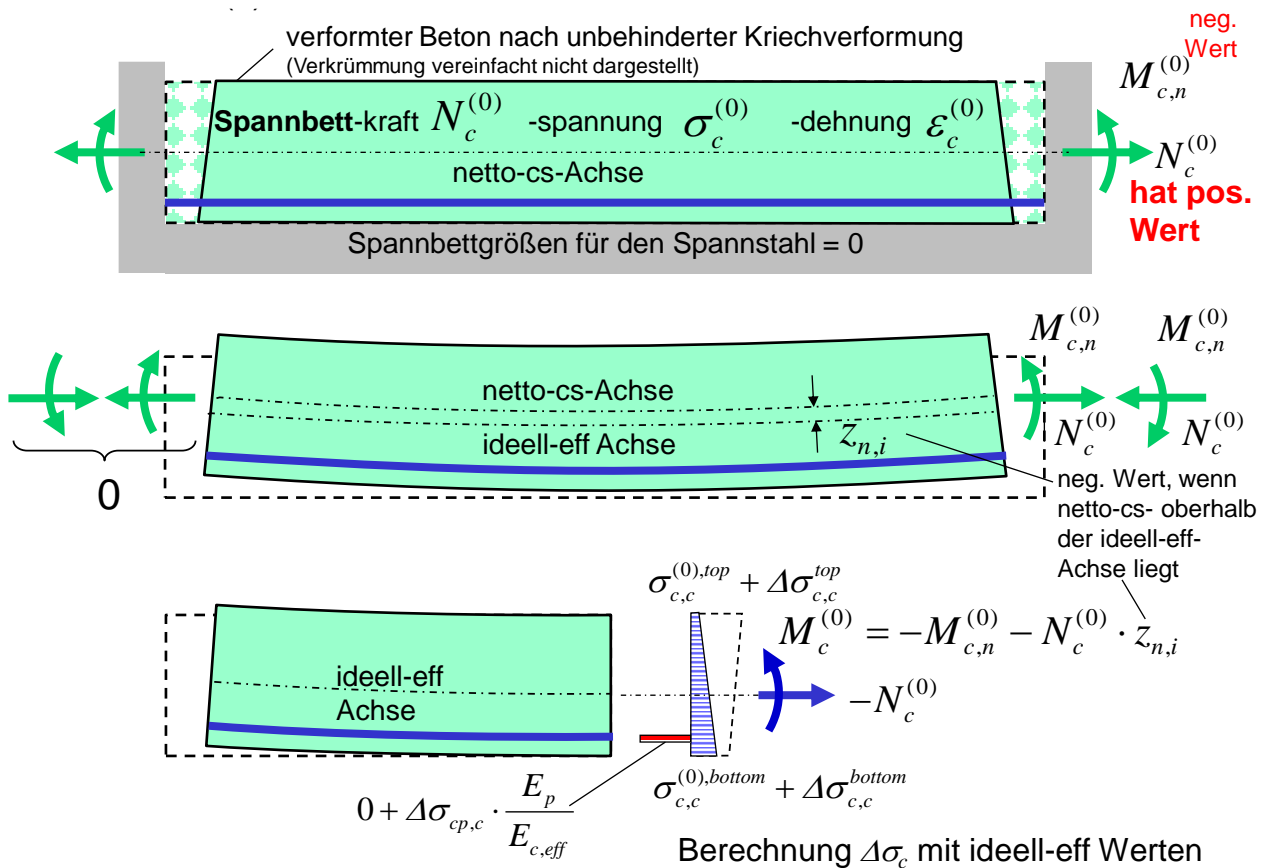
im fikt. Spannbetzzust. z.Zt. t als „Anfangs“-dehnung und -spannung

i.d.R. oben (top) bzw. unten (bottom)

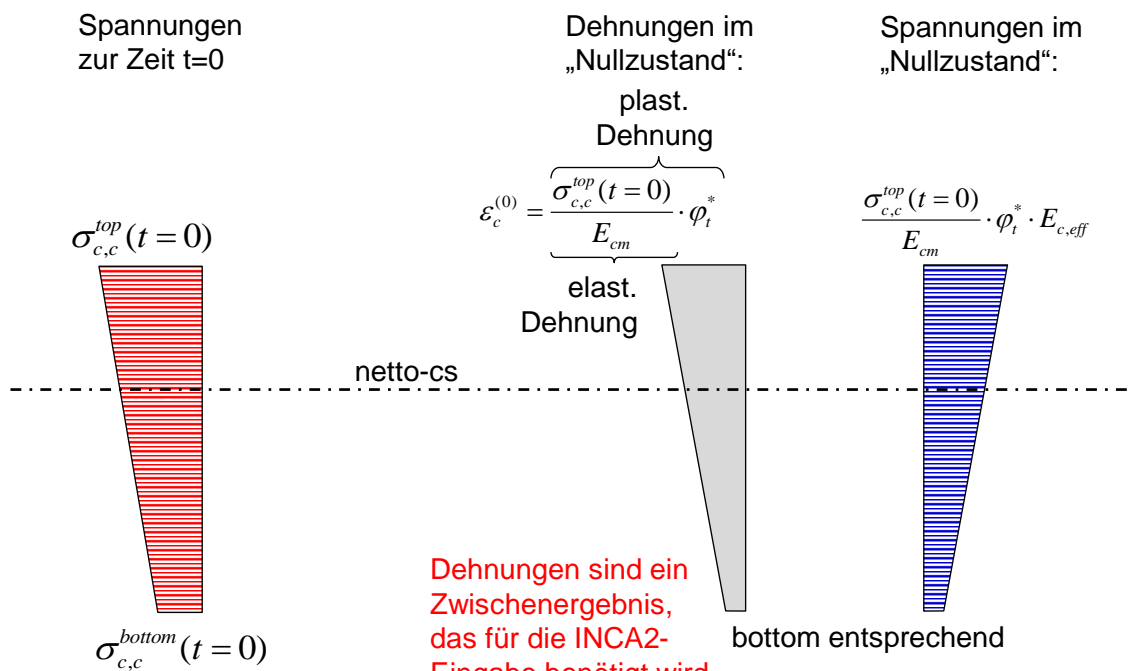


Im Ergebnis: Zugspannung = Druckspannungsverlust im Beton!

Betrachtung des Lastfalls **Kriechen**:



Aus Kriechen infolge kriecherzeugender Dauerlast muss in einer Vorstufe infolge der Anfangsspannung die Kriechverformung ermittelt werden. Diese plastische Verformung/Dehnung ergibt sich aus den φ^* fachen elastischen Größen.



Dehnungen sind ein Zwischenergebnis, das für die INCA2-Eingabe benötigt wird.
 Ausgabe: Spannungen im nächsten Bild rechts unten

Spannungen in Biegebauteilen für kriecherzeugende Dauerlast allein

($\varepsilon_s^{(0)} = 0$):

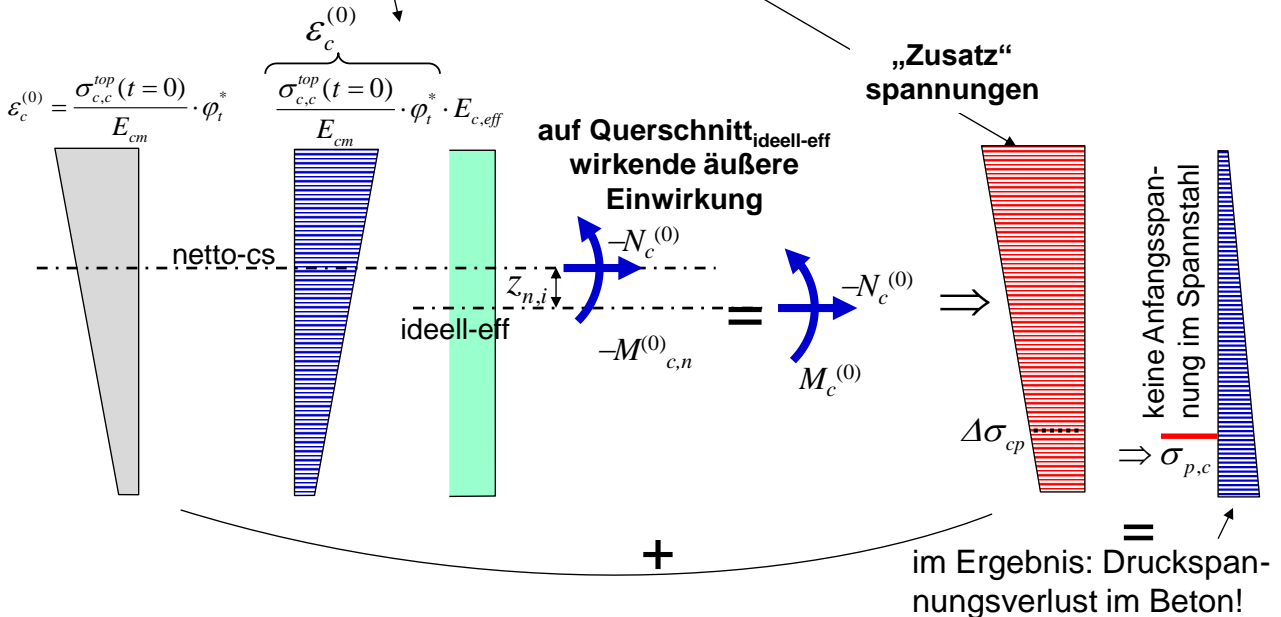
$$\Delta\sigma_c(t) = \sigma_{c,c}(t) = \underbrace{\varepsilon_c^{(0)} \cdot E_{c,eff}}_{\text{Anfangsspannung}} + \underbrace{\left(\frac{-N_c^{(0)}}{A_{ci,eff}} + \frac{M_c^{(0)}}{I_{ci,eff}} \cdot z_{i,eff} \right)}_{\text{„Zusatz“ spannungen}}$$

$$N_c^{(0)} = +\varepsilon_c^{(0)} \cdot E_{c,eff} \cdot A_{cn}$$

$$M_c^{(0)} = -M_{c,n}^{(0)} - N_c^{(0)} \cdot z_{n,i}$$

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \rho \cdot \varphi_t^*}$$

Anfangsspannung im fikt. Sp.b.zust. an einer Stelle z im Querschnitt (i.d. R. oben oder unten)



Die Druckspannungen im Betonstahl sind in den vorherigen Bildern nicht dargestellt! Alle über den Querschnitt aufsummierten Kräfte und Momente aus Beton, Betonstahl und Spannstahl ergeben 0 (Eigenspannungszustand! bei stat. unbest. Systemen können zusätzlich Zwangsschnittgrößen entstehen).

Das zuvor vorgestellte Verfahren gilt so nur unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt während des zeitlichen Ablaufs ungerissen bleibt.

Für gerissene Querschnitte ist eine Superposition der Lastfälle nicht mehr möglich! Es müssen dann alle Wirkungen gleichzeitig berücksichtigt werden. Viele Größen sind dabei von der Druckzonenhöhe x abhängig, so dass sich ein iterativer Prozess ergibt.

2.7.4 Berücksichtigung der Spannstahlrelaxation

Für anfängliche Spannstahlspannungen unterhalb von $0,6 \cdot f_{pk}$ ist das Kriechen bzw. die Relaxation des Spannstahls vernachlässigbar klein. Oberhalb dieser Grenze ist das Verhalten deutlicher spürbar und daher zu berücksichtigen.

Wird der Spannstahl zwischen zwei unverschieblichen Widerlagern vorgespannt, ergibt sich im Laufe der Zeit ein Spannungsverlust. Angaben zum Spannungsverlust sollen der Zulassung für den Spannstahl (nicht der Zulassung des Spannverfahrens) entnommen werden. 500000 Stunden gelten für $t = \infty$.

Dieser Spannungsverlust kann als Lastfall Relaxation wie der Lastfall Vorspannung bei Beachtung des entgegengesetzten Vorzeichens behandelt werden. Da die Relaxation des Spannstahls aufgrund der Kriecheigenschaften des Betons ein zeitlich veränderlicher Prozess ist, der sich näherungsweise

mit gleicher zeitlicher Entwicklung (kriechaffin) verhält, werden bei der Spannungsermittlung auch die ideell-effektiven Querschnittswerte verwendet.

Da neben der Spannstahlrelaxation parallel auch die Lastfälle Kriechen infolge der anfänglichen Druckspannungen und insbesondere Schwinden wirksam sind, fällt der reine Verlust aus der Spannstahlrelaxation geringer aus als im Zulassungsversuch. Daher werden im EC2 pauschal nur 80% von dem mit der Zulassung ermittelten Wert $\Delta\sigma_{pr}$ bzw. $\Delta\varepsilon_{pr}$ in Ansatz gebracht.

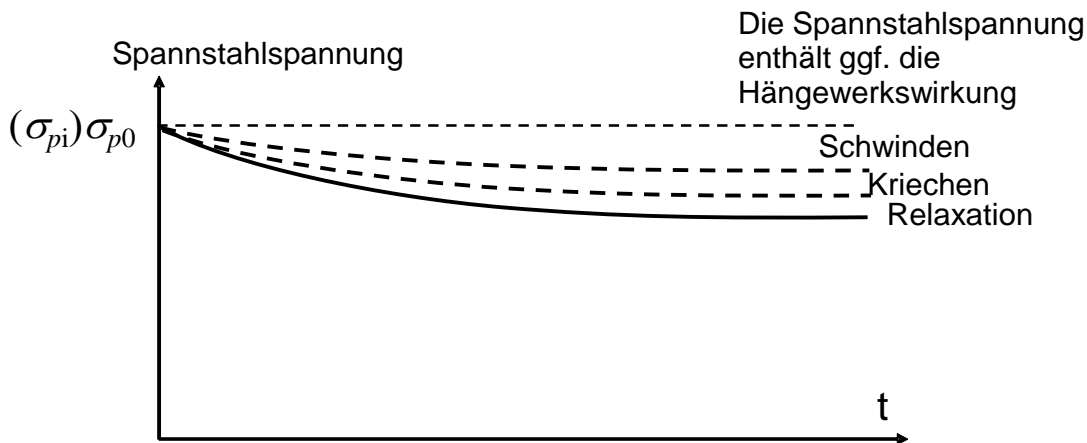


Bild 2-28

2.7.5 Kriechen, Schwinden und Relaxation nach EC2

Vergleich mit der Formel aus dem Eurocode 2, 5.10.6

Die dort angegebene Näherungsformel liefert die exakt gleichen Ergebnisse wie nach dem oberen Verfahren, wenn im oberen Verfahren auch näherungsweise die Betonstahlbewehrung unberücksichtigt bleibt.

Die im EC2 enthaltene Formel stammt aus einer Zeit, in der nur sehr wenig Betonstahl in Spannbetonkonstruktionen verwendet wurde. Aber bei den heutigen Betonstahlmengen kann diese nicht vernachlässigt werden.

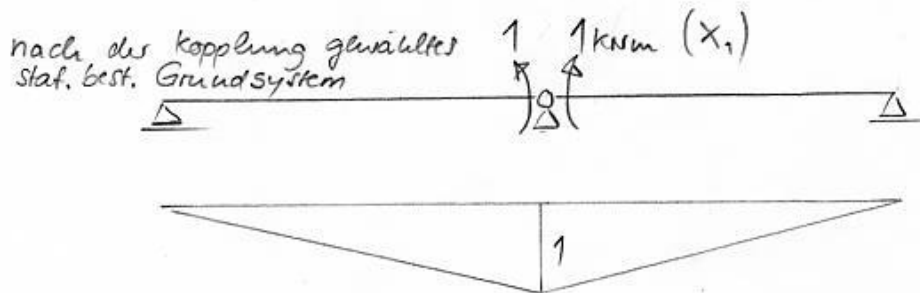
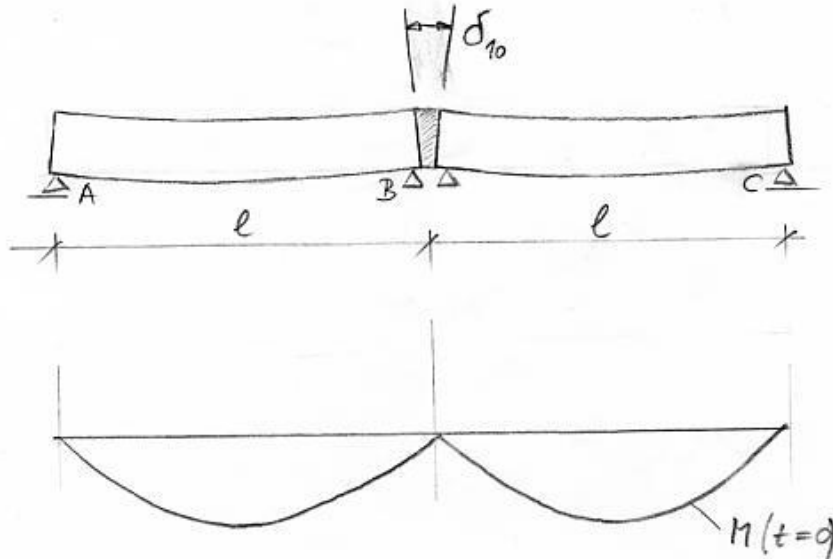
Ein weiterer großer Nachteil der EC2-Formel ist, dass Sie nur bei einsträngiger und nicht bei mehrsträngiger Vorspannung angewendet werden kann!

Nicht gelungen ist auch die Vorzeichendefinition im EC2!

Die mit der EC2-Formel berechneten prozentualen Verluste der Spannstahlspannung werden entsprechend auch für die Betonspannungen übernommen. Die prozentualen Verluste im Beton sind aber bei Berücksichtigung des Betonstahls und anderer Spannstränge an jeder Stelle unterschiedlich und für den Nachweis der Dekompression am Betonrand meist größer als für den Spannstahl!

2.7.6 Kriechen und Schwinden bei statisch unbestimmten Systemen mit Systemumlagerungen

Beispiel 1: 2 Fertigkeiträger werden nach der Montage kraftschlüssig zu einem Zweifeldträger gekoppelt.



Kontinuität:

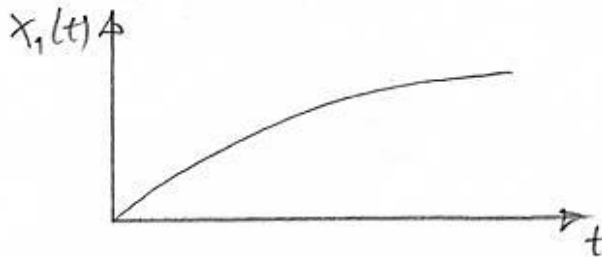
$$\delta_{10}(t) + X_1(t) \cdot \delta_{11}(t) = 0$$

$\delta_{10}(t)$: Der Winkelsprung am stat. best. Grundsystem ist $= 0$
Im Laufe der Zeit entsteht ein Winkelsprung

Infolge der Biegebeanspruchung des verlegten FT-Träger vergrößert sich die anfängliche Durchbiegung und damit der Winkelsprung vor dem Verguß durch das Kriechen

$$\delta_{10}(t) = \delta_{10} \cdot (1 + \varphi) - \delta_{10} = \delta_{10} \cdot \varphi$$

$X_1(t)$: z. Zt $t=0$ ist $X_1(t)=0$; durch Kriechen baut sich im Laufe der Zeit ein Stützmoment auf



$\delta_{11}(t)$: enthält nur Beton-Verformungsanteile

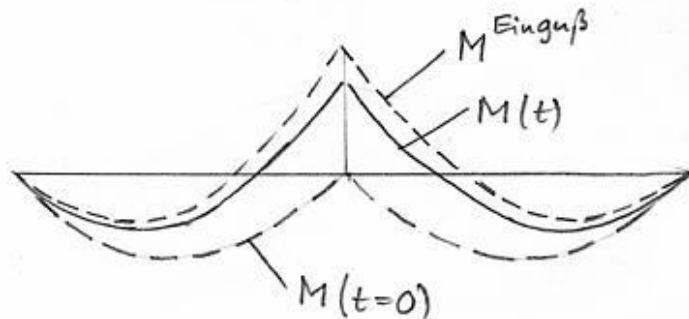
$$\delta_{11}(t) = \delta_{11} \cdot (1 + \beta \cdot \varphi)$$

$$\Rightarrow \delta_{10} \cdot \varphi + X_1(t) \cdot \delta_{11} \cdot (1 + \beta \cdot \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow X_1(t) = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \cdot \frac{\varphi}{1 + \beta \cdot \varphi}$$

Stützmoment, daß sich bei der "Herstellung aus einem Guß" ergeben hätte.

Ergebnis: je kriechfähiger der Beton, desto stärker wird die Momentenlinie des "Eingußzustandes" angestrebt.

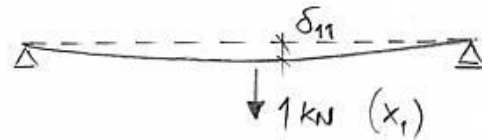
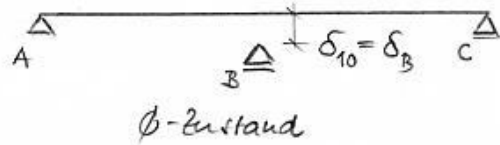
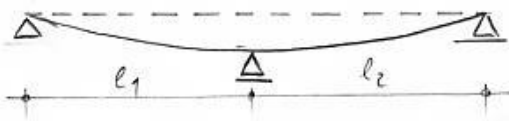


Zahlenbeispiel:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 2,5 \\ \beta = 0,8 \end{array} \right\} \Rightarrow M_B = M_B^E \cdot \frac{2,5}{1 + 0,8 \cdot 2,5} = 0,83 \cdot M_B^E$$

Das Moment erreicht 83% des "Einguß-Momentes"

Beispiel 2: Effekt der plötzlichen Stützensenkung



1-Zustand

(Verformung δ_{11} ist positiv, Verformung von δ_B entgegen, \Rightarrow negativ!)

Zustand z.Zt $t=0$:

$$\delta_B + X_1(0) \cdot \delta_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1(0) = - \frac{\delta_B}{\delta_{11}}$$

Zustand z.Zt t :

$$\delta_B(t) + X_1(t) \cdot \delta_{11}(t) = 0$$

$\delta_B(t)$: Die Stützensenkung soll konstant über die Zeit sein. Durch eine Reduzierung von $X_1(t)$ entsteht keine Rückverformung. $\delta_B(t) = \delta_B$. Im 0-Zustand hat das Kriechen keine Auswirkungen auf δ_B .

$X_1(t)$: setzt sich zusammen aus einer Anfangskraft $X_1(0)$ und einem Kraftzuwachs $\Delta X_1(t)$. (Kraftverluste ergeben sich automatisch durch negatives Vorzeichen)

$\delta_{11}(t)$: enthält nur Verformungsanteile von Betonbauteilen mit gleichen Kriecheneigenschaften.

$$\begin{aligned} \delta_{11}(t) &= \delta_{11} \cdot (1 + \varphi) \quad \text{für Anfangskräfte} \\ &= \delta_{11} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \quad \text{für Kraftzuwächte} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta_B + X_1(0) \cdot \delta_{11} \cdot (1 + \varphi) + \Delta X_1(t) \cdot \delta_{11} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = 0$$

$$\underbrace{\delta_B + X_1(0) \cdot \delta_{11}}_{=0 \text{ (s.o.)}} + X_1(0) \cdot \delta_{11} \cdot \varphi + \Delta X_1(t) \cdot \delta_{11} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta X_1(t) = -X_1(0) \cdot \frac{\varphi}{1 + \rho \cdot \varphi}$$

$$\text{und } X_1(t) = X_1(0) \cdot \left[1 - \frac{\varphi}{1 + \rho \cdot \varphi} \right]$$

Die durch die Stützen senkung entstandene Lagerkraft wird durch das Kriechen erheblich abgebaut. In gleichem Maße wird das entstandene Zwangsmoment abgebaut.

Zahlenbeispiel:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 2,5 \\ \rho = 0,8 \end{array} \right\} \Rightarrow X_1(t) = X_1(0) \cdot \left[1 - \frac{2,5}{1 + 0,8 \cdot 2,5} \right] = 0,17 \cdot X_1(0)$$

Die Lagerkraft und die Zwangsschnittgrößen werden auf 17% der Anfangswerte abgebaut.

Beispiel 3: Effekt der langsamen Stützensenkung

Herleitung analog zur plötzlichen Stützensenkung

Der von der Zeit abhängige Ansatz von $\sigma_B(t)$ wird kriechaffin gewählt:

$$\sigma_B(t) = \sigma_B \cdot \frac{\varphi(t)}{\varphi_\infty} \quad \text{kurz: } \sigma_B \cdot \frac{\varphi}{\varphi_\infty}$$

Eine Anfangskraft $X_1(0)$ ist nicht vorhanden, damit ergibt sich die Kontinuitätsgleichung:

$$\sigma_B \cdot \frac{\varphi}{\varphi_\infty} + X_1(t) \cdot \sigma_{11} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow X_1(t) = - \frac{\sigma_B}{\sigma_{11}} \cdot \frac{\varphi}{\varphi_\infty (1 + \rho \cdot \varphi)}$$

σ_B ist bei einer Stützensenkung negativ einzusetzen, daher ergibt sich eine Zugkraft im Lager.

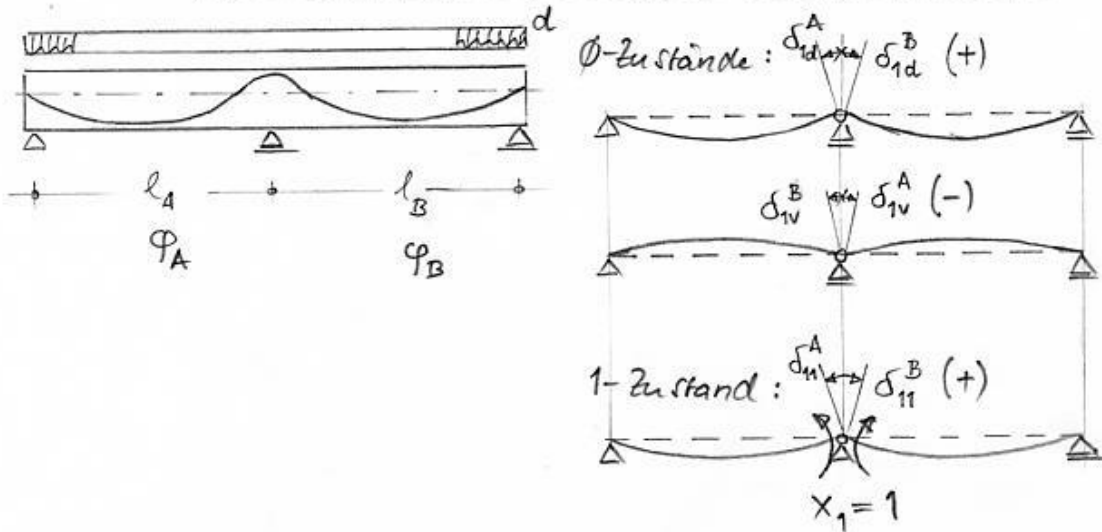
Lagerkraft, die sich ergeben würde, wenn der Beton nicht kriechfähig wäre (oder auch: Anfangswert einer plötzlichen Stützensenkung).

Zahlenbeispiel:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \varphi_\infty = 2,5 \\ \rho = 0,8 \end{array} \right\} \Rightarrow X_1(t) = - \frac{\sigma_B}{\sigma_{11}} \cdot \frac{2,5}{2,5 \cdot (1 + 0,8 \cdot 2,5)} = -0,33 \cdot \frac{\sigma_B}{\sigma_{11}}$$

Lagerkraft baut sich langsam auf 33% des Wertes auf, der bei nicht kriechfähigem Material entstanden wäre.

Beispiel 4: vorgespannter Träger unter Dauerlast mit
 feldweise unterschiedlichen Kriech Eigenschaften



Zustand z. Zt. $t=0$:

$$\delta_{1v}^{A+B} + \delta_{1d}^{A+B} + X_1(0) \cdot \delta_{11}^{A+B} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1(0) = - \frac{\delta_{1v}^{A+B} + \delta_{1d}^{A+B}}{\delta_{11}^{A+B}}$$

Zustand z. Zt. t :

$$\delta_{1v}(t) + \delta_{1d}(t) + X_1(t) \cdot \delta_{11}(t) = 0$$

$\delta_{1v}(t)$: Zur Anfangsverformung addiert sich die Kriechverformung $\delta_{1v}(t) = \delta_{1v}^A \cdot (1 + \varphi_A) + \delta_{1v}^B \cdot (1 + \varphi_B)$

$\delta_{1d}(t)$: ebenso: $\delta_{1d}(t) = \delta_{1d}^A \cdot (1 + \varphi_A) + \delta_{1d}^B \cdot (1 + \varphi_B)$

$X_1(t)$: setzt sich aus Anfangswertgröße $X_1(0)$ und dem Zuwachs $\Delta X_1(t)$ zusammen.

$\delta_{11}(t)$: enthält nur Verformungsanteile von Betonbauteilen (Vorstahl vernachlässigbar):

$$\begin{aligned} \delta_{11}(t) &= \delta_{11}^A \cdot (1 + \varphi_A) + \delta_{11}^B \cdot (1 + \varphi_B) \\ &= \delta_{11}^A \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_A) + \delta_{11}^B \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_B) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\sigma_{1v}^A + \sigma_{1d}^A) \cdot (1 + \varphi_A) + (\sigma_{1v}^B + \sigma_{1d}^B) \cdot (1 + \varphi_B) + X_1(0) \cdot \sigma_{11}^A \cdot (1 + \varphi_A) + X_1(0) \cdot \sigma_{11}^B \cdot (1 + \varphi_B) \\ + \Delta X_1(t) \cdot \sigma_{11}^A \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_A) + \Delta X_1(t) \cdot \sigma_{11}^B \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_B) = 0$$

$$\underbrace{\sigma_{1v}^{A+B} + \sigma_{1d}^{A+B} + X_1(0) \cdot \sigma_{11}^{A+B}}_{= 0 \text{ (s.o.)}} + (\sigma_{1v}^A + \sigma_{1d}^A) \cdot \varphi_A + (\sigma_{1v}^B + \sigma_{1d}^B) \cdot \varphi_B + X_1(0) \cdot (\sigma_{11}^A \cdot \varphi_A + \sigma_{11}^B \cdot \varphi_B) \\ + \Delta X_1(t) \cdot \dots = 0$$

$$\Rightarrow \Delta X_1(t) = - \frac{(\sigma_{1v}^A + \sigma_{1d}^A) \cdot \varphi_A + (\sigma_{1v}^B + \sigma_{1d}^B) \cdot \varphi_B + X_1(0) \cdot (\sigma_{11}^A \cdot \varphi_A + \sigma_{11}^B \cdot \varphi_B)}{\sigma_{11}^A \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_A) + \sigma_{11}^B \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_B)}$$

für $\varphi_A = \varphi_B = \varphi$:

$$\Delta X_1(t) = - \frac{(\sigma_{1v}^{A+B} + \sigma_{1d}^{A+B} + X_1(0) \cdot \sigma_{11}^{A+B}) \cdot \varphi}{\sigma_{11}^{A+B} (1 + \rho \cdot \varphi)}$$

()-Ausdruck im Zähler = 0 (siehe Zeitpkt. $t=0$)

$$\Rightarrow \Delta X_1(t) = 0 \quad \text{für den Sonderfall } \varphi_A = \varphi_B = \varphi$$

Das Ergebnis bestätigt, daß durch Kriechen bei stat. unbest. Systemen mit gleichen Kriech Eigenschaften keine weiteren Umlagerungsschnittgrößen entstehen. Das Stützmoment aus dem Lastfall Vorspannung ändert sich nur durch Spannkraftverluste infolge von Kriechen und Schwinden.

3 Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit

Neben dem Grenzzustand der Tragfähigkeit ist auch der Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit zu untersuchen, entsprechende Grenzwerte sind einzuhalten.

Die Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit umfassen

- den Nachweis der Dekompression: DIN 1045-1, Abschnitt 11.2; EC2, 7.3.1(5)
- Spannungsbegrenzungen: DIN 1045-1, Abschnitt 11.1, EC2, 7.2
- Beschränkungen der Rissbreite: DIN 1045-1, Abschnitt 11.2, EC2, 7.3
- Beschränkungen von Verformungen: DIN 1045-1, Abschnitt 11.3, EC2, 7.4

damit einzelne Bauteile bzw. das Bauwerk als Ganzes während der geforderten Nutzungsdauer gebrauchstauglich sind und bleiben.

Mögliche Idealisierungen und zu beachtende Randbedingungen im GZG sind:

- Annahme linearer Werkstoffgesetze
- Teilsicherheitsbeiwerte auf der Einwirkungs- und Materialseite generell 1,0
- Berechnung i. d. R. im gerissenen Zustand II
- Beachtung der maßgebenden Zeitpunkte ($t=0$ oder $t=\infty$)
- ggf. die Mitwirkung des Betons in der Zugzone berücksichtigen
- keine Nachweise für Querkräfte erforderlich

Es müssen bestimmte Bemessungswerte einer Bauteileigenschaft als Grenzwerte C_d der Spannung, der Verformung oder der Rissbreite unter einer definierten Bemessungssituation der Beanspruchung E_d nachgewiesen werden:

$$E_d \leq C_d$$

Die Teilsicherheitsbeiwerte sind mit 1,0 anzunehmen. Eine Ausnahme bildet die Vorspannung, für alle Nachweise der Gebrauchstauglichkeit mit Ausnahme des Nachweises der Spannstahlspannungen und der Betondruckspannungen muss jeweils ungünstig ein oberer $P_{k,sup} = P_m \cdot r_{sup}$ oder unterer charakteristischer Wert für die Vorspannung $P_{k,inf} = P_m \cdot r_{inf}$ berücksichtigt werden. Angaben hierzu finden sich in DIN 1045-1, Abschnitt 8.7.4 bzw. EC2, Abschnitt 5.10.9. Für Vorspannung mit nachträglichem Verbund (bzw. ohne oder mit sofortigem Verbund) gilt: $r_{sup} = 1,1$ (1,05) und $r_{inf} = 0,9$ (0,95).

Im GZG befinden sich Stahl und Beton noch im elastischen Bereich, so dass lineare Werkstoffgesetze verwendet werden können. Für gerissenen Beton gilt dies allerdings nur im Druckbereich. Zeitliche Einflüsse aus Kriechen, Schwinden und Spannstahlrelaxation auf die Nachweise im GZG müssen berücksichtigt werden.

Sofern nicht nachgewiesen werden kann, dass ein Bauteil oder Bauteilbereiche ungerissen bleiben, sind die Nachweise im GZG unter Berücksichtigung des gerissenen Zustandes II zu führen (siehe hierzu Abschnitt 0).

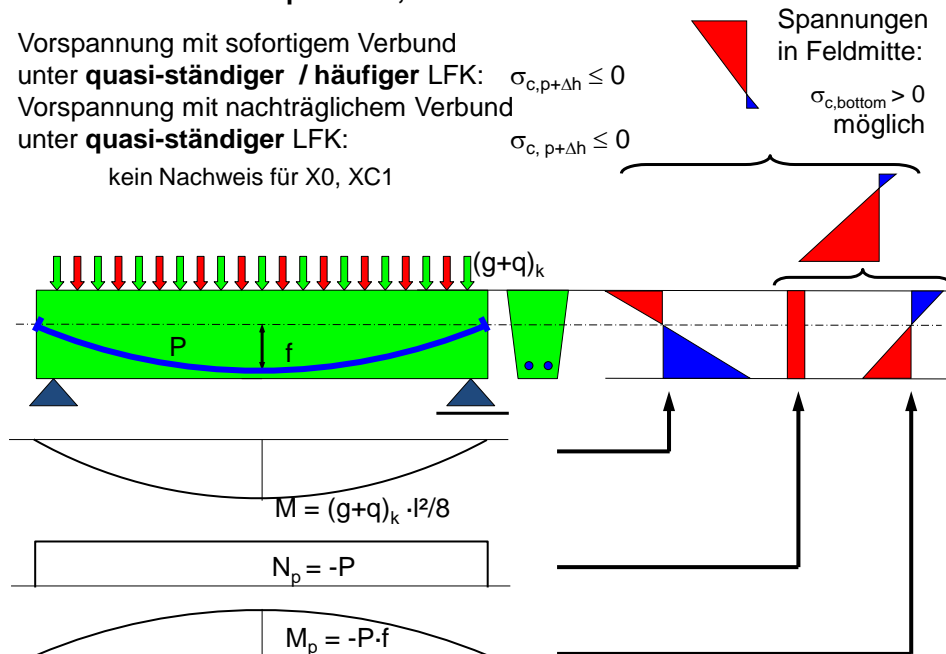
Insbesondere die Nachweise der Beton- und Spannstahlspannungen können im ungerissenen Zustand I sehr einfach mit linearen Werkstoffgesetzen im Druck- und Zugbereich vorgenommen werden. Sofern hiervon Gebrauch gemacht wird, ist die Vorspannung so groß zu wählen, dass der Zustand I eingehalten ist.

3.1 Nachweis der Dekompression

Nach EC2 wird gefordert, dass der Querschnittsbereich um die Spannglieder unter Beachtung einer zusätzlichen Sicherheitszone Δh überdrückt ist.

Nachweis der Dekompression, EC2 + NA

Vorspannung mit sofortigem Verbund
unter **quasi-ständiger / häufiger** LFK: $\sigma_{c,p+\Delta h} \leq 0$
Vorspannung mit nachträglichem Verbund
unter **quasi-ständiger** LFK: $\sigma_{c,p+\Delta h} \leq 0$
kein Nachweis für X0, XC1



EC2, Tabelle 7.1DE beachten

Für die Einhaltung des Grenzzustandes der Dekompression ist nachzuweisen, dass der Betonquerschnitt um das Spannglied im Bereich von 100mm oder von 1/10 der Querschnittshöhe unter Druckspannungen steht. Die Spannungen sind im Zustand II nachzuweisen.

Aus rechentechnischer Sicht ist es sinnvoll, dass der Querschnitt mindestens unter kriecherzeugender (quasi-ständiger) Beanspruchung vollständig überdrückt bleibt und eine Berechnung im Zustand I möglich wird.

Für die Einwirkungskombinationen wird auf Abschnitt 3.3 verwiesen.

Sofern der Nachweis der Dekompression zu führen ist, wird er für die mindestens erforderliche Vorspannkraft bestimmend. Daher wird in der Vorbemessung die erforderliche Vorspannkraft über den Nachweis der Dekompression ermittelt. Zur Berechnung der „exakten“ Spannungen aus der äußeren Beanspruchung einerseits und der Vorspannung andererseits können gemäß dem Abschnitt Grundlagen die ideellen Querschnittswerte verwendet werden. Speziell für den Nachweis der Dekompression ergibt sich bei einer näherungsweisen Berechnung der Spannungen mit Bruttoquerschnittswerten ein nahezu identisches Ergebnis für die erforderliche Spannbettkraft.

Das bedeutet, dass die Spannbettkraft in sehr guter Näherung auch mit den Beton-Bruttoquerschnittswerten ermittelt werden kann. Dies ist besonders hilfreich bei der **Vorbemessung**, da in dieser Phase die Spannstaahlmenge A_p noch nicht bekannt ist.

3.2 Grundlagen der Berechnung im Gebrauchszustand

3.2.1 Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen

Das Kraft-Dehnungsverhalten eines Stahlbetonzugstabes ist schematisch in Bild 3-1 dargestellt.

Man erkennt vier Bereiche der Kraft-Dehnungs-Linie (durchgezogene Linie):

- Den ungerissenen Bereich mit großer Anfangssteifigkeit, der sich nur vor der Rissbildung einstellt. Den Bereich der Rissbildungsphase, auch Phase der Erstrissbildung genannt. Je nach Versuchsdurchführung stellt sich entweder ein stufenförmiger Anstieg (Versuch ist kraftgesteuert) oder ein sägezahnartiger Verlauf (Versuch ist verformungsgesteuert) ein. Im Bild 3-1 ist nur ein idealisierter, leicht ansteigender Verlauf dargestellt. Der Verlauf kann näherungsweise auch horizontal angenommen werden. In der Rissbildungsphase führt eine Entlastung auf direktem Weg zum Ursprung zurück.
- Den Bereich der abgeschlossenen Rissbildung, der hier parallel zur Linie des nackten Stahls verläuft. Die Linie des nackten Stahls erhält man, wenn entweder der Stahl ohne Beton gezogen wird, oder wenn die Verbundwirkung zwischen Beton und Stahl nicht vorhanden ist. In Wirklichkeit verläuft die Linienabschnitt der abgeschlossenen Rissbildung nicht parallel zur Linie des nackten Stahls, weil sich in geringem Umfang doch weitere Risse bilden. Dieser Bereich wird daher manchmal auch als Bereich der sukzessiven, also fortschreitenden Rissbildung bezeichnet.
- Im Bereich oberhalb der Streckgrenze ergibt sich bis zum Bruch ein leichter Anstieg der Kraft bei gleichzeitig großen Dehnungen.

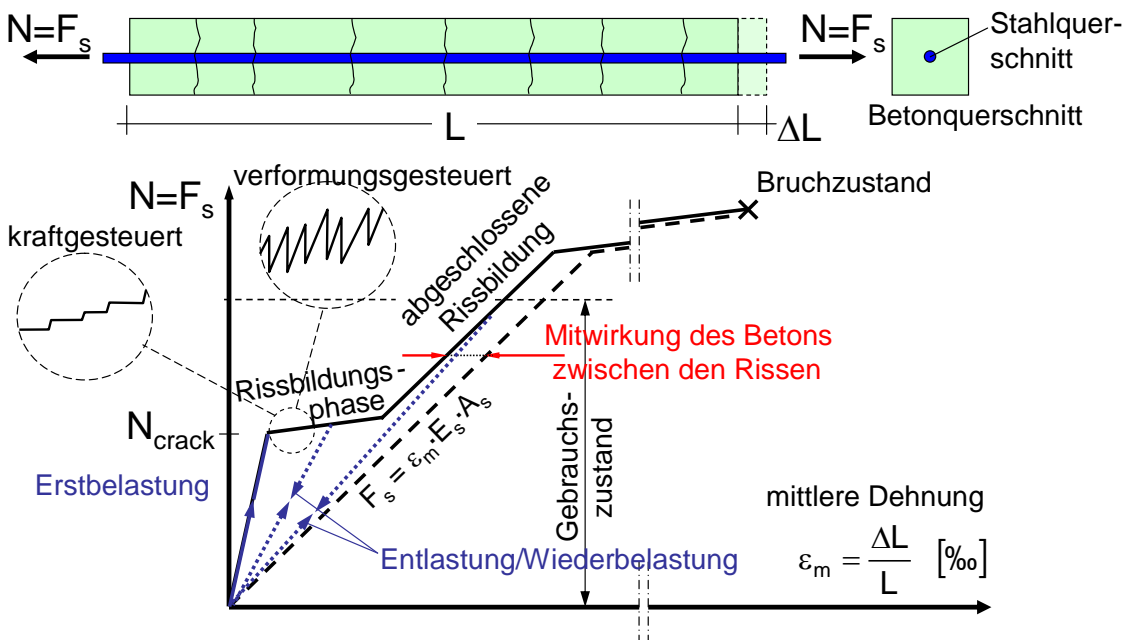


Bild 3-1 Verformungsverhalten (Arbeitslinie) eines Stahlbetonzugstabes

Bei einer Entlastung des Bauteils wandert der Messpunkt auf einer Ursprungsgeraden zurück. Bei einer anschließenden Wiederbelastung wird diese Gerade in umgekehrter Richtung durchlaufen bis das zuvor erreichte Belastungsniveau wieder erreicht wird.

Das Verformungsverhalten eines Biegebauteils unterteilt sich in die gleichen Phasen. Abgebildet wird das Momenten-Krümmungsverhalten. Auch das Verhalten bei Entlastung/Wiederbelastung ist analog zum Zugstab.

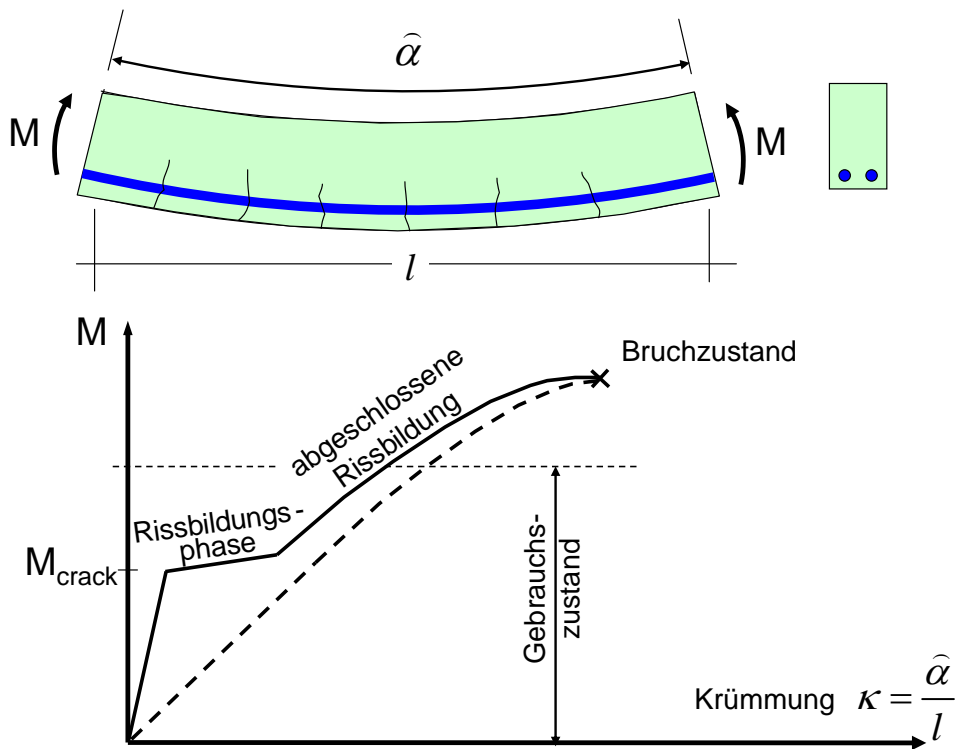


Bild 3-2 Verformungsverhalten (Arbeitslinie) eines Stahlbetonbalkens

Die Dehnungen von Stahl und Beton im Inneren eines Bauteils von Bild 3-1 sind in Bild 3-3 exemplarisch für den Zugstab gezeigt, einmal am Ende der Rissbildungsphase und einmal in der Phase der abgeschlossenen Rissbildung. In diesem Bild kann auch die Mitwirkung des Betons in der Zugzone als Dehnungsdifferenz abgelesen werden.

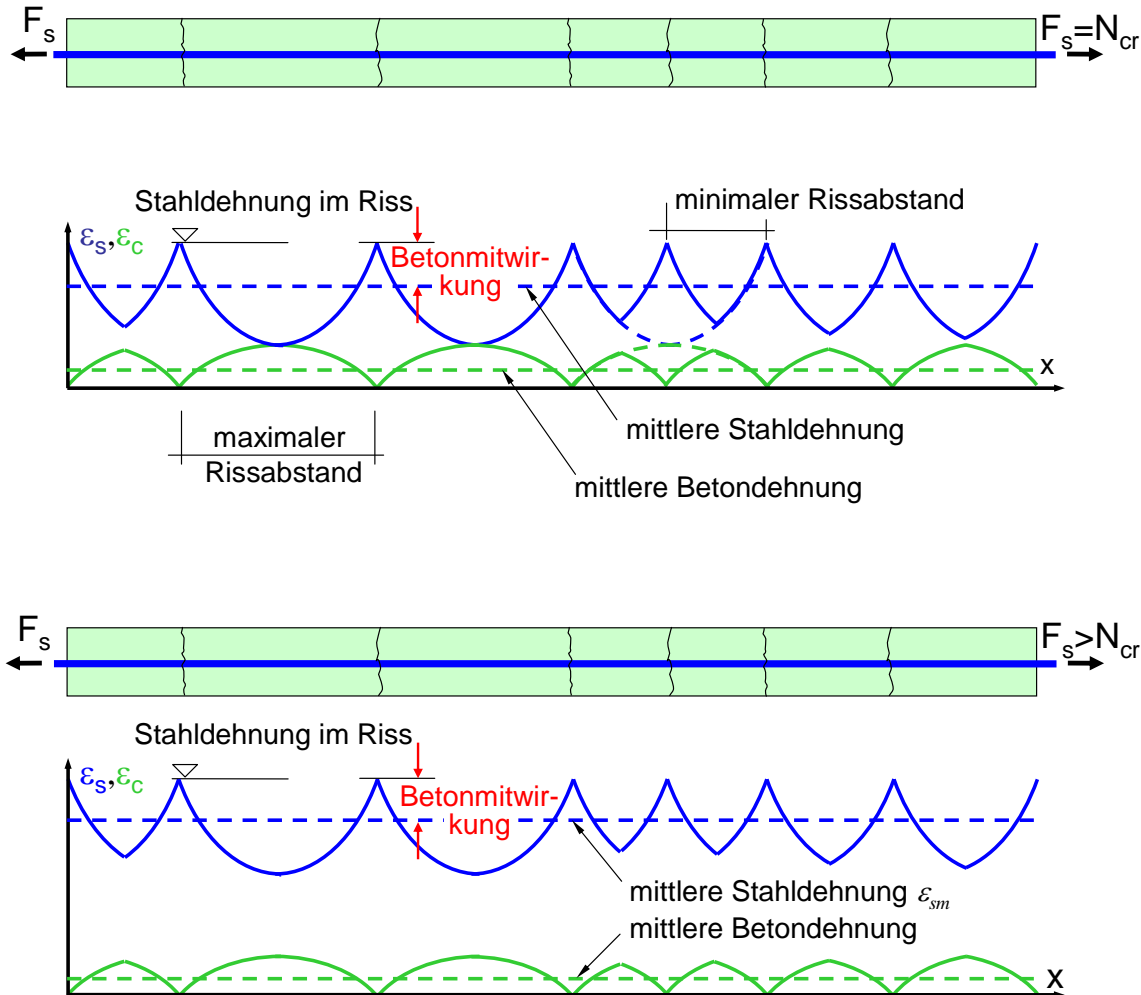


Bild 3-3 Dehnungen von Stahl und Beton im Inneren eines Stahlbetonzugstabes am Ende der Rissbildung und in der Phase der abgeschlossenen Rissbildung

3.2.2 Ermittlung der Risschnittgrößen

Die Rissnormalkraft $N_{cr(ack)}$ bei einer Zugbeanspruchung oder das Rissmoment M_{cr} bei einer Biegebeanspruchung sind charakteristische Parameter beim Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen. Diese Risschnittgrößen ergeben sich, wenn die Zugspannungen im Zustand I gerade die Zugfestigkeit des Betons erreichen:

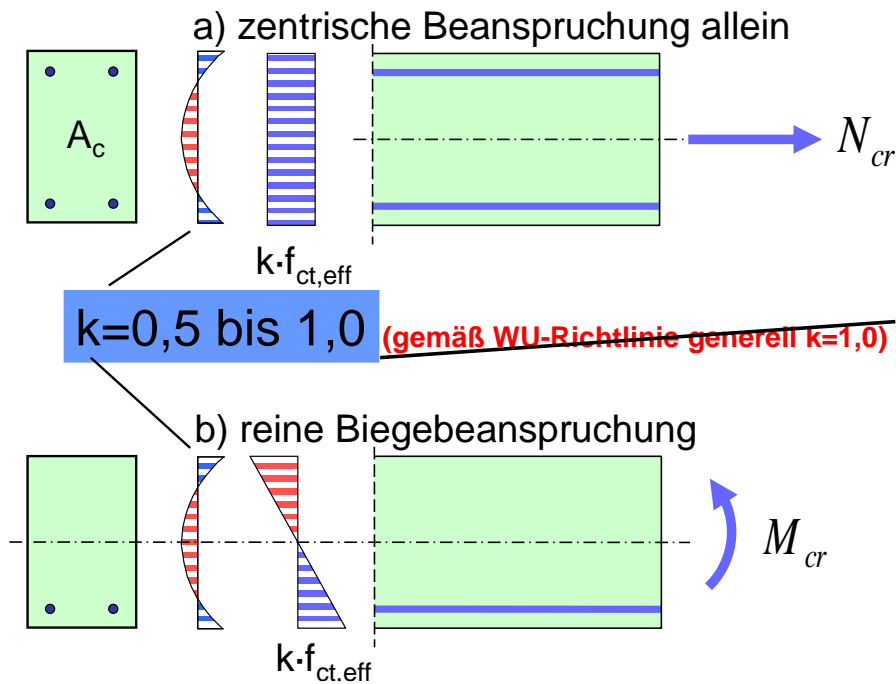


Bild 3-4 Risschnittgrößen für Normalkraft oder Biegung allein

bei reiner zentrischer Beanspruchung ergibt sich aus dem Gleichgewicht die Rissnormalkraft:

$$N_{cr} = k \cdot f_{ct,eff} \cdot A_c \quad (3-1)$$

bei reiner Biegebeanspruchung ergibt sich entsprechend das Rissmoment:

$$M_{cr} = k \cdot f_{ct,eff} \cdot W_c \quad (3-2)$$

dabei sind:

$f_{ct,eff}$ zum Beanspruchungszeitpunkt maßgebende Zugfestigkeit des Betons, siehe Abschnitt 3.2.3

k Abminderungsfaktor für die Zugfestigkeit des Beton infolge möglicher Eigenspannungen, siehe Abschnitt 3.3.3

A_c, W_c Querschnittswerte des Betons vor der Rissbildung

Bei einer Kombination aus Biegung und Normalkraft können die Risschnittgrößen nicht ohne Kenntnis der Belastungsreihenfolge ermittelt werden (Bild 3-5) Alle möglichen Kombinationen aus M_{cr} und N_{cr} liegen auf einer Geraden. Wenn die Belastungsreihenfolge nicht eindeutig festliegt, muss wie immer in solchen Fällen eine Abschätzung auf der sicheren Seite erfolgen.

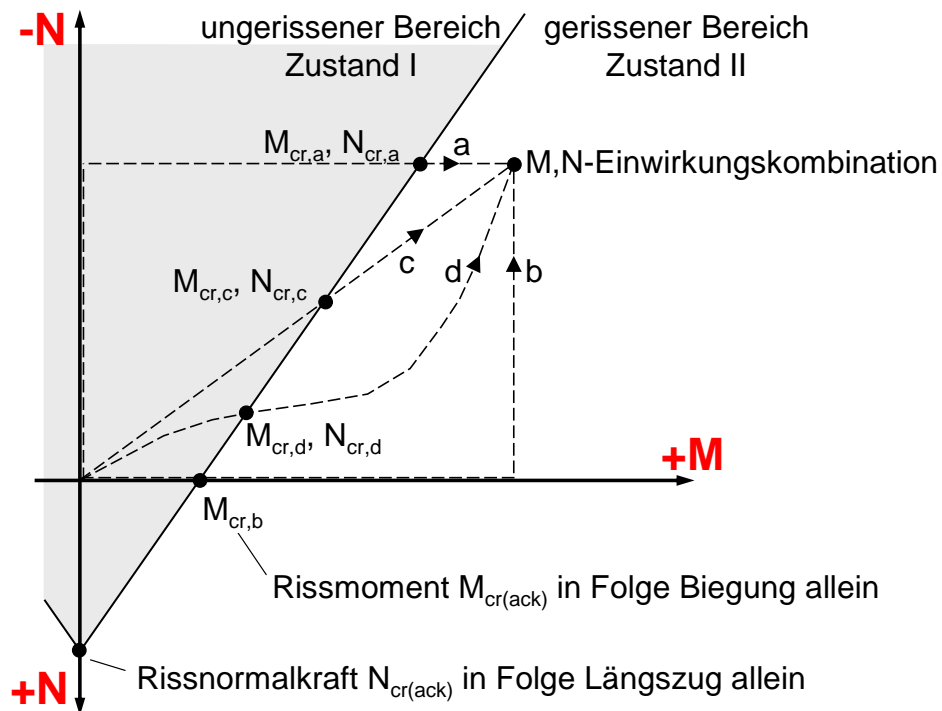


Bild 3-5 Risschnittgrößen bei einer Kombination aus Biegung und Normalkraft
 Lastpfad a: zunächst zentrische Beanspruchung, anschließend steigende Biegebeanspruchung
 Lastpfad b: zunächst Biegebeanspruchung, anschließend steigende zentrische Beanspruchung
 Lastpfad c: gleichmäßiges Anwachsen von zentrischer Beanspruchung und Biegebeanspruchung
 Lastpfad d: beliebige Steigerung von zentrischer Beanspruchung und Biegebeanspruchung

3.2.3 Ermittlung der Betonzugfestigkeit

Tabelle 3-1 28-Tage-Betonzugfestigkeiten für Normalbeton (siehe DIN 1045-1, Tabelle 9 bzw. EC2, Tab. 3.1)

Festigkeitsklasse C für Normalbeton [MN/m ²]															
f_{ck}	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100
$f_{ck,cube}$	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	115
f_{cm}	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	108
f_{ctm}	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2
$f_{ctk;0,05}$	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7
$f_{ctk;0,95}$	2,0	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6,0	6,3	6,6	6,8
$f_{ctk;0,05} = 0,7 \cdot f_{ctm}$ $f_{ctk;0,95} = 1,3 \cdot f_{ctm}$															

Die Betonzugfestigkeit wird durch viele Parameter beeinflusst und ist starken Streuungen unterworfen. Wenn sie rechnerisch in Ansatz gebracht wird, muss der maßgebende Rechenwert sinnvoll festgelegt werden. In EC2, Tab. 3.1 (DIN 1045-1, Tabelle 9) wird ein Mittelwert $f_{ctm} = 0,30 \cdot f_{ck}^{(2/3)}$, ein oberer Fraktilwert $f_{ctk;0,95} = 1,3 \cdot f_{ctm}$ sowie ein unterer Fraktilwert $f_{ctk;0,05} = 0,7 \cdot f_{ctm}$ angegeben. Bei der Streuung ist zu unterscheiden:

- die Streuung von Bauteil A im Bauwerk X zu Bauteil B im Bauwerk Y bei Herstellung aus unterschiedlichen Betonen der gleichen Festigkeitsklasse
- die Streuung innerhalb eines Bauteils bei Herstellung aus einer Betonmischung

Für die Arbeitslinie (Kraft-Dehnungs-Linie) eines Betonzugstabes könnte bei verschiedenen Bauteilen in Abhängigkeit von f_{ctm} die Rissbildungsphase auf unterschiedlichem Kraftniveau liegen (Bild 3-6 a und b), jedoch ist ein steiler Anstieg in der Rissbildungsphase nach Bild 3-6 c mit Beginn der Rissbildung bei $0,7 \cdot f_{ctm}$ und Abschluss bei $1,3 \cdot f_{ctm}$ sehr unwahrscheinlich.

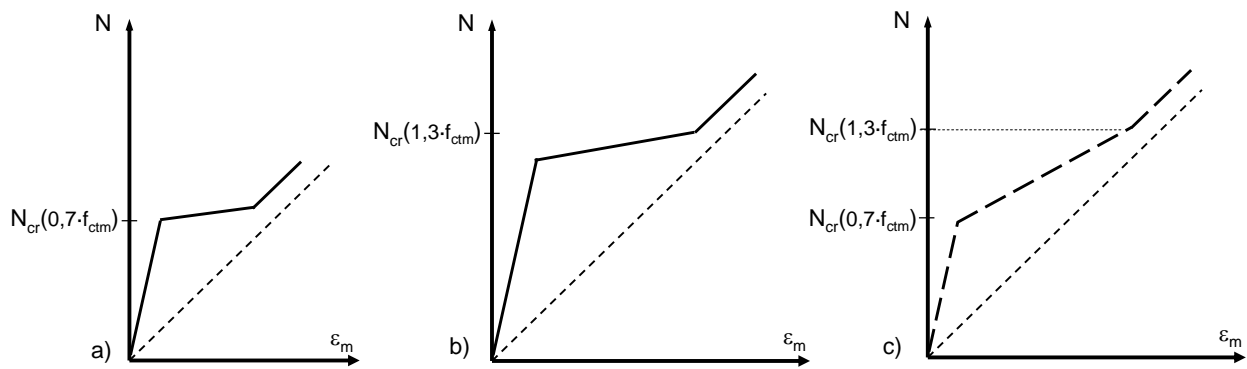


Bild 3-6 Einfluss der Streuung der Betonzugfestigkeit bei gleicher Betonfestigkeitsklasse
a) Arbeitslinie eines Bauteils A im Bauwerk X bei geringer Zugfestigkeit des Betons
b) Arbeitslinie eines Bauteils B im Bauwerk Y bei hoher Zugfestigkeit des Betons
c) sehr unwahrscheinlicher Anstieg der Arbeitslinie in der Rissbildungsphase innerhalb eines Bauteils

Der jeweils anzusetzende Wert der Betonzugfestigkeit ist in Abhängigkeit vom jeweiligen Nachweis auf der sicheren Seite liegend zu wählen; darauf wird später noch eingegangen. In vielen Fällen ist es sinnvoll, den Mittelwert für die Betonzugfestigkeit anzusetzen.

Die Betonzugfestigkeit hängt auch entscheidend vom Alter des Betons ab. Ebenso wie bei der Druckfestigkeit gibt es eine zeitabhängige Festigkeitsentwicklung, insbesondere in den ersten 28 Tagen. Eine erste Zugbeanspruchung infolge Zwang (s. Abschnitt 3.3.2) entsteht häufig bei Abkühlung infolge abfließender Hydratationswärme schon nach 3–5 Tagen, wo die Festigkeit erst etwa 50% der 28-Tage-Festigkeitswerte erreicht. Daher ist bei der Berechnung der Risschnittgrößen immer die zum Zeitpunkt der Rissbildung wirksame (effektive) Betonzugfestigkeit $f_{ct,eff}$ zu berücksichtigen.

$f_{ct,eff}$ wirksame Zugfestigkeit des Betons zum betrachteten Zeitpunkt. Es ist in der Regel der Mittelwert der Zugfestigkeit f_{ctm} nach Tabelle 3-1 von derjenigen Festigkeitsklasse zu verwenden, die zum Zeitpunkt der Rissbildung zu erwarten ist.

In einigen Fällen sind zum Zeitpunkt der Rissbildung zusätzliche Eigenspannungen über die Querschnittshöhe wirksam. Sie resultieren aus nichtlinear über die Querschnittshöhe verteilten Dehnungen, wie sie z.B. bei Temperatur- oder Schwindbeanspruchungen entstehen (s. hierzu Abschnitt 3.3.3).

3.3 Bemessungswerte der Beanspruchungen

3.3.1 Beanspruchungen aus Last

Beanspruchungen aus Last werden mit den üblichen Methoden der Schnittgrößenermittlung für die maßgebende Einwirkungskombination berechnet, bei statisch unbestimmten Systemen kann in vielen Fällen näherungsweise eine linear-elastische Berechnung durchgeführt werden. Sofern der Steifigkeitsverlust infolge der Rissbildung die Schnittgrößenermittlung erheblich beeinflusst, ist eine nicht-lineare Berechnung der Schnittgrößen mit geeigneten EDV-Programmen erforderlich. Dies ist ebenso bei einer Kombination von Last und Zwang sinnvoll, sofern eine einfache Abschätzung nicht möglich oder nicht ausreichend wirtschaftlich ist.

Bemessungssituationen im GZG

Seltene Kombination:

$$E_{d,rare} = E \left(\sum G_k \oplus P_k \oplus Q_{k,j} \oplus \sum_{i \geq 1; i \neq j} \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i} \right)$$

Häufige Kombination:

$$E_{d,freq} = E \left(\sum G_k \oplus P_k \oplus \psi_{1,j} \cdot Q_{k,j} \oplus \sum_{i \geq 1; i \neq j} \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \right)$$

Quasi- ständige Kombination:

$$E_{d,perm} = E \left(\sum G_k \oplus P_k \oplus \sum_{i \geq 1} \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \right)$$

3.3.2 Beanspruchungen aus Zwang

Zwangbeanspruchungen entstehen in statisch unbestimmtem Systemem, wenn eingeprägte Verformungen oder Verzerrungen sich nicht frei einstellen können, sondern durch die statisch unbestimmte Lagerung behindert werden. Auch Relativverformungen innerhalb eines Systems können durch gegenseitige Behinderungen einzelner Bauteilabschnitte Zwangbeanspruchungen erzeugen. Die in einem Bauteil entstehenden Zwangbeanspruchungen entsprechen den üblichen Schnittgrößen M , N , V usw. In der Regel entstehen zentrische Zwangbeanspruchungen (N) und/oder Biegezwangbeanspruchungen (M). Diese erreichen schnell die Betonzugfestigkeit und führen häufig zur Rissbildung. Auswirkungen der Druck- bzw. Biegedruckbeanspruchungen können in fast allen Fällen vernachlässigt werden und werden deshalb hier nicht weiter betrachtet.

Zwangsschnittgrößen sind Reaktionen eines Bauteils infolge einer Zwangseinwirkung und damit eher dem Bauteilwiderstand als der Beanspruchung zuzuordnen. Die Zwangsschnittgrößen werden aber üblicherweise trotzdem als Beanspruchung aufgefasst. (Anmerkung: auch bei statisch unbestimmten Systemen ist die Grenze zwischen Beanspruchung (Schnittgrößen) und Bauteilwiderstand nicht so deutlich festzulegen wie es uns üblicherweise erscheint).

3.3.3 Einfluss von Eigenspannungen

In einigen Fällen sind zum Zeitpunkt der Rissbildung zusätzliche Eigenspannungen über die Querschnittshöhe wirksam. Sie resultieren aus nichtlinear über die Querschnittshöhe verteilten Dehnungen, wie sie z.B. bei Temperatur- oder Schwindbeanspruchungen entstehen (Bild 3-7). Oberflächen-nahe Bauteilbereiche kühlen schneller ab bzw. schwinden schneller. Die sich schneller verkürzenden, äußeren Bauteilschichten werden durch den sich langsam verkürzenden Bauteilkern an der Verkürzung behindert und es entstehen außen Zugspannungen und aus Gleichgewichtsgründen im Bauteilinneren Druckspannungen. Diese so über den Querschnitt verlaufenden Spannungen, die zu keinen resultierenden Schnittgrößen führen, nennt man Eigenspannungen.

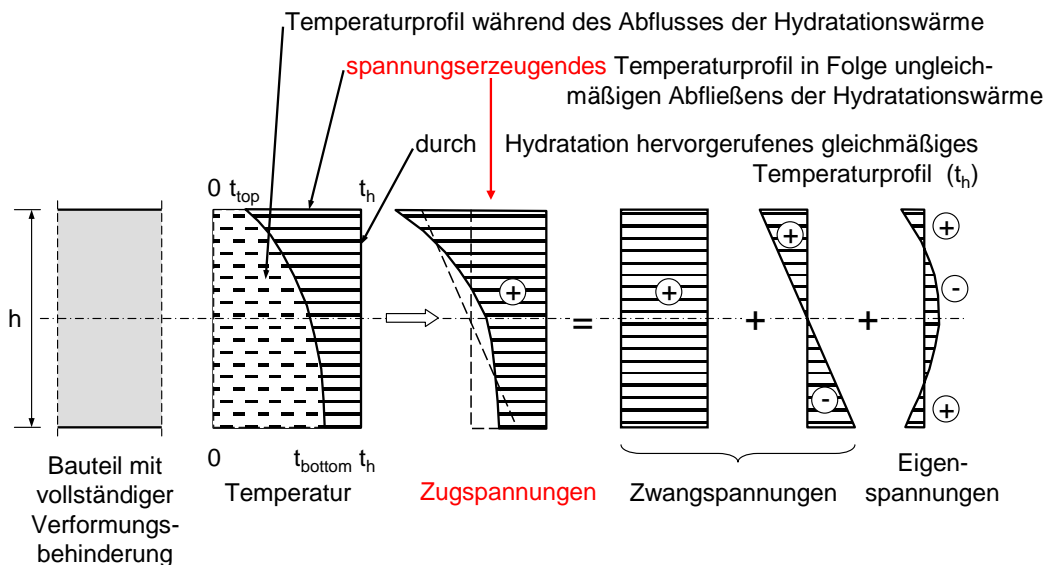


Bild 3-7 Entstehung von Zwang- und Eigenspannungen bei behinderter Verformung einer Platte (nach *Springenschmidt* [13]), Eigenspannungen können auch allein, z.B. bei nicht behinderter Verformung, auftreten

Wenn sich die infolge von Eigenspannungen außen wirkende Zugspannungen und die Zugspannungen infolge einer Zwangbeanspruchung addieren, wird die Zugfestigkeit am Bauteilrand schneller erreicht und die Rissbildung ergibt sich schon bei geringeren Risschnittgrößen als wenn keine Eigenspannungen wirksam wären (Fall A). Bei dicken Bauteilen können Eigenspannungen allein – also ohne eine Zwangbeanspruchung – so große Zugspannungen erreichen, dass sich im oberflächennahen Bereich Risse bilden. Folgt anschließend eine Zwangbeanspruchung, fallen die Risschnittgrößen wegen der Vorschädigung der Randzonen deutlich geringer aus (Fall B). In beiden Fällen vermindern sich die Risschnittgrößen infolge der vorhandenen Eigenspannungen. In DIN 1045-1 wird daher ein Abminderungsfaktor k für die scheinbar geringere Betonzugfestigkeit eingeführt, der sich insbesondere auf die Mindestbewehrungsmenge infolge einer Zwangbeanspruchung (siehe Abschnitt 3.3.2) günstig auswirkt.

k Der Beiwert k berücksichtigt die günstige Wirkung möglicher Eigenspannungen (nichtlinear über den Querschnitt verteilte Spannungen) oder ähnlicher „Vorschädigungen“. Nachfolgende Werte dürfen angenommen werden:

- bei Zwang, wenn dieser im Bauteil selbst hervorgerufen wird (z.B. infolge Abfließens der Hydratationswärme bzw. Schwinden):

$$k = 0,8 \text{ für Bauteildicken } h \leq 300 \text{ mm}$$

$k = 0,5$ für Bauteildicken $h \geq 800 \text{ mm}$
(Zwischenwerte dürfen linear interpoliert werden)

- sonst (z.B. bei Stützensenkungen) und bei Lastbeanspruchung:
 $k = 1,0$

3.3.4 Zwangbeanspruchte Querschnittsteile bei Lastbeanspruchung

In Plattenbalken und ähnlichen Querschnitten wird die Biegezugbewehrung infolge einer Lastbeanspruchung üblicherweise konzentriert auf der Biegezugseite angeordnet. Dort sind in der Regel sehr enge Rissabstände mit sehr kleinen Rissbreiten zu beobachten. Bei hohen Stegen mit einer Höhe der Zugzone von etwa 60 cm und mehr können sich die am Bauteilrand fein verteilten Risse zu breiten Rissen im Steg sammeln. Es entsteht das in Bild 3-8 dargestellte, typische Rissbild.

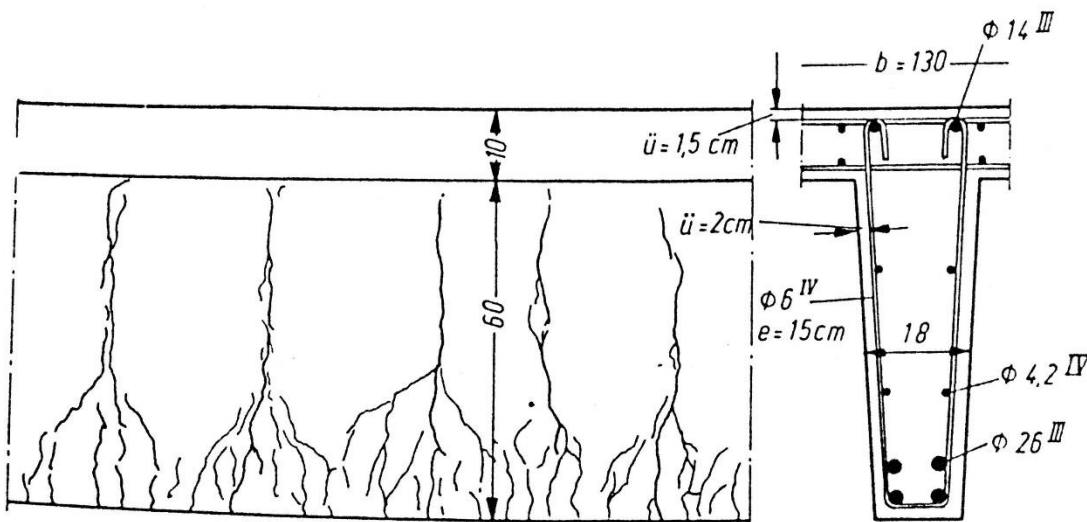


Bild 3-8 Sammelrissbildung im Steg eines Plattenbalkens nach Leonhardt [15]

Durch Anordnung einer horizontalen Stegbewehrung müssen die breiten Sammelrisse vermieden werden. Zur Bemessung dieser Stegbewehrung stellt man sich den Steg zwischen der Biegezugbewehrung und der Dehnungsnulllinie als gezwängten Querschnittsteil vor. Dem Steg wird quasi die Verformung der Biegezugzone aufgezwungen. Trotz einer vorliegenden Lastbeanspruchung braucht die Stegbewehrung nur als Mindestbewehrung infolge einer Zwangbeanspruchung bemessen zu werden. Dabei kann von einer reduzierten Zwangskraft ausgegangen werden, da die fein verteilten Risse der Biegezugzone wie Kerben wirken. Ersatzweise kann die Betonzugfestigkeit mit einem Abminderungsfaktor k wie bei der Wirkung von Eigenspannungen versehen werden. Leider wurde es in DIN 1045-1 versäumt, hierfür eine Regelung aufzunehmen, nach EC2 ist Sie nun wieder anwendbar:

bei Bauteilen, die durch Lasteinwirkungen beansprucht werden, dürfen abliegende Querschnittsteile (Querschnittsteile, die von der Hauptzugbewehrung entfernt liegen, z.B. Gurtplatten von Plattenbalken oder Kastenquerschnitten) und Stege von Plattenbalken oder Kastenquerschnitten für eine durch Risskerben abgeminderte Betonzugfestigkeit bemessen werden. Für die Berechnung dieser Querschnittsteile darf $k = 0,5$ in Rechnung gestellt werden:

3.4 Berechnung von Spannungen, Dehnungen und Krümmungen im gerissenen Gebrauchszustand

Bei der Ermittlung von inneren Kräften und/oder Spannungen im Gebrauchszustand ist bei Überschreitung der Betonzugfestigkeit der gerissene Zustand zu betrachten. Für zugbeanspruchte Bauteile können die Stahlkräfte meist leicht aus einfachen Gleichgewichtsbetrachtungen ermittelt werden. Für biegebeanspruchte Bauteile genügen die Gleichgewichtsbedingungen nicht.

Bild 3-9 zeigt das Rissbild eines Versuchsträgers. Bei einer wirklichkeitsnahen Berechnung muss die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen berücksichtigt werden. Hilfsmittel sind nur für den häufig vorhandenen Normalfall verfügbar (Rechteckquerschnitt, Plattenbalken ohne Mitwirkung des Betons für Biegung, ggf. auch mit Normalkraft, z.B. *Hochreither* [17], *Zilch/Rogge* [18]). Bei Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons in der Zugzone sollten Programme genutzt werden. Die grundlegenden Zusammenhänge werden nachfolgend erläutert.

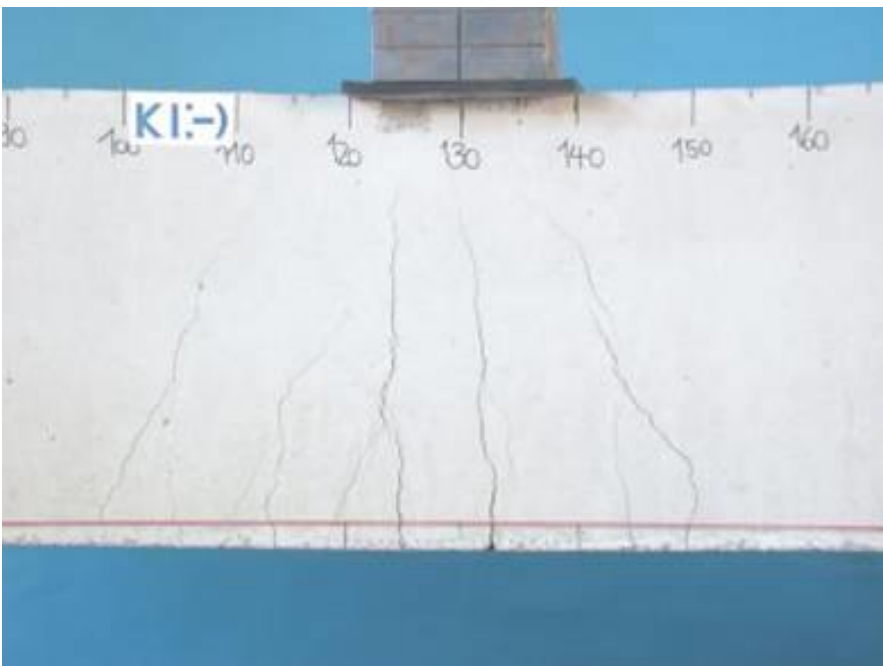


Bild 3-9 Rissbildung in einem Biegebauteil, siehe dazu [27]

Bei einem Biegebauteil entstehen in den unterschiedlichen Beanspruchungsphasen die Betonspannungen, wie sie in Bild 3-10 dargestellt sind.

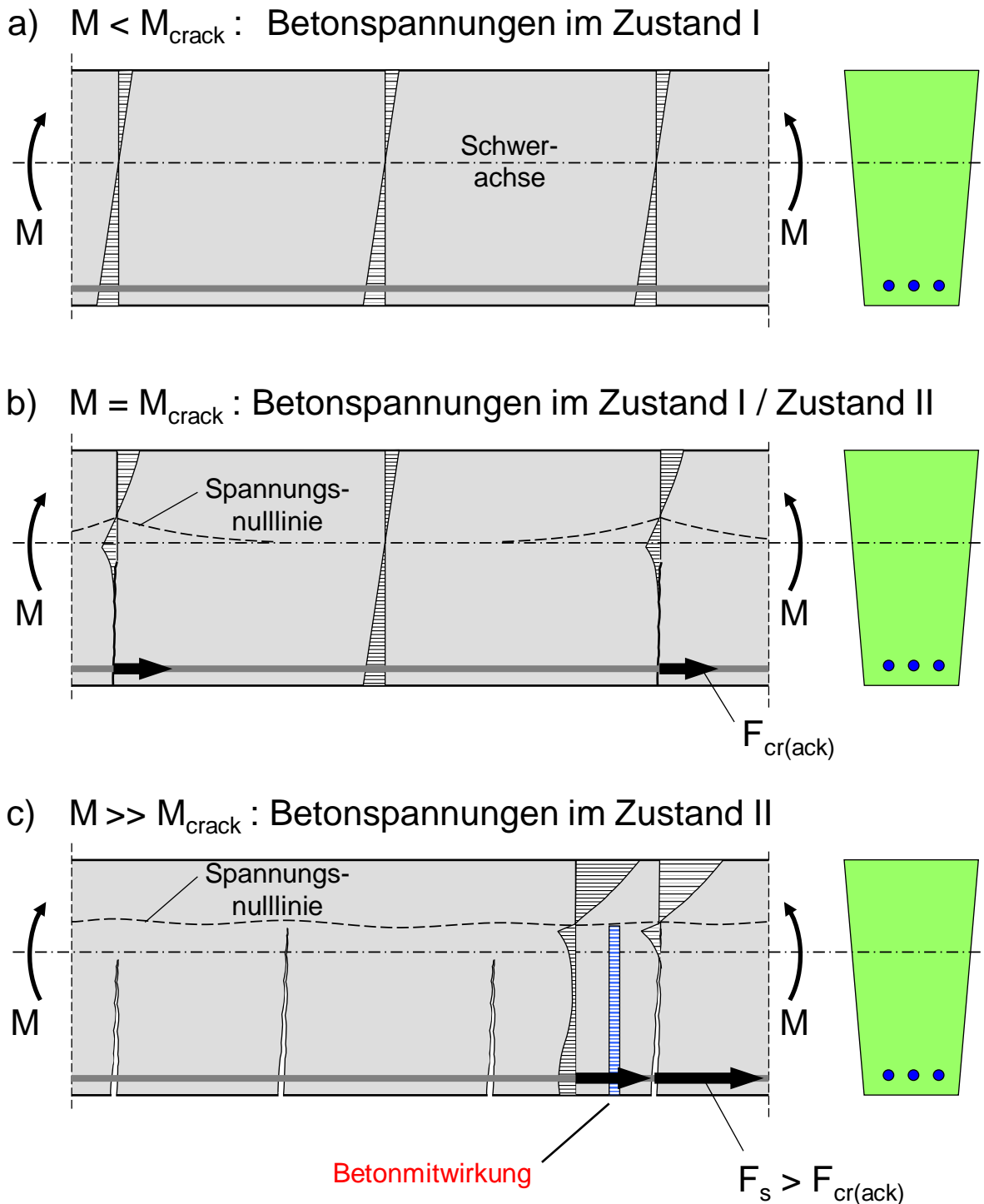
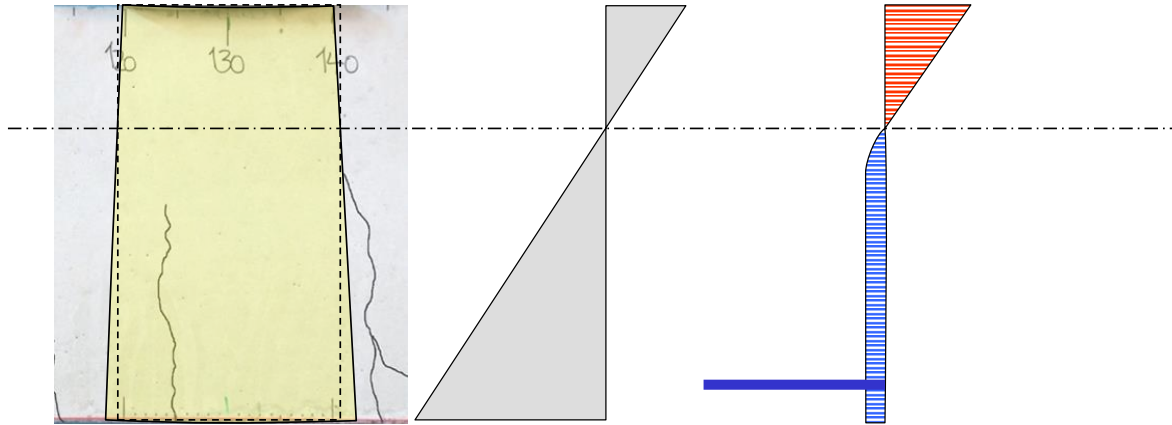


Bild 3-10 Betonspannungen in einem Biegebauteil in den verschiedenen Beanspruchungsphasen

Bei den so unterschiedlichen Betonzugspannungen im Riss und zwischen den Rissen stellt sich die Frage, ob denn die Hypothese von Bernoulli noch gültig ist. Wie in Bild 3-11 dargestellt, gilt sie nur gemittelt über einen Balkenabschnitt, also nicht im Rissquerschnitt oder in einem Querschnitt zwischen den Rissen. In Bild 3-11 und Bild 3-12 ist ein vereinfacht angenommener Verlauf der Betonzugspannungen, gemittelt über einen Balkenabschnitt, gezeigt.



Die Dehnungsverteilung kann in einem Balkenabschnitt **im Mittel** als geradlinig betrachtet werden.

Mit Hilfe der Werkstoffgesetze (σ - ε -Bez.) ergeben sich die Spannungen im Beton und im Stahl

Bild 3-11 Die Hypothese von Bernoulli gilt nur im Mittel für einen Balkenabschnitt

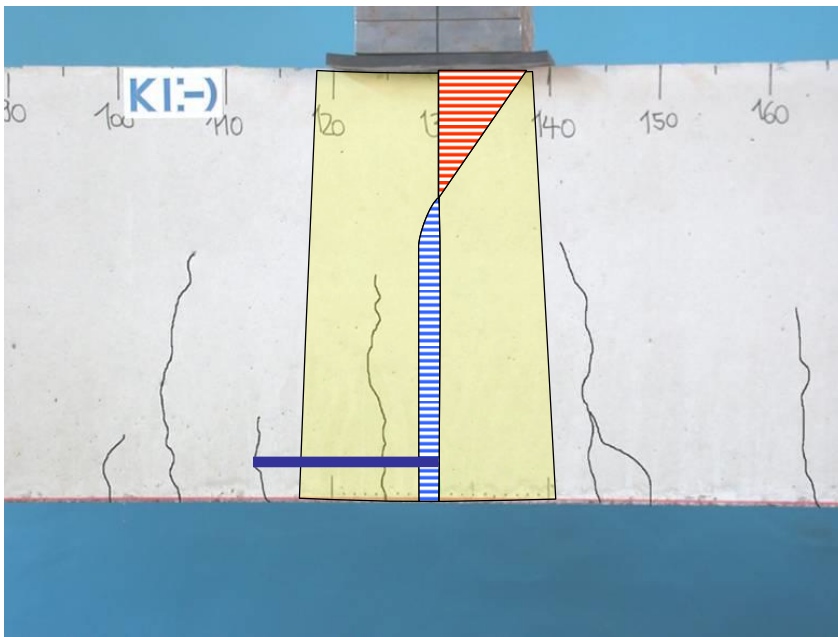


Bild 3-12 Mittlerer Spannungsverlauf in einem Balkenabschnitt, siehe dazu [27]

Diese mittleren Betonzugspannungen stellen die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen dar. Ihre rechnerische Erfassung ist schwierig und kann nur durch iterative Berechnung berücksichtigt werden (siehe *Fischer, Kramp, Prietz, Rösler* [19]). Hierbei ist zu beachten, dass sich die Spannungen im Bauteil durch Kriechen des Betons in der Druckzone und im Verbund zum Stahl umlagern können, so dass in der Regel der maßgebende Zeitpunkt untersucht werden muss.

Bei nicht vorgespannten Bauteilen ergeben sich i. d. R. die größten Stahlspannungen zum Zeitpunkt $t = \infty$, die größten Betondruckspannungen zum Zeitpunkt $t = 0$.

3.4.1 Lösung für Querschnitte mit beliebiger Druckzone unter reiner Biegebeanspruchung ohne Mitwirkung des Betons auf Zug

Wenn die Mitwirkung des Betons vernachlässigt werden kann, ist für $N = 0$ und ohne Vorspannung die Spannungsnulllinie stets die Schwerachse des Querschnitts, also auch des gerissenen ideellen Querschnitts. Diese kann aus dem Gleichsetzen der statischen Momente ober- und unterhalb der gesuchten Schwerachse unter Beachtung der E-Modul-Verhältnisse gefunden werden.

Statisches Moment um eine Achse: Summe aller Produkte aus Teilflächen und Abstand ihres Teilflächenschwerpunktes zur betrachteten Achse.

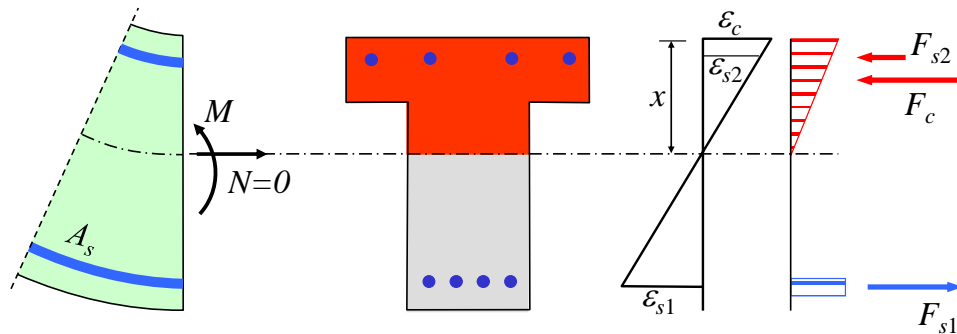
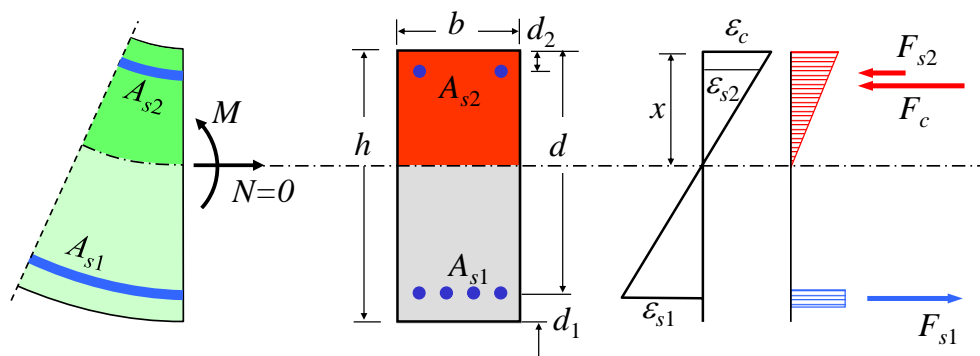


Bild 3-13 Dehnungen, Spannungen und resultierende Kräfte im GZG im gerissenen Zustand

Am Beispiel des Sonderfalls Querschnitt mit rechteckförmiger Druckzone und Biegezug- und Druckbewehrung wird das Vorgehen erläutert:

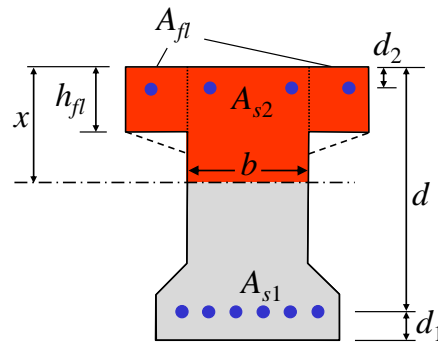


Stat. Mom. oben $b \cdot x \cdot \frac{x}{2} + A_{s2} \cdot \left(\frac{E_s}{E_c} - 1 \right) \cdot (x - d_2)$	Stat. Mom. unten $A_{s1} \cdot \frac{E_s}{E_c} \cdot (d - x)$
--	--

Diesem Vorgehen liegt der lineare Dehnungsverlauf entsprechend der Hypothese von Bernoulli zugrunde.

Der Ansatz führt zu einer quadratischen Gleichung. Deren Lösung lautet für den etwas allgemeineren Fall mit den Einschränkungen

- $N = 0$ und ohne Vorspannung
- keine Mitwirkung des Betons auf Zug



$$x = \left(-A + \sqrt{A^2 + 2b \cdot S^*} \right) / b \quad (3-3)$$

mit der Summe der Flächen ohne $x \cdot b$ (Stahlflächen entspr. äquiv.)

$$A = A_{fl} + A_{s1} \cdot E_s / E_c + A_{s2} \cdot (E_s / E_c - 1) + \dots$$

und der Summe der stat. Momente um den oberen Bauteilrand ohne $x \cdot b$ (Stahlfl. äquiv.)

$$S^* = A_{fl} \cdot h_{fl} / 2 + A_{s1} \cdot d \cdot E_s / E_c + A_{s2} \cdot d_2 \cdot (E_s / E_c - 1) + \dots$$

Es ist zu überprüfen, ob x in dem Bereich mit konstanter Breite liegt, der vor der Berechnung angenommen wurde. Weiterhin ist zu überprüfen, dass die Bewehrung A_{s1} wie angenommen im gerissenen Bereich und die Bewehrung A_{s2} im überdrückten Bereich liegt.

Es ist erkennbar, dass die Höhe der Druckzone unabhängig von der Größe des Momentes ist. Dies gilt so nur unter den oben genannten Voraussetzungen. Die Druckzonenhöhe ist nur abhängig von den Steifigkeiten und Anordnungen der verwendeten Materialien im Querschnitt.

Zur Berechnung von Spannungen, Dehnungen oder Krümmungen kann das ideale Flächenträgheitsmoment (Eigentragheits- und Steineranteile um die Nulllinie = Schwerachse) unter Beachtung der äquivalenten Flächen für den Stahl bestimmt werden:

$$I_{ci}'' = b \cdot x^3 / 3 + I_{0,fl} + A_{fl} \cdot (x - h_{fl} / 2)^2 + A_{s1} \cdot E_s / E_c \cdot (d - x)^2 + A_{s2} \cdot (E_s / E_c - 1) \cdot (x - d_2)^2 + \dots \quad (3-4)$$

Wenn Kriechauswirkungen z. B. zum Zeitpunkt $t = \infty$, berücksichtigt werden müssen, dann ist E_c zu ersetzen durch $E_{c,eff}$:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi_t^*} \quad \text{mit} \quad \varphi_t^* \approx \frac{\varphi_t}{1,05}$$

Es gilt: eine Superposition einzelner Lastfälle ist möglich, da in jedem Lastfall gleiche Querschnittswerte vorhanden sind!

Hinweis: Geschlossene Lösungen für Kombinationen mit einer Normalkraft, einer Vorspannung oder mit der Betonmitwirkung existieren nicht!

Krümmungen, die zur Berechnung von Durchbiegungen benötigt werden, sollten insbesondere bei Platten unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen berechnet werden.

Insbesondere bei der Anwendung von Programmen ist es wichtig, Ergebnisse zu kontrollieren. Für eine vorgegebene Druckzonenhöhe können ohne Iteration die Schwerachse sowie die Querschnittswerte ermittelt und anschließend die Spannungen überprüft werden.

Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (tension stiffening) ist zu berücksichtigen. Sie darf unberücksichtigt bleiben, wenn dies auf der sicheren Seite liegt. Die Auswahl eines geeigneten Verfahrens sollte in Abhängigkeit von der jeweiligen Bemessungsaufgabe getroffen werden. Zu empfehlen ist eine konstante Zugspannung über die Höhe der Zugzone entsprechend Heft 525 des DAfStb:

$$\sigma_{cm} = \beta_{mt} \cdot k \cdot f_{ct,eff}$$

$$\beta_{mt} = 0,40 \text{ für Kurzzeitbeanspruchung und}$$

$$\beta_{mt} = 0,25 \text{ für lang andauernde/wiederholte Beanspruchung}$$

Das Kriechen wirkt sich auch als Verbundkriechen auf die Mitwirkung des Betons in der Zugzone aus (berücksichtigt durch $b_{mt} = 0,25$)

für den Fall $0 \leq \varepsilon_{c1} \leq f_{ctm}/E_{cm}$ bzw. $f_{ctm}/E_{c,eff}$ sollte β_{mt} linear auf 0 abgemindert werden.

Die jeweilige Betonmitwirkung ist auf der Seite der einwirkenden Schnittgrößen zu berücksichtigen.

3.4.3 Näherungslösungen

Übliche Näherungslösungen beschränken sich auf die Abschätzung von Stahlkräften im Riss. Für die Abschätzungen von Druckspannungen sind keine Näherungen bekannt.

Kräfte im Stahl können häufig über den inneren Hebelarm aus der Bemessung im GZT näherungsweise ermittelt werden. Krieचाuswirkungen wirken sich auf die Stahlspannungen nur geringfügig aus.

Für Stahlkräfte im Riss unter Rissschnittgrößen, z. B. zur Ermittlung einer Mindestbewehrung, wird in DIN 1045-1, Abschnitt 11.2.2 entsprechend Bild 3-15 eine Näherungslösung angegeben.

Es wird darauf hingewiesen, dass die inneren Kräfte unmittelbar von den inneren Steifigkeiten abhängen, insofern kann bei einer wirklichkeitsnahen Betrachtung immer nur ein vollständig dimensioniertes Bauteil (also eines mit einer gewählten Bewehrung) nach Abschnitt 3.4.2 berechnet werden.

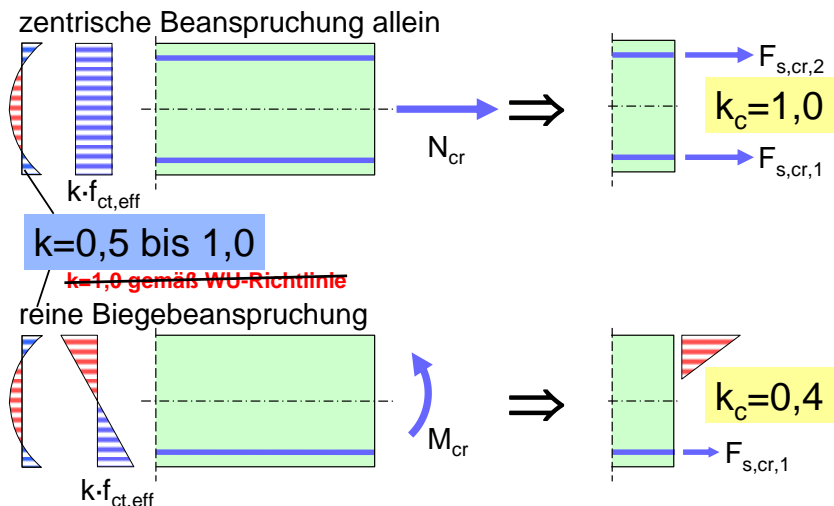


Bild 3-15 Stahlkräfte im Riss unter Rissschnittgrößen für zentrische Beanspruchung und alleinige Biegebeanspruchung

$$F_{s,cr,1/2} = k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct,1/2} \tag{3-6}$$

Dabei sind:

- k siehe Abschnitt 3.3.3
- $f_{ct,eff}$ siehe Abschnitt 3.2.3, bei Zwang besondere Bestimmungen beachten.
- A_{ct} die vor der Erstrissbildung unter Zugspannung stehende Betonquerschnittsfläche, bei Biegung mit Zug nur bis zur Schwerachse, bei vollständig gerissenem Querschnitt anteilig für jede Bewehrungslage.
- k_c Beiwert zur Berücksichtigung der Spannungsverteilung in der Zugzone sowie der Vergrößerung des inneren Hebelarms beim Übergang in den Zustand II.
 - $k_c = 1,0$ für zentrische Beanspruchung
 - $k_c = 0,4$ für reine **Biegebeanspruchung** von Rechteckquerschnitten und Stegen aufgelöster Querschnitte
 - $k_c = 0,4 \cdot \left(1 + \frac{\sigma_c}{k_1 \cdot f_{ct,eff}} \right) \leq 1,0$ für rechteckige Querschnitte und Stegen aufgelöster Querschnitte (Plattenbalken und Hohlkästen) auf der stärker gezogenen Seite,
 - σ_c Betonspannung im Zustand I unter Risschnittgrößen in der Querschnittsschwerachse
 - $k_1 = 1,5$ für $h \leq 1,0 \text{ m}$ bei Biegung und Längsdruck (Spannbetonbauteile), σ_c bei Druckspannung mit negativen Wert einsetzen
 - $k_1 = 1,5 \cdot \frac{h}{h'}$ für $h > 1,0 \text{ m}$ mit $h' = 1,0 \text{ m}$ h : Höhe des (Teil-)Querschnitts
 - $k_1 = \frac{2}{3}$ bei Biegung und Längszug
 - $k_c = 0,9 \cdot \frac{F_{s,cr,Gurt}}{A_{ct} \cdot f_{ct,eff}} \geq 0,5$ für Zuggurte von Plattenbalken und Hohlkästen mit $F_{s,cr,Gurt}$ im Zustand I unter Risschnittgrößen

Nach Meinung des Verfassers sollte für Rechteckquerschnitte und Stege aufgelöster Querschnitte von vorgespannten Bauteilen zur Vereinfachung $F_{s,cr}$ als Zugkeilkraft ohne Berücksichtigung der Vergrößerung des inneren Hebelarmes entsprechend Bild 3-16 bestimmt werden, (d.h. $k_c = 0,5$ auf sicherer Seite), was auf Grund der großen Schwankungen infolge der kleinen Spannungsdifferenz aus großen Randspannungswerten zweckmäßig erscheint.

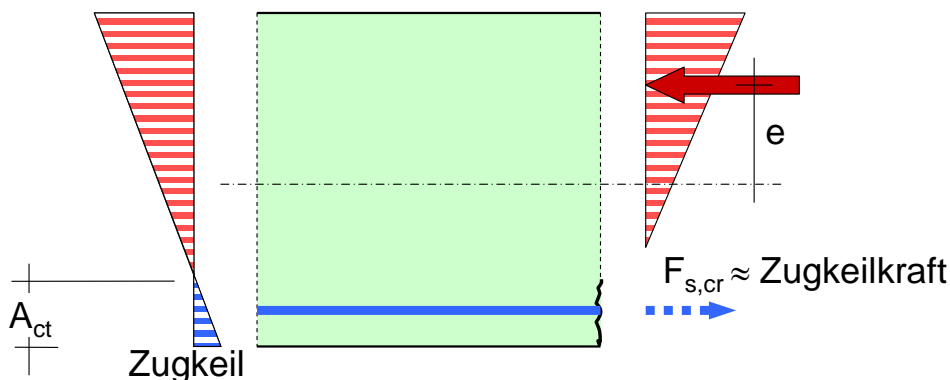


Bild 3-16 Bestimmung der Stahlkraft im gerissenen Zustand aus der Zugkeilkraft nach Zustand I

3.5 Nachweise der Spannungen

Die Spannungsnachweise (EC2, 7.2 bzw. DIN 1045-1, 11.1) werden geführt, um im Gebrauchszustand eine übermäßige Schädigung des Betongefüges und plastische Verformungen des Beton- und Spannstahls zu vermeiden. Trotz ausreichender Teilsicherheitsbeiwerte für den Grenzzustand der Tragfähigkeit können bereits im Gebrauchszustand übermäßige Beanspruchungen entstehen, zum Beispiel infolge einer Umlagerung von Schnittgrößen.

Die Spannungsnachweise dürfen für nicht vorgespannte Bauteile des üblichen Hochbaus, die nach EC2, Abschnitt 6 bemessen sind, entfallen, wenn

- die Schnittgrößen nach der Elastizitätstheorie mit einer maximalen Umlagerung von 15% ermittelt werden und
- die bauliche Durchbildung nach EC2, Abschnitt 9, insbesondere die konstruktive Mindestbewehrung nach Abschnitt 9.2.1.1 beachtet wird.

Bei Spannungsnachweisen vorgespannter Bauteile ist zu beachten, dass diese gegebenenfalls wie bei nicht vorgespannten Bauteilen für den gerissenen Zustand geführt werden müssen. Nur wenn für den betrachteten Querschnitt nachgewiesen werden kann, dass auch unter allen ungünstigen, seltenen Einwirkungskombinationen die Betonzugfestigkeit nicht überschritten wird, können alle Nachweise für diesen Querschnitt im ungerissenen Zustand I geführt werden. Hierbei sind auch die zeitlichen Spannkraftverluste sowie die charakteristischen Werte der Vorspannung zu beachten. **Empfehlenswerter ist es, den ungerissenen Zustand I nur dann zu betrachten, wenn der Querschnitt für die nachzuweisende Einwirkungskombination vollständig überdrückt ist.**

Die im Zustand II vorhandenen Spannungen können entsprechend Abschnitt 3.4.1 und 3.4.2 ermittelt werden.

3.5.1 Begrenzung der Betondruckspannungen

Zur Vermeidung von Längsrissen in Betondruckbereichen ist bei den Expositionsklassen (EC2, Tab. 4.1, DIN 1045-1, Tab.3)

- XD1.... XD3 (chloridinduzierte Korrosion)
- XS1.... XS3(chloridinduzierte Korrosion aus Meerwasser)
- XF1.... XF4(Frost-Tau-Wechsel-Angriff des Betons)

die Betonspannung im Zustand II (Regelfall) unter seltenen Lastkombinationen zu begrenzen auf

$$|\sigma_{c,rare}| \leq 0,6 \cdot f_{ck} \quad (3-7)$$

Alternativ kann die Betondeckung der Druckzone erhöht oder die Druckzone mit Bewehrung umschnürt werden. (Anmerkung des Verfassers: Diese in der Norm angegebenen Alternativen scheinen wenig hilfreich zu sein, eine wirksame Umschnürung wird erst bei einer sehr kräftigen Verbügelung erreicht.)

Bei überwiegender Biegung ohne Vorspannung liefert der Zeitpunkt $t = 0$ in der Regel die größten Werte der Druckspannung, bei Biegung mit Vorspannung der Zeitpunkt $t = 0$ nur dann, wenn aus dem Lastfall c_{sr} Zugspannungen an der Stelle im Querschnitt auftreten, wo die Druckspannungen nachgewiesen werden sollen. Die Mitwirkung des Betons auf Zug darf nach Meinung des Verfassers angesetzt werden. Ihr Ansatz bewirkt eine Reduzierung der Spannungen von einem örtlichen Maximalwert auf einen über die Bauteillänge bzw. über einen Abschnitt zwischen zwei Rissen gemittelten

Wert. Eine örtliche Spannungsspitze würde nicht die hier zu vermeidenden Längsrisse entstehen lassen. Gerechtfertigt ist dies auch, da zum Zeitpunkt der seltenen Beanspruchung bereits eingetretene Kriechumlagerungen sich spannungsreduzierend auswirken, ohne dass diese in der Berechnung berücksichtigt werden.

Zur Vermeidung überproportionaler Verformungen infolge von nichtlinearem Betonkriechen sollte die Betonspannung unter quasi-ständigen Lastkombinationen begrenzt werden, sofern ein wesentlicher Einfluss auf die Gebrauchstauglichkeit, Tragfähigkeit oder Dauerhaftigkeit zu erwarten ist (Ausnahme: Verankerungs- und Auflagerbereiche), und zwar zum Zeitpunkt $t = 0$ auf:

$$|\sigma_{c,perm}| \leq 0,45 \cdot f_{ck} \quad (3-8)$$

Bei höheren Spannungen muss das nichtlineare Kriechen berücksichtigt werden. Die Mitwirkung des Betons auf Zug darf hier auf jeden Fall angesetzt werden, sie wirkt sich spannungsreduzierend aus. Geringfügige Überschreitungen der Spannungsgrenze werden als unkritisch betrachtet, da durch Kriechumlagerungen sehr rasch Spannungen abgebaut werden. Nach *Zilch/Fritsche* [20] (siehe auch [18], S. 283) wird sogar eine Spannungsgrenze von $0,55 \cdot f_{ck}$ für überwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile mit einer bezogenen Druckzonenhöhe von $\xi \geq 0,45$ im Gebrauchszustand als zulässig betrachtet.

Die in einem Bauteil vorhandenen Biegedruckspannungen können mit den in Abschnitt 3.4.1 oder 3.4.2 beschriebenen Verfahren berechnet und anschließend den Nachweisgrenzen gegenübergestellt werden.

In manchen Nachweisfällen der Betondruckspannungen können paradoxe Nachweissituationen entstehen. Wird zum Beispiel bei einem durchlaufenden Balken das Stützmoment um mehr als 15% durch Umlagerung der Schnittgrößen ermäßigt, kann es vorkommen, dass der Nachweis der Betondruckspannungen für das umgelagerte Stützmoment nicht gelingt, obwohl durch die Umlagerung die Betondruckspannungen geringer sind. Ohne Umlagerung wäre aber ein Nachweis gar nicht erforderlich gewesen. Diese Widersprüche müssen in der weiteren Normungsarbeit intensiv untersucht und aufgelöst werden. Eine mögliche Ursache kann der E-Modul des Betons sein, da dieser in den Werkstoffgesetzen des Grenzzustandes der Tragfähigkeit, z.B. im Parabel-Rechteck-Diagramm, zwar nicht direkt angegeben ist, aber indirekt vorhanden ist und deutlich geringer ausfällt als für die Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit. In Verbindung mit der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte ergibt sich im Gegensatz zum Grenzzustand der Tragfähigkeit im Gebrauchszustand eine geringere Druckzonenhöhe mit entsprechend hoher Randspannung.

Ein weiterer Widerspruch entsteht beim Vergleich vorgespannter und nicht vorgespannter Bauteile. Die Betondruckspannungen vorgespannter Tragwerke sind wegen der Vorspannung in der Regel geringer als bei vergleichbaren Stahlbetonbauteilen. Erstere müssen aber generell nachgewiesen werden, bei letzteren darf in der Regel auf den Nachweis verzichtet werden.

3.5.2 Begrenzung der Spannstahlspannungen

Für den Spannstahl sind verschiedene Spannungsnachweise zu beachten, die alle mit dem Mittelwert der Vorspannkraft, also ohne die Sicherheitselemente r_{sup} bzw. r_{inf} gemäß EC2 5.10.9 bzw. DIN 1045-1, 8.7.4 geführt werden dürfen.

Die Zugspannungen in Spanngliedern sind mit dem Mittelwert der Vorspannung unter quasi-ständigen Einwirkungskombinationen nach Abzug der Spannkraftverluste auf den Wert (EC2, NDP zu 7.2(5))

$$\sigma_{p,perm} \leq 0,65 \cdot f_{pk} \quad (3-9)$$

zu begrenzen. Dieser Nachweis ist zu führen, um die Spannungsrissskorrosion des Spannstahls zu vermeiden. Bei diesem Nachweis dürfen die Spannkraftverluste nicht zu groß abgeschätzt werden, da sonst die Nachweisgrenze sehr leicht eingehalten werden kann. In besonderen Fällen sollte ein unterer charakteristischer Wert für die Spannkraftverluste (geringe Verluste) in Betracht gezogen werden. Eine gesonderte Berechnung mit Eingangswerten für den geringsten Verlust ist mit erheblichem Aufwand verbunden. Zukünftig sollte daher in der Norm ein einfacher Abminderungsfaktor für die Spannkraftverluste im Zusammenhang mit diesem Spannungsnachweis angegeben werden.

Zu keinem Zeitpunkt nach dem Spannvorgang darf die Spannstahlspannung – berechnet mit dem Mittelwert der Vorspannung unter seltenen Einwirkungskombinationen – den kleineren der beiden folgenden Werte überschreiten (EC2, NDP zu 7.2(NA6)):

$$\sigma_{p,rare} \leq 0,8 \cdot f_{pk} \quad (3-10)$$

$$\sigma_{p,rare} \leq 0,9 \cdot f_{p0,1k} \quad (3-11)$$

Dieser Nachweis soll wie beim Betonstahl nicht elastische Stahldehnungen im Gebrauchszustand verhindern.

Die aufgeführten Nachweise der Spannstahlspannung werden sinnvollerweise bei der Festlegung des erforderlichen Spannstahlbedarfs berücksichtigt.

3.5.3 Begrenzung der Betonstahlspannungen

Für den Nachweis der Betonstahlspannungen im Riss ist entsprechend Abschnitt 3.3.4 die Mitwirkung des Betons in der Zugzone nicht anzusetzen. Maßgebend für die Stahlspannungen ist in der Regel der Nachweis zum Zeitpunkt $t = \infty$, da sich auf Grund von Umlagerungen infolge Kriechen der innere Hebelarm verkleinert.

Der Nachweis der Betonstahlspannungen kann recht einfach im Zusammenhang mit dem Nachweis der Rissbreite geführt werden

3.5.3.1 Begrenzung der Betonstahlspannungen aus Last

Die Zugspannung im Betonstahl ist für direkte Beanspruchung (Lastbeanspruchung) unter seltenen Kombinationen auf den Wert

$$\sigma_{s,rare} \leq 0,8 \cdot f_{yk} \quad (3-12)$$

zu begrenzen. Damit soll im Gebrauchszustand – im Falle der Lastbeanspruchung mit entsprechendem Sicherheitsabstand von $0,2 \cdot f_{yk}$ zur charakteristischen Streckgrenze – verhindert werden, dass durch das Fließen der Bewehrung sehr breite Risse entstehen, die sich nach Entlastung wegen der plastischen Verformungsanteile nicht mehr schließen. Da im Grenzzustand der Tragfähigkeit Teilsicherheitsfaktoren auf der Einwirkungsseite und beim Bauteilwiderstand in ausreichender Größe berücksichtigt werden, ist dieser Nachweis i. d. R. eingehalten und braucht nicht gesondert nachgewiesen werden.

3.5.3.2 Begrenzung der Betonstahlspannungen aus Zwang

Die Zugspannung im Betonstahl ist für eine Zwangbeanspruchung auf den Wert

$$\sigma_{s,rare} \leq 1,0 \cdot f_{yk} \quad (3-13)$$

zu begrenzen. Wird bei einer Zwangbeanspruchung gleichzeitig auch der Nachweis der Rissbreite geführt, dann liegen die Stahlspannungen in fast allen Bemessungsfällen deutlich unter der angegebenen Grenze. Lediglich bei sehr geringen Stabdurchmessern kann rechnerisch die Fließgrenze überschritten werden, daher ist beim Nachweis von Rissbreiten der Nachweis der Betonstahlspannung zusätzlich zu beachten

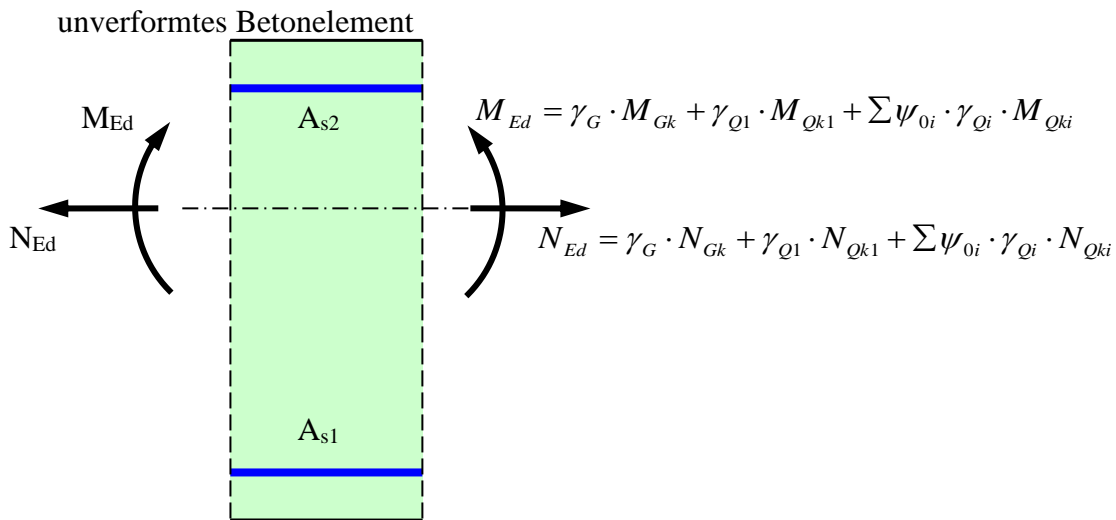
4 Grenzzustand der Tragfähigkeit für Biegung

4.1 Beanspruchungen und Bauteilwiderstände

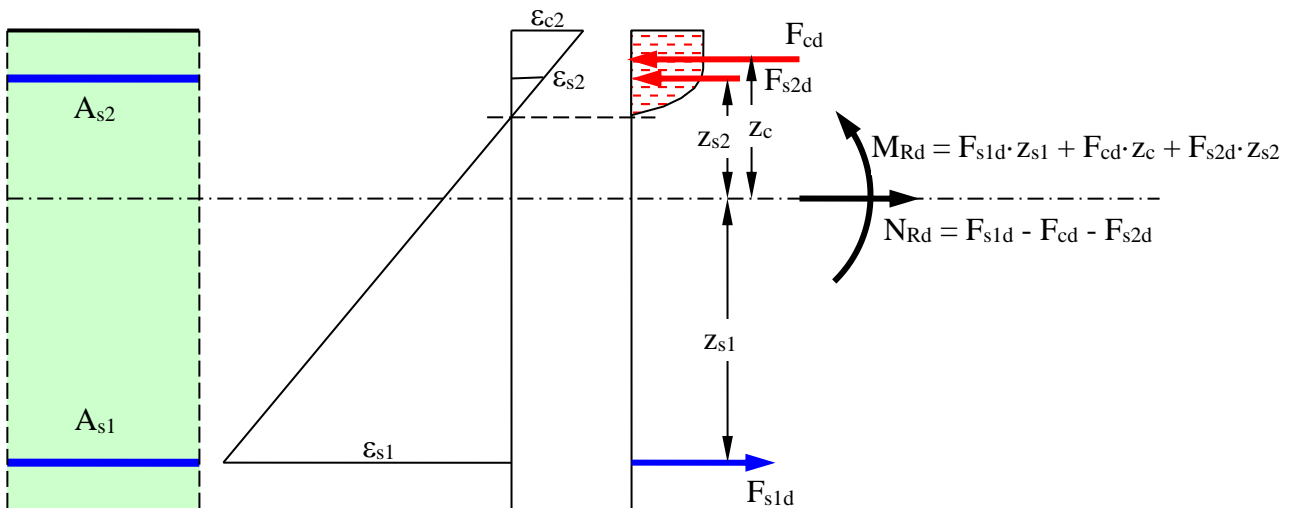
Zunächst wird der Grenzzustand der Tragfähigkeit für Biegung nochmals für nicht vorgespannte Bauteile dargestellt:

$$E_d \leq R_d$$

Beanspruchung E_d

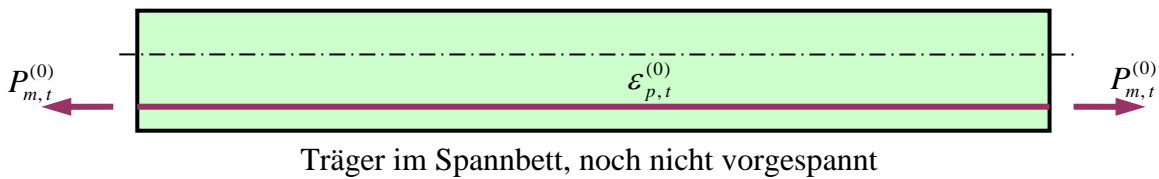


Bauteilwiderstand R_d



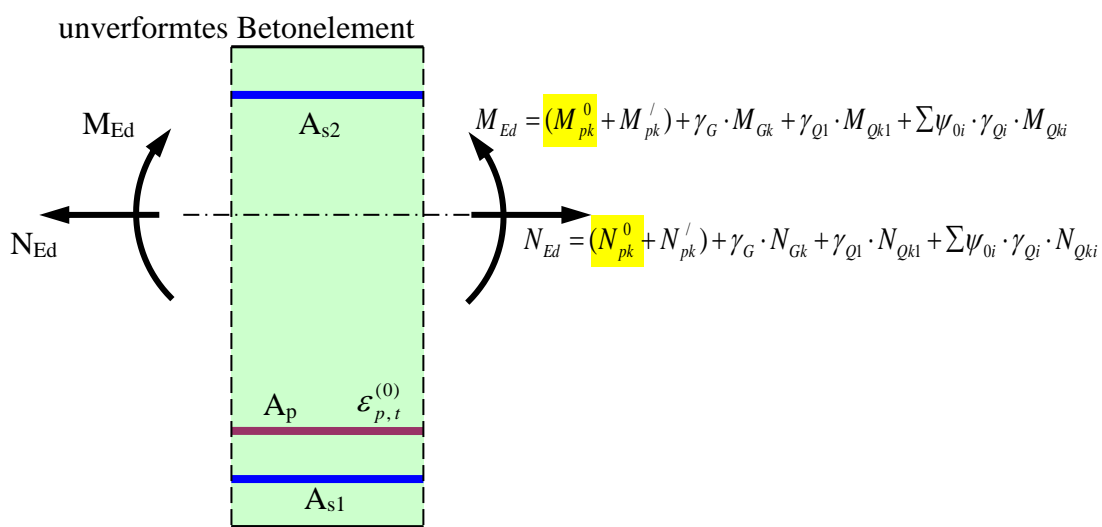
Für den Beton in der Druckzone kann alternativ auch das bilineare Werkstoffgesetz oder der Spannungsbloc verwendet werden.

Für vorgespannte Bauteile mit sofortigem oder nachträglichem Verbund läßt sich der Nachweis leicht ergänzen, wenn man sich das unverformte Balkenelement als Abschnitt eines im Spannbett hergestellten Trägers vorstellt:

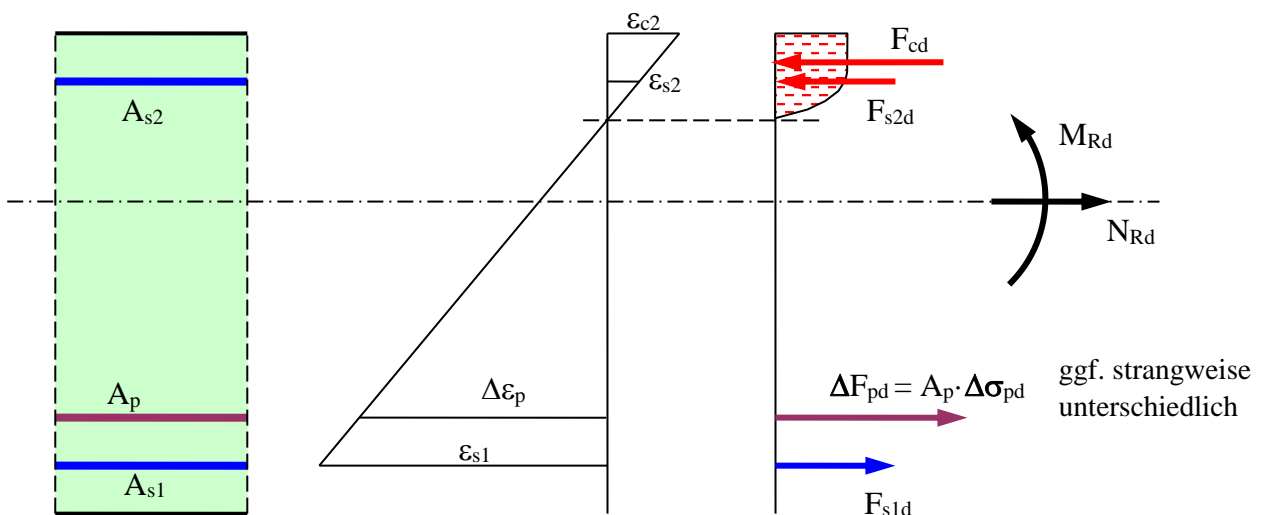


$$E_d \leq R_d$$

Beanspruchung E_d



Bauteilwiderstand R_d



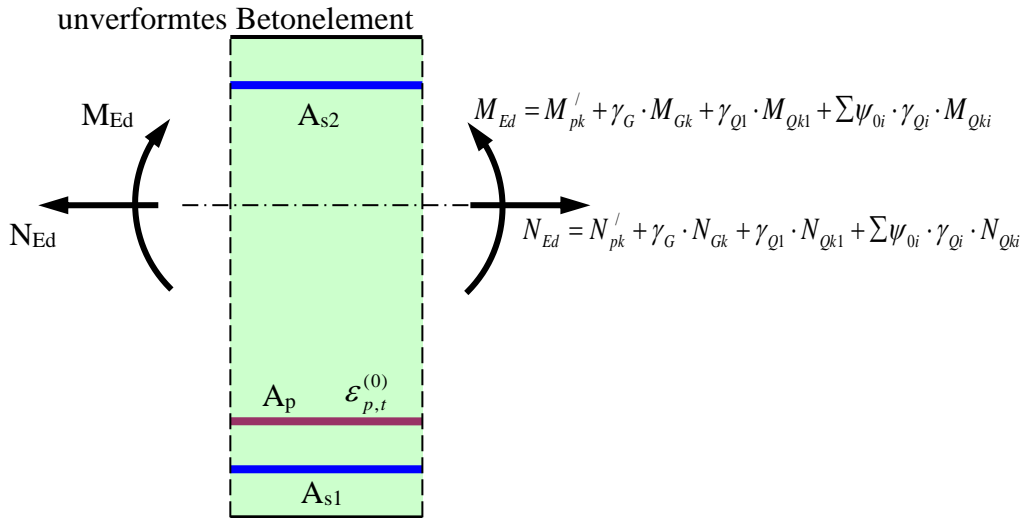
Die Zusatzdehnung $\Delta \epsilon_p$ und damit die Zusatzkraft ΔF_{pd} ist nur bei Vorspannung mit sofortigem oder nachträglichem Verbund rechnerisch von Bedeutung. Bei Vorspannung ohne Verbund kann eine geringe Zusatzdehnung im Spannstahl im GZT nur mit erheblichem Rechenaufwand berücksichtigt werden und sollte daher nur überschlägig oder gar nicht in Ansatz gebracht werden.

Die Vordehnung des Spannstahls $\epsilon_{p,t}^{(0)}$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t entspricht der Spannbettdehnung und kann daher wie diese aus der Vorspannkraft zur Zeit t mit den bekannten Zusammenhängen berechnet werden.

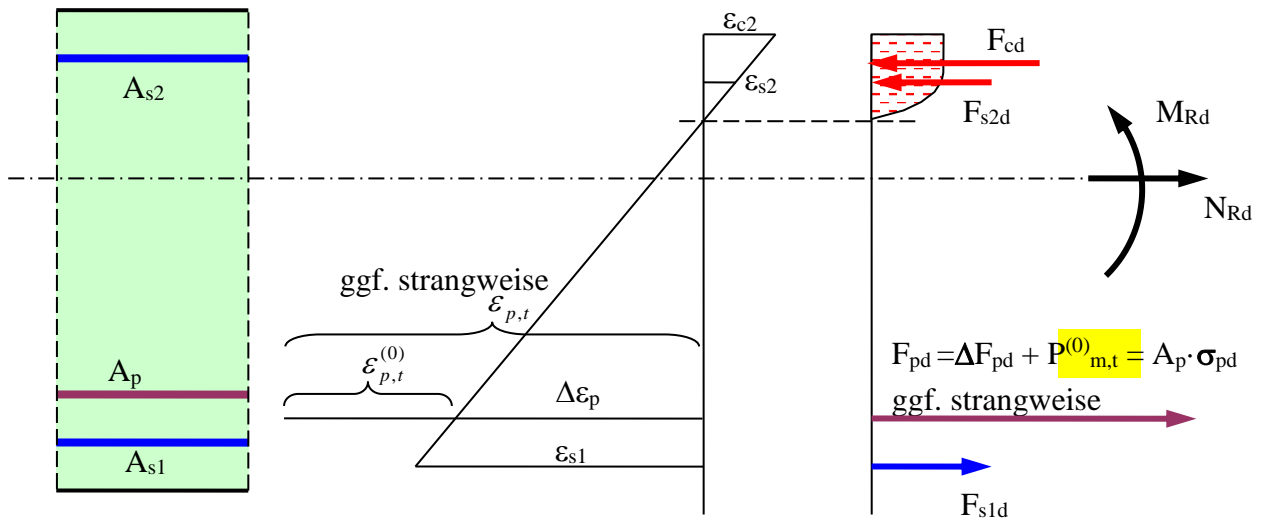
Bei mehreren Spanngliedsträngen ist die Vordehnung und anschließend die gesamte Spannstahldehnung strangweise zu ermitteln.

Zur rechtechnischen Vereinfachung wird häufig für Bauteile mit Verbund der statisch bestimmte Anteil der Vorspannung von der Beanspruchungsseite auf die Bauteilwiderstandsseite verschoben:

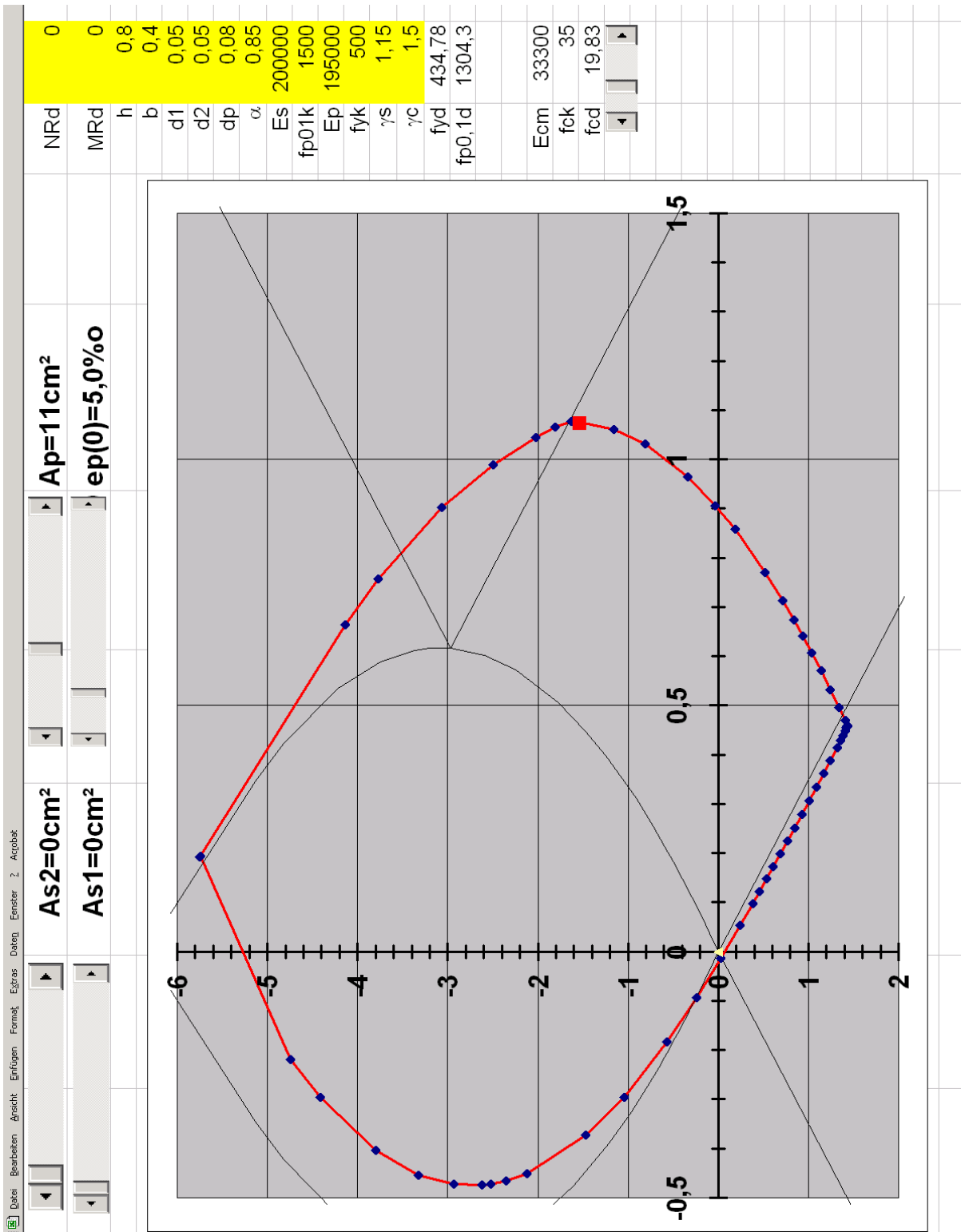
Beanspruchung E_d ohne statisch bestimmten Anteil der Vorspannung



Bauteilwiderstand R_d mit statisch bestimmten Anteil der Vorspannung



Das nachfolgend dargestellte Bemessungsprogramm benutzt diese Art des Nachweises (Wirkung des statisch bestimmten Anteils der Vorspannung auf der Seite des Bauteilwiderstandes).



Bemessung mit üblichen Bemessungsverfahren

Bei der Verwendung von üblichen Bemessungsverfahren (μ_{Eds} - oder k_d -Verfahren) wird das Moment auf die Stahlachse der am meisten gezogenen Seite bezogen. Hierzu muss zunächst die am meisten gezogene Seite aus dem Gesamtmoment unter Einbeziehung des statisch bestimmten Anteils der Vorspannung ermittelt werden. Dabei sind die günstigen oder ungünstigen Auswirkungen der ständigen und veränderlichen Einwirkungen zu beachten. In einem Fall liegt die am meisten gezogene Seite auf der Seite des Spannstahls, im anderen ihr gegenüber.

Fall A: Spannstahl auf der am meisten gezogenen Seite (bzw. am wenigsten gedrückten Seite)

Oftmals kann auf die rechnerische Berücksichtigung einer schlaffen Bewehrung verzichtet werden. Die Schnittgrößen können dann auf die Spannstahlachse bezogen werden (der statisch bestimmte Anteil der Vorspannung wird zweckmäßigerweise auf der Bauteilwiderstandsseite berücksichtigt).

$$\frac{M_{Edp}}{\zeta \cdot d} + N_{Ed} \leq F_{pd}$$

Sofern eine schlaffe Bewehrung zusätzlich berücksichtigt werden muss und diese in gleicher Höhe im Bauteil wie der Spannstahl angeordnet ist, kann analog verfahren werden. Die aufnehmbare Kraft setzt sich dann aus zwei Anteilen zusammen:

$$\frac{M_{Edp}}{\zeta \cdot d} + N_{Ed} \leq F_{pd} + F_{sld}$$

Liegt die notwendige schlaffe Bewehrung nur unwesentlich unterhalb der Spannbewehrung, dann werden die Schnittgrößen ebenfalls auf die Achse des Spannstahls bezogen, die geringe Zunahme des Hebelarmes bei der schlaffen Bewehrung kann auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt werden. Damit bleibt:

$$\frac{M_{Edp}}{\zeta \cdot d} + N_{Ed} \leq F_{pd} + F_{sld}$$

Sollte die Dehnung des schlaffen Stahls die 25%-Grenze geringfügig überschreiten, kann dieses unbeachtet bleiben.

Fall B: Spannstahl auf am meisten gedrückten Seite

Dieser Fall kann für Bauzustände unter maximaler Vorspannwirkung und geringen äußeren Einwirkungen (z.B. nur g_1 mit $\gamma_G=1,0$) eintreten. Hierfür müssen die Schnittgrößen auf die Achse der schlaffen Bewehrung bezogen werden, die der Spannbewehrung gegenüberliegt. Dabei muss die gesamte Vorspannwirkung (einschl. des statisch bestimmten Anteils der Vorspannung) auf der Einwirkungsseite berücksichtigt werden. Aus der zusätzlichen Stauchung des Spannstahls und der Stauchung des schlaffen Stahls können Druckkräfte wie bei einer Druckbewehrung angerechnet werden. Dies empfiehlt sich in der Regel bei den Druckkräften, die sich aus der Spannbewehrung ergeben.

5 Grenzzustand der Tragfähigkeit für Querkraft

5.1 Grundlagen des Tragverhaltens

In Bild 5-1 ist ein Bauteilabschnitt dargestellt, der überwiegend auf Querkraft beansprucht wird. Aus der Verformung des Bauteilabschnittes erkennt man, dass sich die Diagonale in der einen Richtung verkürzt und sich die Diagonale in der anderen Richtung verlängert. Dadurch entsteht eine schräge Druckkraft und eine dazu senkrecht verlaufende Zugkraft. Wegen der geringen Betonzugfestigkeit entsteht ein schräger Riss, der sich wegen der kombinierten Beanspruchung aus Biegung und Querkraft (vgl. Bild 5-2) insbesondere an Zwischenauflägern häufig aus einem Biegeriss entwickelt. Im Gebrauchszustand endet der Riss in der Biegedruckzone.

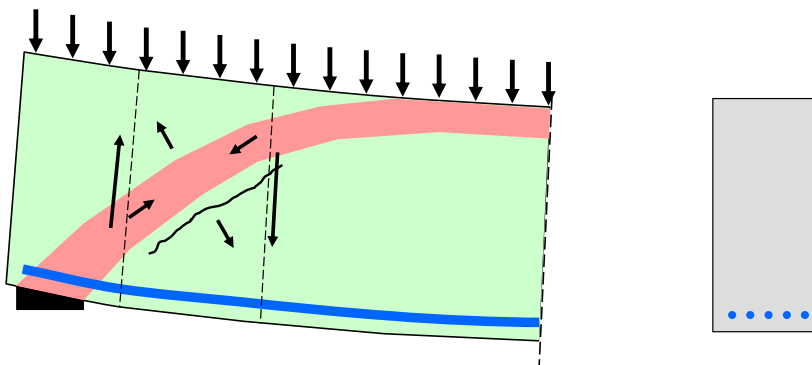


Bild 5-1 Entstehung eines schrägen Querkraftrisses am Auflager

Bei Balken unter Querkraftbeanspruchung muss eine spezielle Querkraftbewehrung vorgesehen werden, um die durch den Schrägriss frei werdende Kraft aufnehmen zu können. Aufgrund des Rissbildes wäre es sinnvoll, die Bewehrung möglichst senkrecht zum Riss anzuordnen. Aus baupraktischen Gründen werden fast ausschließlich senkrecht zur Bauteilachse angeordnete „Bügel“ eingebaut (Bild 5-2).

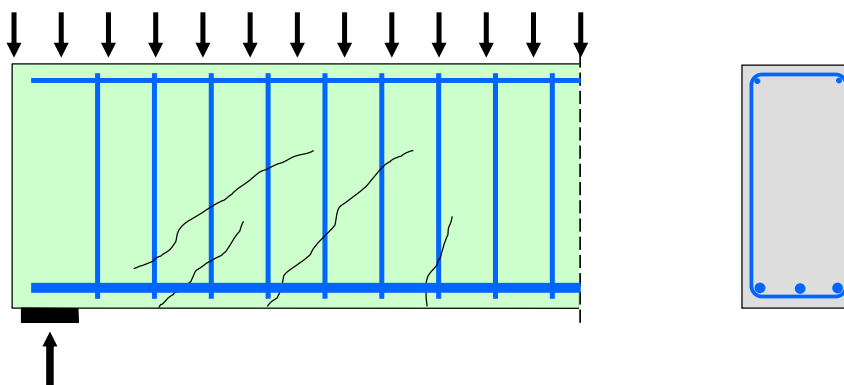


Bild 5-2 senkrechte Querkraftbewehrung zur Aufnahme der Kräfte bei Rissbildung infolge Querkraftbeanspruchung

Für querkraftbewehrte Bauteile stellt sich eine fachwerkartige Tragwirkung ein (Bild 5-3 und Bild 5-4).

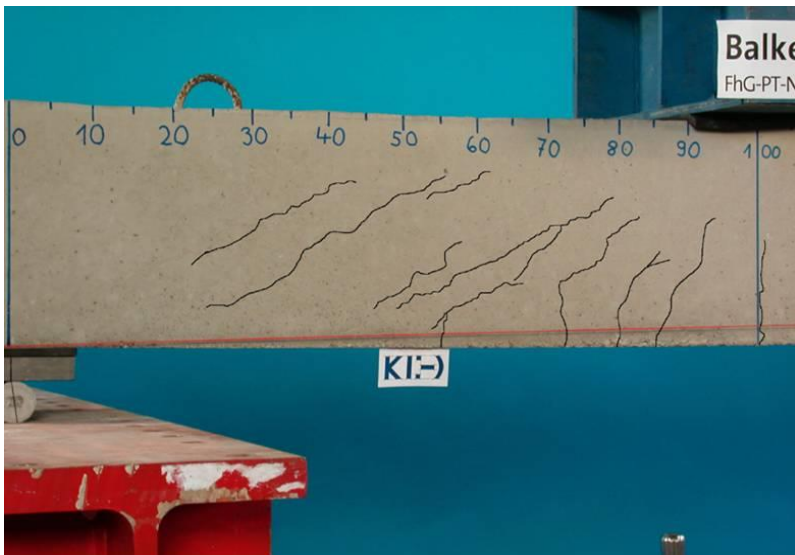


Bild 5-3 Rissbildung bei Querkraftbeanspruchung (Verwendung senkrechter Bügel), siehe dazu [27]

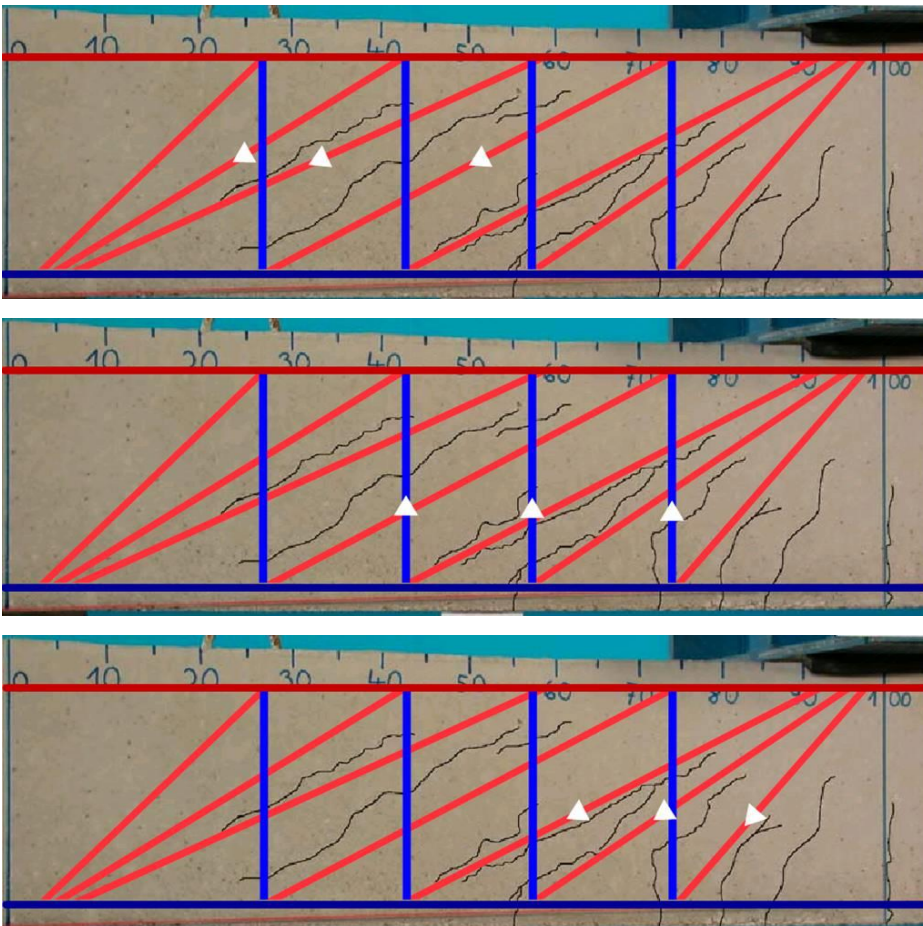


Bild 5-4 Vermutete Druck- und Zugstreben mit Abtrag der Kräfte, siehe dazu [27]

Für querkraftbeanspruchte Bauteilbereiche können mehrere Versagensmechanismen beobachtet werden:

- Bei profilierten Trägern mit schmalen Stegen kann die Druckstrebe des Fachwerks versagen (Bild 5-5 a).
- Bei Trägern mit ausreichend dimensionierten Stegen können die Zugpfosten (i.d.R. Bügel) des Fachwerks infolge der entstandenen Zugkräfte versagen. Als definierter Versagenszustand ist

nicht der Zugbruch der Bewehrung wie bei der Biegebemessung, sondern schon das Erreichen der Fließdehnung des Stahls ε_{yd} festgelegt (Bild 5-5 b), da sich sonst infolge großer Schrägrissbreiten übermäßig große Verformungen einstellen, die zum Verlust korrespondierender Tragmechanismen (Bild 5-14 und Bild 5-16) führen.

- Am Trägersauflager kann ein Verankerungsbruch entstehen, wenn das Auflager sehr kurz ist und die horizontale Kraftkomponente der Druckstrebe nicht ausreichend sicher in die Biegezugbewehrung eingeleitet werden kann (Bild 5-5c).

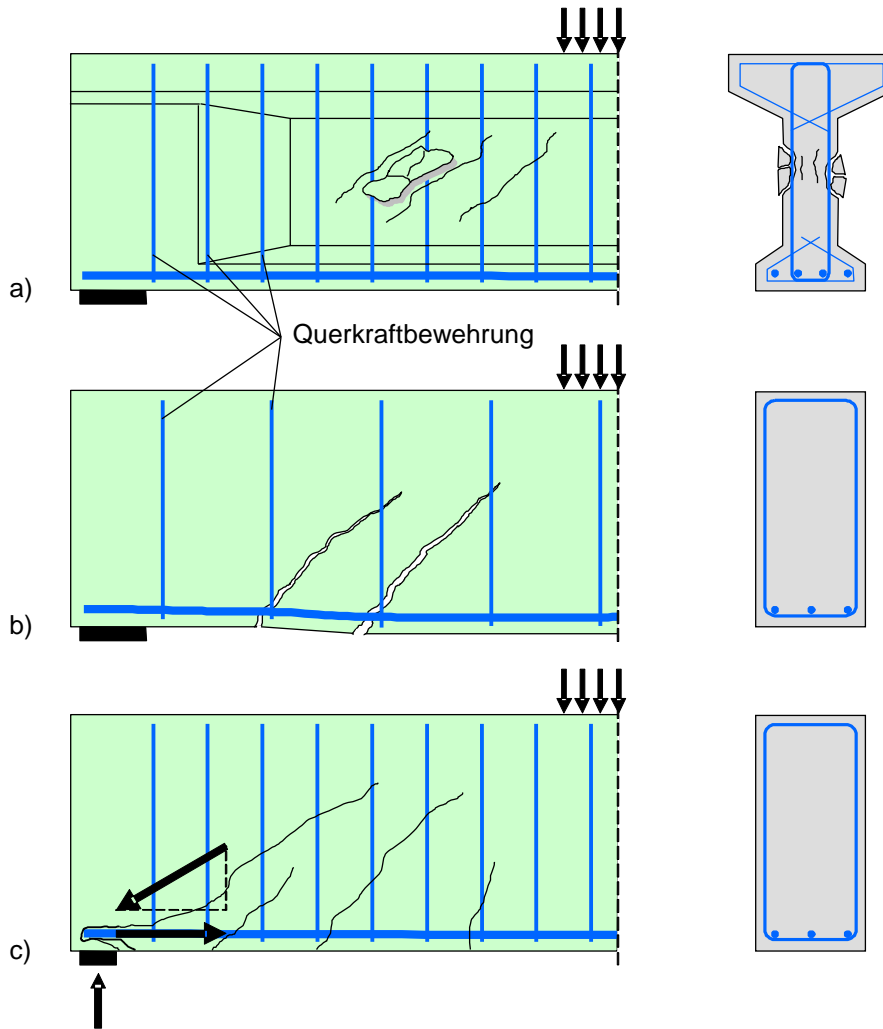


Bild 5-5 Querkräfteversagen von Bauteilen mit Querkraftbewehrung
a) Stegdruckbruch
b) Stegzugbruch
c) Verankerungsbruch

Bei geringer Querkraftbeanspruchung kann man bei plattenartigen Bauteilen auf eine Querkraftbewehrung verzichten. Solche Bauteile versagen infolge fortschreitender Schrägrissbildung durch Einschnüren der Biegedruckzone und / oder durch Abspalten der Biegezugbewehrung (Bild 5-6).

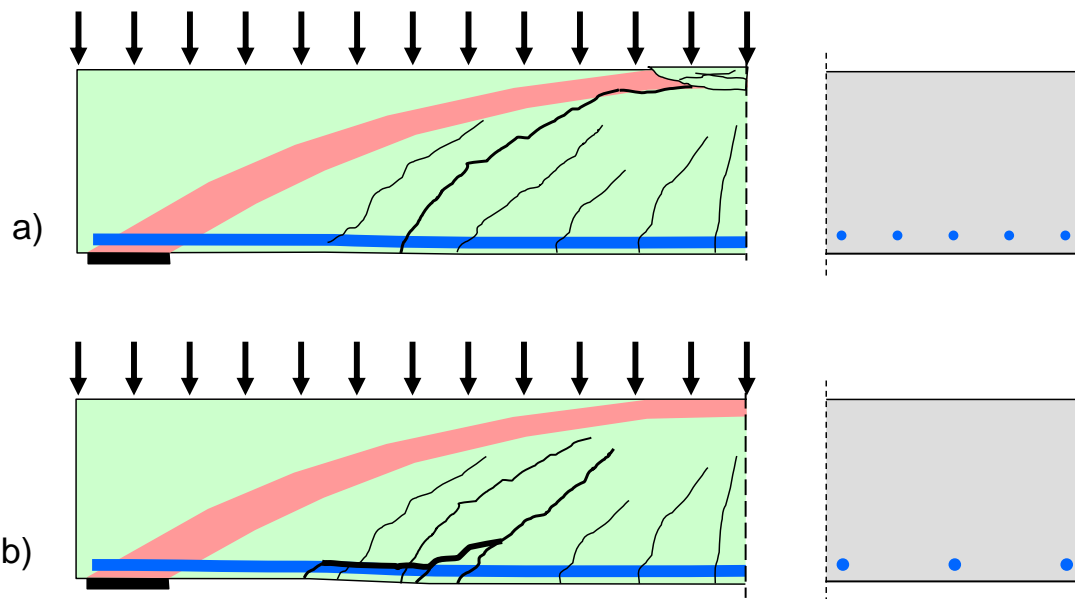


Bild 5-6 Querkraftversagen von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung (bei Platten zulässig)
 a) Schrägriss mit Einschnürung der Biegedruckzone
 b) Schrägriss mit Abspalten der Biegezugbewehrung

Bild 5-7 verdeutlicht, warum sich die Risse in Auflagernähe schräg, etwa unter einem Winkel von 45° , bilden. Dort sind die Hauptspannungsverläufe eines Balkens unter Gleichlast kurz vor der Rissbildung (im Zustand I) gezeigt. Die Trajektorien (Verlaufslinien der Hauptspannungen) schneiden die Schwerachse unter 45° .

Nebenbei bemerkt erkennt in Bild 5-7 natürlich auch, dass sich die Hauptspannungen in einem symmetrischen System mit symmetrischer Belastung entsprechend symmetrisch einstellen. Dies trifft für den Querkraftverlauf mit den unterschiedlichen Vorzeichen scheinbar nicht zu (es liegt daran, dass in der Technischen Mechanik mal Vorzeichenregelungen an Schnittufern definiert wurden, glücklicherweise wissen die Balken nichts von unseren manchmal willkürlich getroffenen Definitionen).

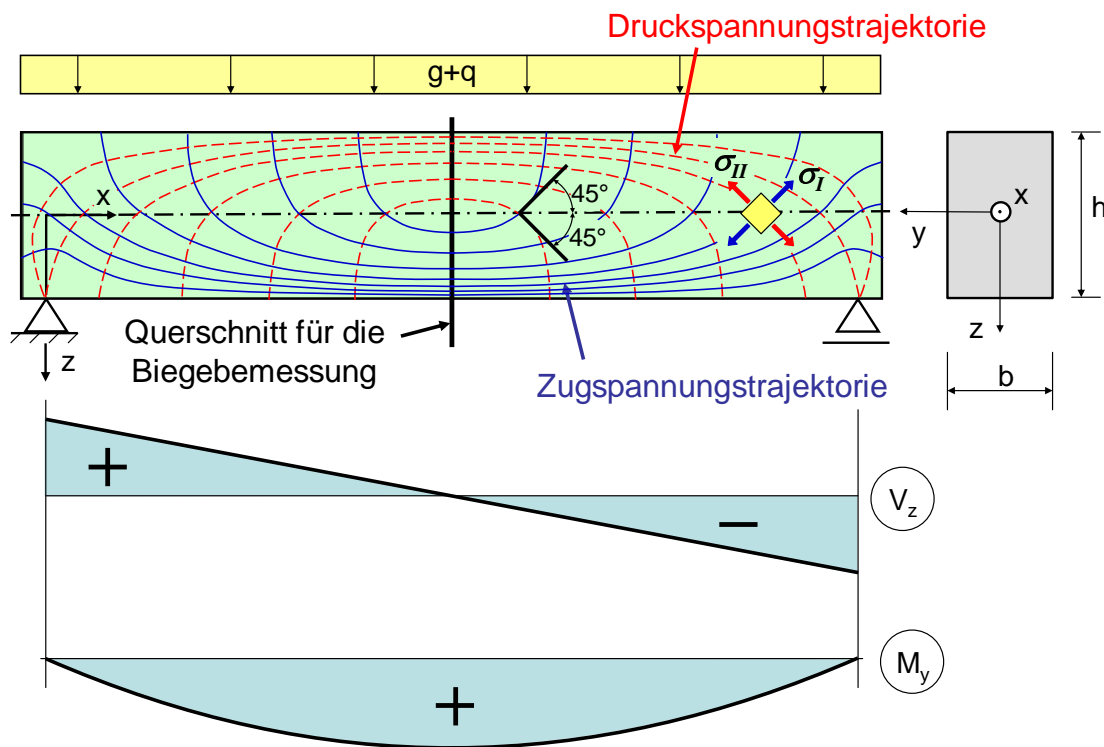


Bild 5-7 Verlauf der Hauptspannungen in einem ungerissenen Bauteil

Die sehr gute Einführung in die Querkraftbemessung sowie die vielen Erläuterungen mit Hintergrundinformationen in *Zilch/Zehetmaier* [6] sind sehr zu empfehlen.

5.2 Fachwerkmodell für Bauteile mit Querkraftbewehrung

Seit *Emil Mörsch* (1872-1950) wird das parallelgurtige Fachwerkmodell zur Beschreibung des Tragverhaltens eines Stahlbetonbalkens verwendet und liegt noch heute den Nachweisen der DIN 1045-1 und des EC 2 mit nur geringen Modifikationen zugrunde. Es ist ein sehr einfaches Modell. Vorschläge für etwas detailliertere Modelle zur wirklichkeitsnäheren Beschreibung des Querkrafttragverhaltens gab es viele, jedoch hat sich bisher keines als praxistauglich erwiesen. In die Querkraftbemessung gehen sehr viele Parameter ein, die von vielen der vorgeschlagenen Modelle nicht hinreichend erfasst werden können. Daher müssen wir uns mit der recht groben, aber einfachen Bemessung des Fachwerks begnügen (wenn Sie erst mal das Nachweisverfahren kennen, werden Sie von der Einfachheit nicht mehr überzeugt sein).

In Bild 5-8 ist das idealisierte Fachwerk dargestellt, die Bemessung des Ober- und Untergurtes ist bereits durch die Biegebemessung erledigt. Die Querkraftbewehrung wird in Zugstreben konzentriert gedacht, sie kann zwischen 45° und 90° geneigt ausgebildet werden. Das idealisierte Fachwerkmodell ist innerlich statisch bestimmt, alle Stabkräfte können durch Freischneiden ermittelt werden (Bild 5-9). Realistischer ist ein mehrfach ineinander geschachteltes Fachwerk, was sich jedoch einer einfachen Berechnung entzieht. Der Winkel der Druckstreben im Zustand des Versagens θ ist durch die Balkengeometrie nicht vorgegeben, er wird uns im Abschnitt 5.2.3 noch etwas beschäftigen. Entweder versagt die Querkraftbewehrung (die Zugstreben oder Zugpfosten) oder die Druckstreben des Fachwerks. Die Bemessung ist dann wirtschaftlich, wenn das Versagen von Zug- und Druckstrebe gleichzeitig eintritt.

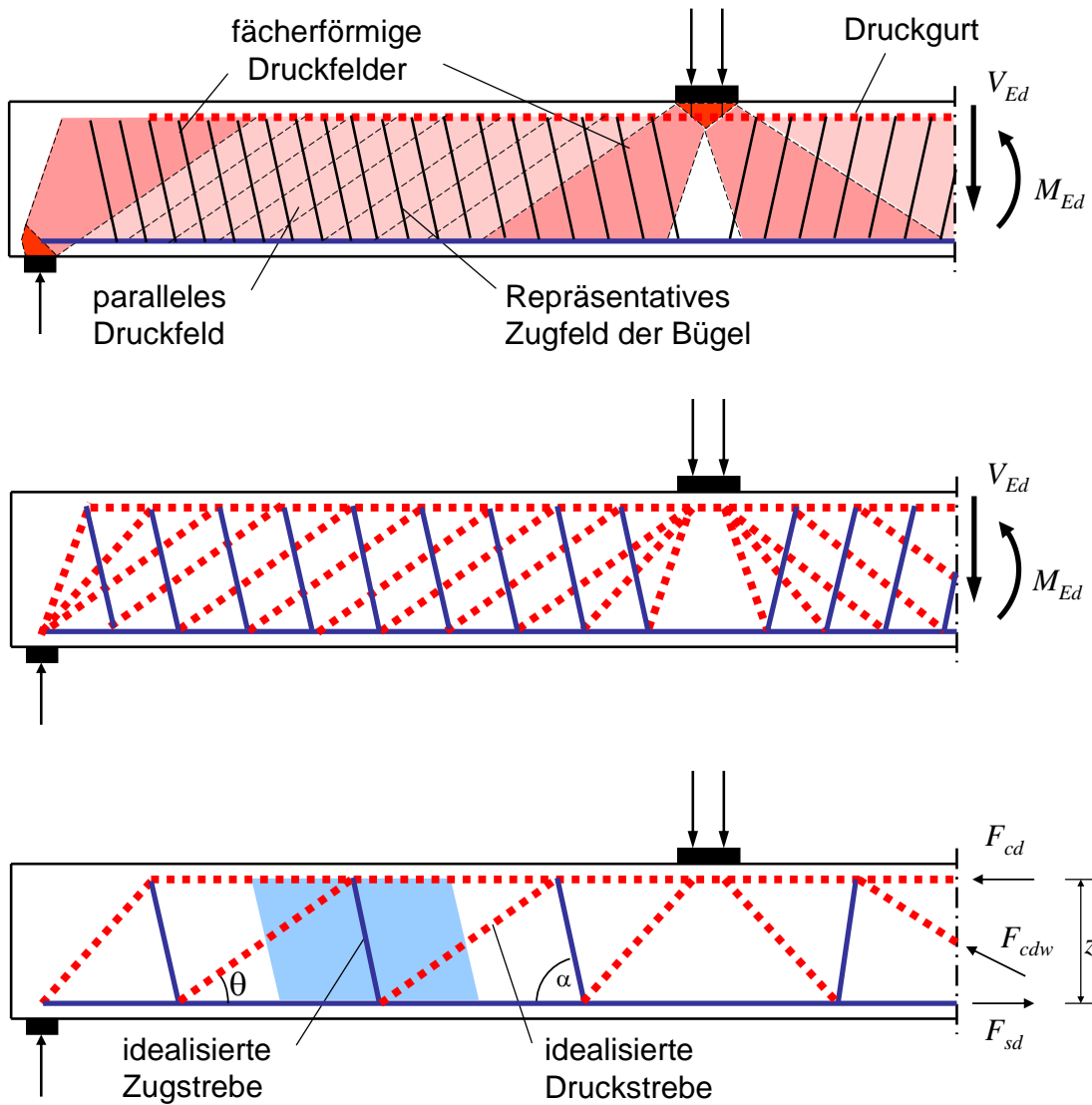


Bild 5-8 idealisiertes Fachwerkmodell zur Beschreibung des Lastabtrages in Stahlbetonbalken in verschiedenen Idealisierungsstufen

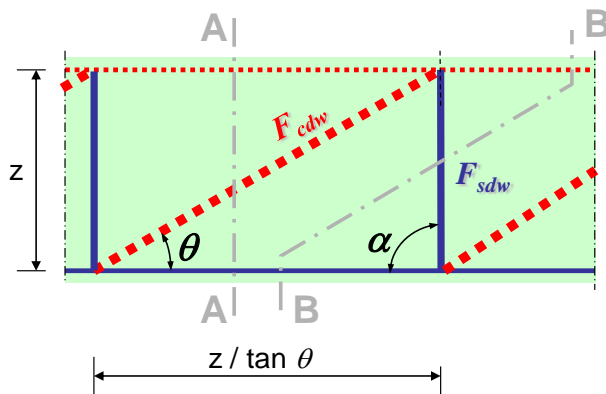


Bild 5-9 Fachwerkgeometrie bei Verwendung senkrechter Querkraftbewehrung

Der innere Hebelarm z (Abstand zwischen der resultierenden Biegedruckkraft und der Zugkraft in der Biegebewehrung) sollte aus der Biegebemessung übernommen werden. An Endauflagern, wo keine nennenswerten Momente auftreten, kann näherungsweise z mit $0,9 \cdot d$ angenommen werden. Nach EC2, NCI zu 6.2.3(1) darf für z kein größerer Wert angesetzt werden als $d - 2 \cdot c_{v,l}$ bzw. $d - c_{v,l}$

– 30 mm , wobei der kleinere Wert maßgebend ist. Vermutlich ist diese Regelung nur für bügelbewehrte Bauteile, insbesondere Balken und Plattenbalken vorgesehen. Für Platten ohne Querkraftbewehrung wäre die Reduzierung von z erheblich und auch nicht begründet.

Zunächst wird die Querkraft bestimmt, die durch die Tragfähigkeit der Zugstrebe (des Zugpfostens) begrenzt wird und anschließend die Querkraft, die durch die Tragfähigkeit der Druckstrebe begrenzt wird. Zum leichteren Verständnis wird die Herleitung für $\alpha = 90^\circ$ vorgenommen.

5.2.1 Tragfähigkeit der Zugstrebe

Die aufnehmbare Querkraft entspricht der Kraft im Zugpfosten:

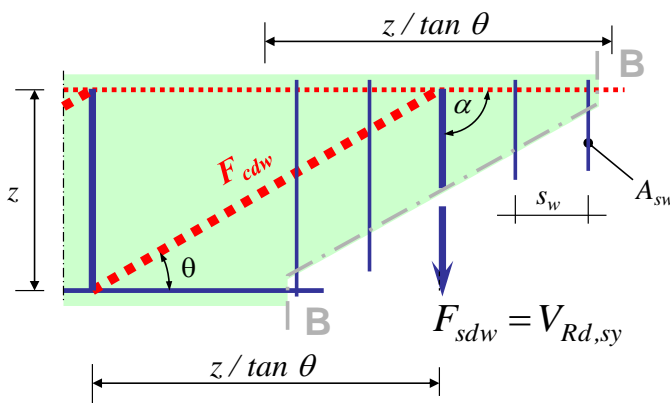


Bild 5-10 Ermittlung der aufnehmbaren Querkraft infolge der maximalen Zugstrebenkraft bei senkrechter Querkraftbewehrung

Die aufnehmbare Querkraft, die durch die Tragfähigkeit der Zugstrebe (des Zugpfostens) begrenzt wird, entspricht der Vertikalkomponente der Zugstrebe (bei $\alpha = 90^\circ$ mit Zugstrebenkraft identisch):

$$V_{Rd,sy} = f_{yd} \cdot A_{s,Zugpfosten} \quad (5-1)$$

$$V_{Rd,sy} = f_{yd} \cdot \frac{A_{sw}}{s_w} \cdot (z / \tan \theta) \quad (5-2)$$

$$\Rightarrow a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s_w} = \frac{V_{Ed}}{f_{yd} \cdot [z / \tan \theta]} \quad (5-3)$$

An dem Ergebnis ist festzustellen, dass die Bewehrung mit flacher geneigter Druckstrebe geringer ausfällt.

5.2.2 Tragfähigkeit der Druckstrebe

Die aufnehmbare Querkraft entspricht der Vertikalkomponente der Druckstrebenkraft F_{cdw} .

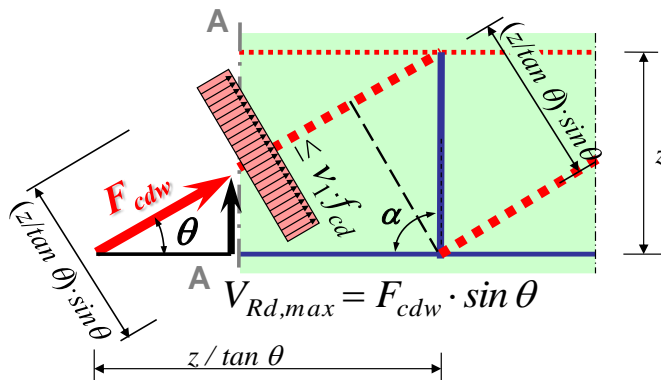


Bild 5-11 Ermittlung der aufnehmbaren Querkraft infolge der maximalen Druckstrebenkraft bei senkrechter Querkraftbewehrung

Die Querschnittsfläche der Druckstrebe ergibt sich entsprechend Bild 5-11 zu:

$$b_w \cdot (z/\tan\theta) \cdot \sin\theta \quad (5-4)$$

Dabei ist b_w die kleinste Balkenbreite zwischen den Schwerpunkten des Druck- und Zuggurtes.

Die Druckstrebe kann maximal mit der Druckspannung

$$v_1 \cdot f_{cd} \quad \text{mit } v_1 = 0,75 \text{ bis C50/60 (s. Bild 5-12)} \quad (5-5)$$

beansprucht werden. Damit ergibt sich:

$$V_{Rd,max} = v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot (z/\tan\theta) \cdot \sin^2\theta \quad (5-6)$$

Mit der bekannten trigonometrischen Beziehung

$$\sin^2\theta = \frac{1}{1 + 1/\tan^2\theta} \quad (5-7)$$

lautet dann die aufnehmbare Querkraft, die durch die Tragfähigkeit der Druckstrebe begrenzt wird (vgl. Glg. (6.9) von EC2):

$$V_{Rd,max} = \frac{v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z}{\tan\theta + 1/\tan\theta} \quad (5-8)$$

Je größer θ , desto größer ist die aufnehmbare Querkraft. Bei senkrechter Querkraftbewehrung ergibt sich der Größtwert der aufnehmbaren Querkraft für $\theta = 45^\circ$:

$$\max V_{Rd,max} = \frac{v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z}{\tan 45^\circ + 1/\tan 45^\circ} = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z \quad (5-9)$$

Mit einem steileren Winkel wächst aber auch der Bedarf an Querkraftbewehrung (vgl. Glg. (5-2)). Im Beton ist der Winkel der Druckstrebe nicht geometrisch vorgegeben, es kann sich jeder Winkel einstellen. Im Zustand des Versagens passt sich nach der Plastizitätstheorie der Winkel so an, dass die Tragfähigkeit von Zugstrebe und Druckstrebe gleich ausgeschöpft ist. Für eine wirtschaftliche

Bemessung kann man also den kleinstmöglichen Druckstrebenwinkel ermitteln. Leider kann die Gleichung (5-8) nicht nach $\tan\theta$ aufgelöst werden. Denkbar wäre eine grafische bzw. tabellarische Lösung, doch hiervon wird kein Gebrauch gemacht, weil ein Mindestwinkel für die Druckstrebe einzuhalten ist (siehe Abschnitt 5.2.3), der überwiegend maßgebend wird.

In Gleichung (5-8) wird die Druckfestigkeit mit ν_1 abgemindert. Da die Druckstrebe durch die Bügelkräfte in Querrichtung auf Zug beansprucht wird, muss die Festigkeit nach Bild 5-12 abgemindert werden.

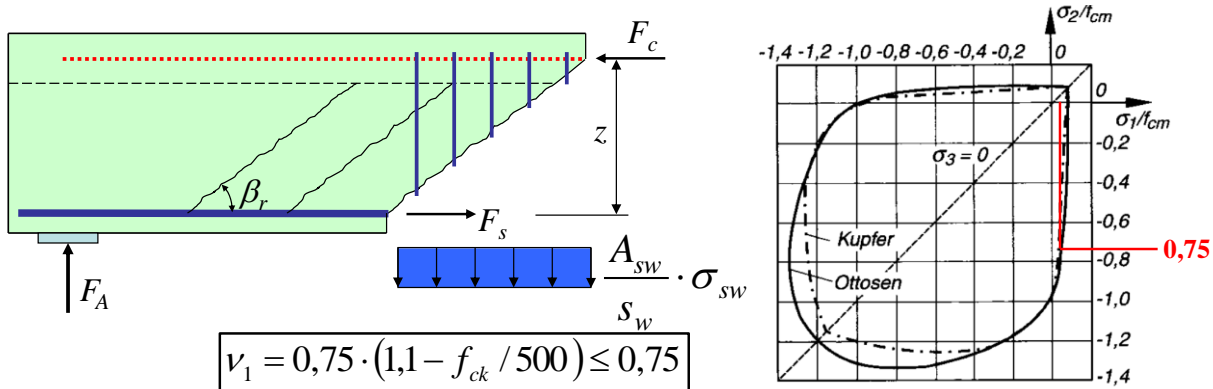


Bild 5-12 Abminderung der Druckfestigkeit bei gleichzeitiger Wirkung einer Querkzugbeanspruchung durch die Querkraftbewehrung, Diagramm nach [28] entnommen aus [29]

In dem Diagramm von Bild 5-12 wird die Betondruckfestigkeit unter zweiachsialer Beanspruchung dargestellt. Bei zusätzlichem Druck in Querrichtung steigt die Festigkeit leicht an, bei Zug in Querrichtung fällt die Druckfestigkeit stark ab.

Bei Spanngliedern in Hüllrohren ist zu beachten, dass die Druckstrebe die Hüllrohre in einem relativ steilen Winkel kreuzt. Insbesondere bei nicht verpressten Hüllrohren (z.B. im Bauzustand), aber auch bei verpressten Hüllrohren ist eine geringere Breite der Druckstrebe $b_{w,nom}$ für nebeneinander liegende Hüllrohre zu beachten:

$$b_{w,nom} = b_w - 1,2 \cdot \sum d_h \quad \text{für nicht verpresste Hüllrohre oder verpresste Kunststoffhüllrohre und Spannglieder ohne Verbund} \quad (5-10)$$

$$b_{w,nom} = b_w - 0,5 \cdot \sum d_h \quad \text{für verpresste Hüllrohre bis C50/60} \quad (5-11)$$

$$b_{w,nom} = b_w - 1,0 \cdot \sum d_h \quad \text{für verpresste Hüllrohre ab C55/67} \quad (5-12)$$

Für d_h ist der Außendurchmesser des Hüllrohres einzusetzen. Falls $\sum d_h \leq b_w / 8$, kann bei verpressten Metallhüllrohren auf den Abzug verzichtet werden.

5.2.3 Wahl des Druckstrebenwinkels

Wie in Abschnitt 5.2.2 festgestellt wurde, sollte für eine wirtschaftliche Bemessung der kleinstmögliche Druckstrebenwinkel bestimmt werden. Dabei ist nach EC2 eine untere Grenze für $\tan\theta$ zu beachten.

Die auf Mörsch zurückgehende Annahme beim Fachwerkmodell (hier mit senkrechten Zugpfosten dargestellt) war, dass die Druckstreben parallel zu den schrägen Rissen (ca. 40° für Bauteile ohne Längsspannung σ_{cd}) verlaufen.

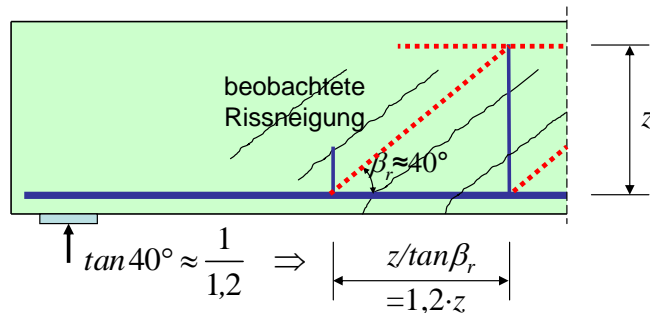


Bild 5-13 Fachwerkgeometrie bei der Annahme, dass die Druckstrebe parallel zu den Rissen verläuft

Die in Versuchen beobachtete Bügelspannung war insbesondere bei geringer Querkraftbeanspruchung im GZT deutlich niedriger als die der Bemessung zugrunde gelegte Streckgrenze (Umformung von Gleichung (5-1)):

$$\sigma_{s,Zugpfosten} = \sigma_{s,Bü,Versuch} = \frac{V_{Ed}}{A_{s,Zugpfosten}} < f_{yd} \quad (5-13)$$

Hieraus erkannte man, dass auch Nebentragwirkungen am Tragverhalten beteiligt sind.

Als Nebentragwirkungen sind zu beobachten:

- Aus einer in der Realität geneigten Obergurkraft kann über ihren vertikalen Kraftanteil ein Teil der Querkraft aufgenommen werden.
- Infolge der in Rissrichtung verschobenen Rissufer werden Widerstandskräfte in tangentialer und auch in normaler Richtung aktiviert (Bild 5-14). Zusätzlich werden an der Risswurzel Zugspannungen senkrecht zum Riss infolge des Zugspannungs-Rissöffnungs-Gesetzes übertragen. Hieraus kann eine Querkraftkomponente ermittelt werden (Bild 5-15).
- Infolge des vertikalen Versatzes der Risskanten wird die Biegezugbewehrung wie ein Dübel beansprucht (Bild 5-16). Der Dübel kann über seinen Scherwiderstand einem Teil der Querkraft übernehmen.

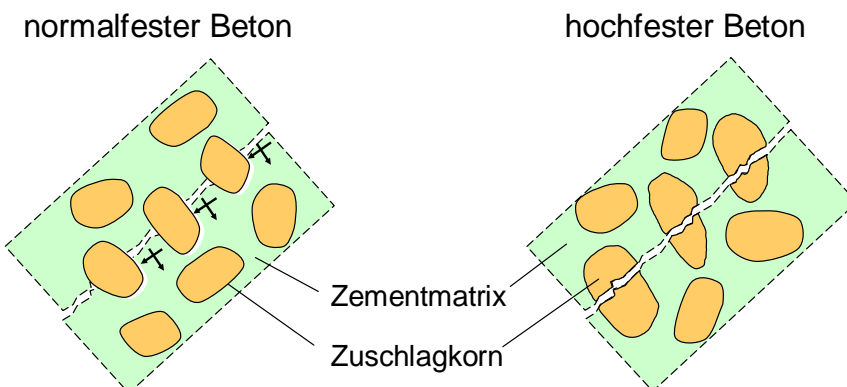
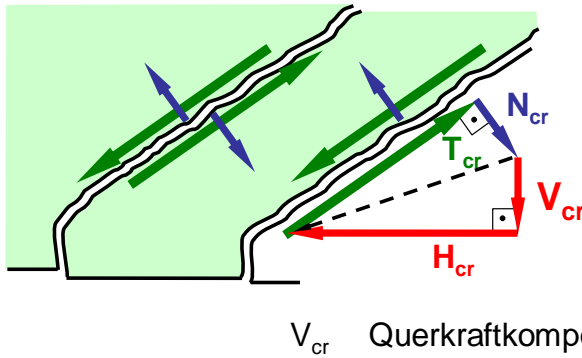


Bild 5-14 Rissverzahnung

Bei hochfestem Beton geht der Riss zunehmend auch durch die Gesteinskörnungen. Dadurch fällt die Rissreibung bei höherfesten Betonen anteilig geringer aus.



V_{cr} Querkraftkomponente

Bild 5-15 Umrechnung von Tangential- und Normalkraft im Riss auf Querkraft- und Horizontalkraftkomponente

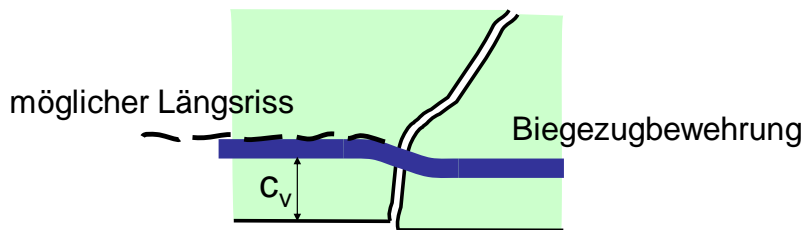


Bild 5-16 Dübelwirkung der Biegezugbewehrung

Anhand von umfangreichen Versuchsauswertungen können alle Nebentragwirkungen in dem Traganteil $V_{Rd,cc}$ zusammengefasst.

$V_{Rd,cc}$ entspricht einer zusätzlichen Kraft im Zugpfosten, das heißt, bei gleicher einwirkender Querkraft V_{Ed} kann entweder die Bewehrung des Zugpfostens reduziert oder der Wirkungsbereich des Zugpfostens in Längsrichtung um Δx größer angenommen werden. Hieraus ergibt sich eine flachere Druckstrebe bei gleicher Rissneigung, die Druckstrebe verläuft im Versagenszustand also nicht parallel zu den Rissen, die sich bereits bei geringerer Beanspruchung gebildet haben.

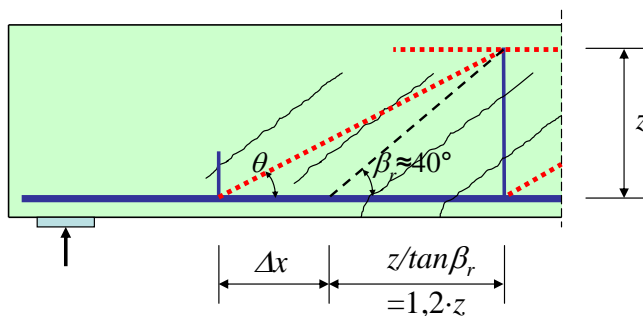


Bild 5-17 Fachwerkgeometrie bei Berücksichtigung der Nebentragwirkungen

aus der Geometrie des Fachwerkdreieckes ergibt sich:

$$\frac{\Delta x}{z/\tan \beta_r} = \frac{V_{Rd,cc}}{V_{Rd,Bü}} = \frac{V_{Rd,cc}}{V_{Ed} - V_{Rd,cc}} \quad (5-14)$$

und für den Winkel der Druckstreben:

$$\tan \theta = \frac{z}{\Delta x + z/\tan \beta_r} = \frac{\tan \beta_r}{\frac{\Delta x}{z/\tan \beta_r} + 1}$$

Nach Einsetzen von Gleichung (5-14):

$$\tan \theta = \frac{\tan \beta_r}{\frac{V_{Rd,c}}{V_{Ed} - V_{Rd,cc}} + 1}$$

und kurzer Umformung:

$$\tan \theta = \left(1 - \frac{V_{Rd,cc}}{V_{Ed}} \right) \cdot \tan \beta_r \quad (5-15)$$

ergibt sich der in der Norm verwendete Ausdruck unter Annahme einer Rissneigung von $\beta_r = 40^\circ$:

$$\tan \theta = \frac{1 - \frac{V_{Rd,cc}}{V_{Ed}}}{1,2} \quad \text{für } \sigma_{cd} = 0 \quad (5-16)$$

Da $V_{Rd,cc}$ begrenzt ist, stellt die so ermittelte Neigung der Druckstrebe eine untere Grenze dar. Die Festlegung dieser unteren Grenze steht zunächst im Widerspruch zur Plastizitätstheorie. Aufgrund des begrenzten Verformungsvermögens des Betons kann die ideale Plastizität bei Stahlbetonbauteilen aber auch nicht vorausgesetzt werden, wie Versuchsauswertungen ergeben.

Der Mitwirkungsanteil $V_{Rd,cc}$ wird in der derzeitigen Normengeneration nach *Reineck* [22] folgendermaßen definiert:

$$V_{Rd,cc} = c \cdot 0,48 \cdot f_{ck}^{1/3} \cdot b_w \cdot z \quad (\text{hier ohne Längsspannungen: } \sigma_{cd} = 0) \quad (5-17)$$

mit

$$c = 0,50$$

f_{ck} charakteristischer Wert der Druckfestigkeit des Betons in N/mm²

$f_{ck}^{1/3}$ in N/mm²

Wie man erkennt, ist die Formulierung unabhängig vom Belastungsniveau. Zur Vermeidung einer rechnerisch zu großen Mitwirkung bei geringer Querkraftbeanspruchung, wird als weitere untere Grenze $\tan \theta = 1/3$ ($\theta \approx 18,5^\circ$) festgelegt. Damit geht rechnerisch die Mitwirkung $V_{Rd,cc}$ bei abnehmender Querkraft proportional auf Null zurück (vgl. Bild 5-22).

Bei großer Querkraftbeanspruchung kann die Druckstrebe mit der unteren Grenze der Druckstrebenneigung nach Gleichung (5-16)

$$\tan \theta = \frac{1 - \frac{V_{Rd,cc}}{V_{Ed}}}{1,2}$$

nicht mehr nachgewiesen werden. In diesen Fällen kann sich die Druckstrebe entsprechend der Plastizitätstheorie steiler aufstellen, bei senkrechter Querkraftbewehrung bis zu 45° . Vergleichsrechnungen zeigen, dass für Normalbeton mit $\alpha = 90^\circ$ und $\sigma_{cd} = 0$ bis etwa $0,95 \cdot \max V_{Rd,max}$ die untere Grenze der Druckstrebenneigung verwendet werden kann ($\max V_{Rd,max}$ nach Gleichung (5-9)).

Oberhalb von $0,95 \cdot \max V_{Rd,max}$ wird die Querkraftbewehrung vereinfachend ohne den Mitwirkungsanteil (volle Querkraftdeckung ausschließlich durch Querkraftbewehrung) und für $\theta =$

45° ermittelt. Die mögliche Wahl des Druckstrebenwinkels zwischen der unteren Grenze und 45° zur wirtschaftlichen Ausnutzung der Querkraftbewehrung kann nur mühselig auf iterativem Wege erfolgen, praktisch ist die Wahl von 45° genügend wirtschaftlich. Nähere Hinweise hierzu in Abschnitt 5.4.2.

Hinweis: Die Herleitung des flachesten Druckstrebenwinkels erfolgte für senkrechte Querkraftbewehrung. Für geneigte Querkraftbewehrung ergäbe sich nach dem vorgestellten Modell eine kleinere Druckstrebenneigung, was jedoch nach EC2 offensichtlich unberücksichtigt bleibt.

Bei vorgespannten Bauteilen ist die beobachtete Rissneigung flacher als 40°. Sie ergibt sich näherungsweise aus dem Zustand I, gemäß *Reineck* [22] wird nach EC2 angenommen:

$$\tan \beta_r = \frac{1}{1,2 + 1,4 \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}} \quad (\text{bei Längsdruck ist } \sigma_{cd} \text{ positiv einzusetzen!}) \quad (5-18)$$

Entsprechend Gleichung (5-15) erhält man die Formulierung in EC2:

$$\tan \theta = \frac{1 - \frac{V_{Rd,cc}}{V_{Ed}}}{1,2 + 1,4 \cdot \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}} \quad (5-19)$$

Aufgrund der Versuchsauswertungen ist der Mitwirkungsanteil $V_{Rd,cc}$ für längsdruckbeanspruchte Bauteile geringer, nach EC2:

$$V_{Rd,cc} = c \cdot 0,48 \cdot f_{ck}^{1/3} \cdot \left(1 - 1,2 \cdot \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \right) b_w \cdot z \quad (\sigma_{cd} \text{ bei Längsdruck positiv!}) \quad (5-20)$$

$$c = 0,50$$

f_{ck} charakteristischer Wert der Druckfestigkeit des Betons in N/mm²

$f_{ck}^{1/3}$ in N/mm²

5.3 Bemessungswerte der einwirkenden Querkraft

Im allgemeinen Fall eines Bauteils mit veränderlicher Bauteilhöhe verlaufen die inneren Kräfte nicht parallel zur Systemlinie, dadurch entstehen Kraftkomponenten senkrecht zur Systemlinie, die zusammen mit dem Querkraftwiderstand des Steges V_{Ed} der einwirkenden Querkraft $V_{Ed,0}$ gegenübergestellt werden müssen. Die Komponenten können im günstigen Fall den Bauteilwiderstand vergrößern oder bei ungünstiger Konstellation vermindern.

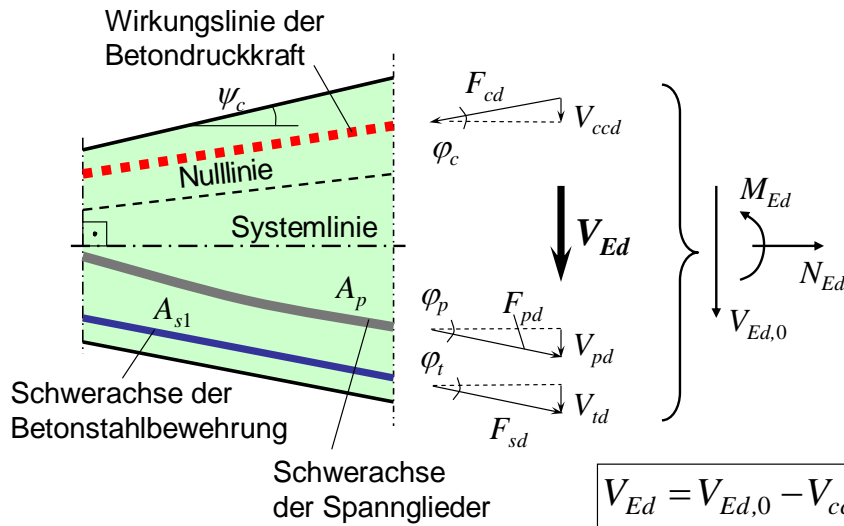


Bild 5-18 Bemessungswert der einwirkenden Querkraft bei Bauteilen mit veränderlicher Bauhöhe und/oder geneigter Spannbewehrung (alternativ kann der stat. best. Anteil der Vorspannung auch auf der Einwirkungsseite in Rechnung gestellt werden)

Bei vorgespannten Bauteilen muss ein ggf. vorhandener statisch unbestimmter Anteil der Querkraft infolge Vorspannung bei $V_{Ed,0}$ berücksichtigt werden.

5.3.1 Unterscheidung nach der Art der Lagerung

An Auflagern ist die maßgebende Nachweisstelle in Längsrichtung des Tragwerkes generell am Auflagerend definiert. Für die maximal aufnehmbare Querkraft infolge der Tragfähigkeit der Druckstrebe sollte vereinfachend die Querkraft aus der Auflagerachse verwendet werden.

Bei direkter Lagerung darf für den Nachweis der Zugstrebe der Nachweisschnitt in der Entfernung von d vom Auflagerend entfernt angenommen werden, da die in dem Bereich kurz vor dem Auflager eingeleiteten Lasten direkt über die Druckstrebe ins Auflager abgetragen werden. Dies gilt nur bei Lasteinleitung an dem dem Auflager gegenüberliegenden Bauteilrand (i.d.R. am oberen Rand).

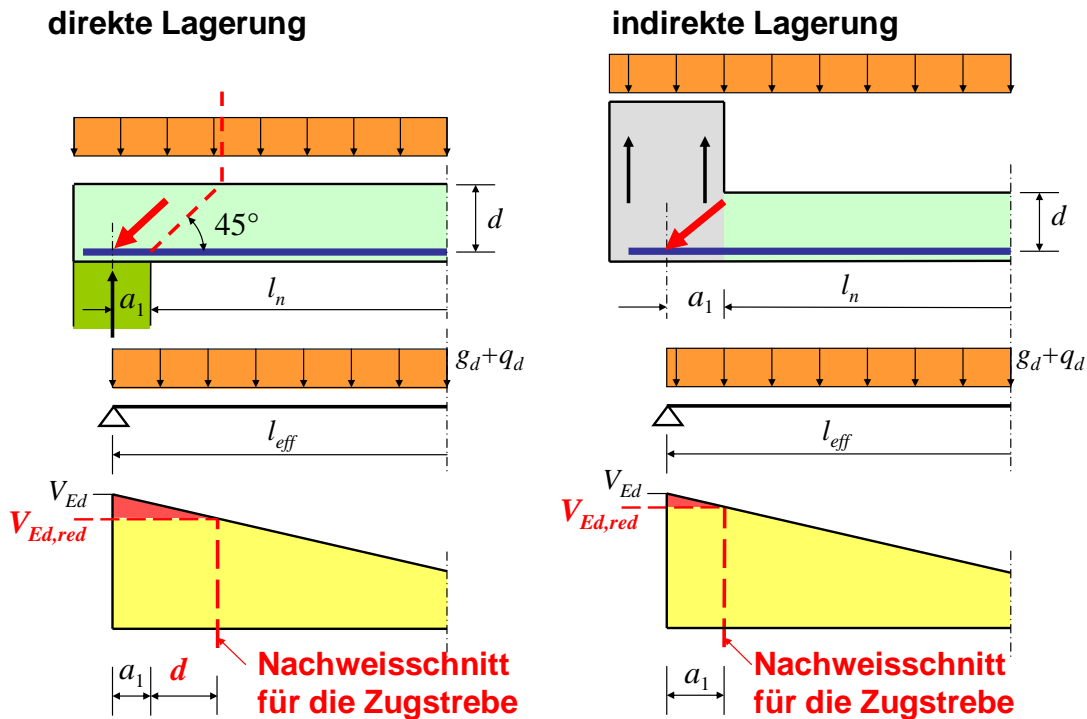


Bild 5-19 Bemessungswert der einwirkenden Querkraft in Abhängigkeit von der Art der Lagerung

Wenn das lastabtragende Bauteil ein Stahlbetonbiegebauteil ist, dann muss für eine direkte Lagerung die Bauteilunterkante des lastbringenden Bauteils oberhalb der Mitte des lastabtragenden Bauteils liegen. Andernfalls liegt eine indirekte Lagerung vor.

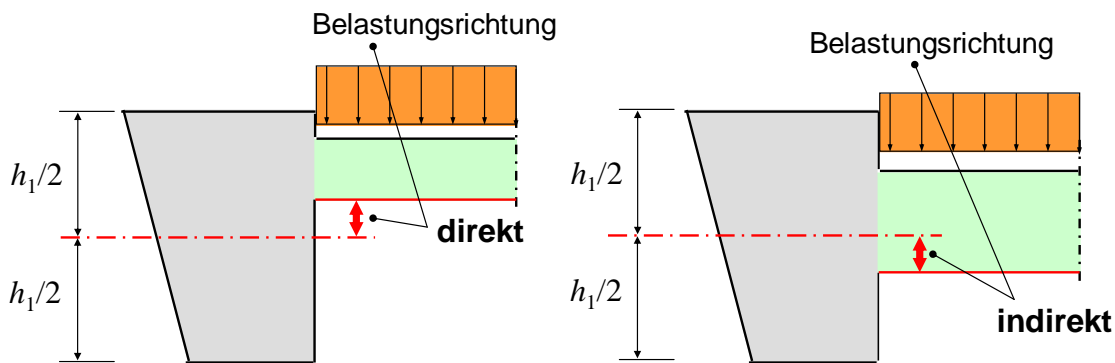


Bild 5-20 Abgrenzung zwischen direkter und indirekter Lagerung bei Auflagerung auf einem Biegebauteil

5.3.2 Auflagernahe Einzellast bei direkter Lagerung

Bei einer auflagnahen Einzelkraft nach Bild 5-21 wird ein Teil der Kraft auf direktem Wege zum Auflager abgeleitet. Je dichter die Kraft an den Auflagerrand rückt, um so größer ist dieser direkte Anteil. Falls die Längsbewehrung vollständig am Auflager verankert ist, darf die Querkraftbewehrung für eine reduzierte Querkraft bemessen werden. Zur Aufnahme von $V_{Ed,red}$ darf nur die Bewehrung aus dem mittleren Bereich von $0,75 \cdot a_v$ angerechnet werden:

$$V_{Ed,red} \leq A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin \alpha \quad \text{mit} \quad A_{sw} = a_{sw} \cdot 0,75 a_v \Rightarrow \text{erfa}_{sw} = \frac{V_{Ed,red}}{0,75 a_v \cdot f_{yd} \cdot \sin \alpha} \quad (5-21)$$

Die Druckstrebe ist ohne Abminderung nachzuweisen.

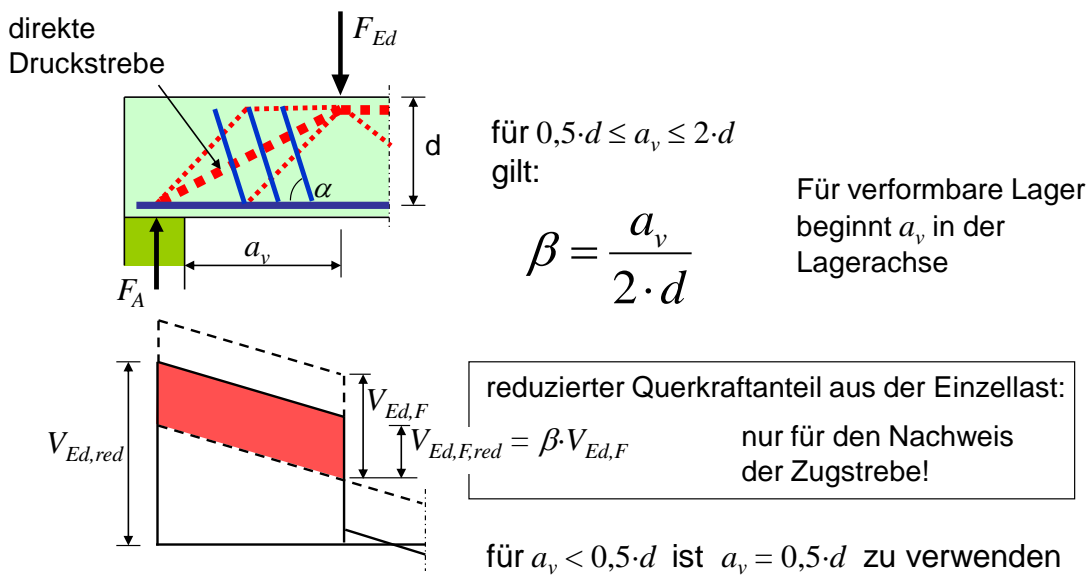


Bild 5-21 maßgebende Querkraft bei auflagennaher Einzellast

Diese Reduzierung darf auch bei Bauteilen ohne Querkraftbewehrung beim Nachweis nach den Gleichungen (5-35) und (5-36) genutzt werden (EC2, 6.2.2(6)), um Querkraftbewehrung bei Platten zu vermeiden. Zusätzlich ist dann nachzuweisen:

$$V_{Ed} \leq 0,5 \cdot b_w \cdot d \cdot \nu \cdot f_{cd} \quad \text{mit} \quad \nu = 0,675 \quad (5-22)$$

Für Betonfestigkeitsklassen über C50/60 ist ν mit dem Faktor $(1,1 - f_{ck}/500)$ zu reduzieren.

5.4 Nachweis von Bauteilen mit Querkraftbewehrung

Entsprechend der allgemeinen Formulierung gilt auch hier für den Nachweis im GZT:

$$E_d \leq R_d \quad (5-23)$$

Für den Nachweis von Querkraften ist an jeder Stelle, insbesondere an den Stellen der größten Querkraften nachzuweisen:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max} \quad (5-24)$$

und

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,sy} \quad \text{nach EC2: } V_{Rd,s} \quad (5-25)$$

Mit dem ersten Nachweis wird indirekt die Tragfähigkeit der Druckstrebe sichergestellt (direkt wird der entsprechende Querkraftanteil nachgewiesen). Der zweite garantiert indirekt die ausreichende Tragfähigkeit der Zugstrebe. Der zweite Nachweis wird in dieser Form selten geschrieben, weil in der Regel die erforderliche Querkraftbewehrung gesucht wird.

Zunächst soll der häufig auftretende Standardfall betrachtet werden. Im Abschnitt 5.4.2 werden dann die Regelungen für den allgemeinen Fall angegeben.

5.4.1 Praktische Bemessung und Querkraftdeckung für den Standardfall

Für den Standardfall gelten folgende Voraussetzungen:

- zur Bauteilachse senkrechte Querkraftbewehrung $\alpha = 90^\circ$
- keine Normalspannungen infolge Vorspannung oder äußeren Normalkräften
- Verwendung von Normalbeton

Die maximale Querkrafttragfähigkeit erhält man bei ausgenutzter Druckstrebe für $\theta = 45^\circ$ nach Gleichung (5-9):

$$\max V_{Rd,max} = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z \quad (5-26)$$

Für die Ermittlung der Bewehrung ergibt sich aus Vergleichsrechnungen, dass für Stahlbetonbauteile im Standardfall für V_{Ed} -Werte (an Auflagern für die $V_{Ed,red}$ -Werte) oberhalb von etwa $0,95 \cdot \max V_{Rd,max}$ volle Querkraftdeckung und darunter verminderte Querkraftdeckung vorliegt. Die Querkraftbewehrung ergibt sich dann

- bei voller Querkraftdeckung (näherungsweise und auf der sicheren Seite für den Winkel $\theta = 45^\circ$) aus der Gleichung (5-2):

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s_w} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{yd}} \cdot 1,0 \quad (5-27)$$

- bei verminderter Querkraftdeckung aus den Gleichungen (5-2) und (5-16) :

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s_w} = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{V_{Ed} - V_{Rd,cc}}{1,2 \cdot z \cdot f_{yd}} \\ \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{yd}} \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad (5-28)$$

Der Traganteil $V_{Rd,cc}$ kann in voller Größe nur für die Tragwerksbereiche abgezogen werden, für die $\tan\theta > 1/3$. Dies ist dort der Fall, wo $V_{Ed} \geq V_{Rd,cc}/0,6$ ist (siehe Bild 5-22). Im Fall $V_{Ed} < V_{Rd,cc}/0,6$ wird $\tan\theta = 1/3$ maßgebend.

In Bild 5-22 stellt die grau hinterlegte Fläche den durch Querkraftbewehrung abzudeckenden Anteil der Querkraft dar.

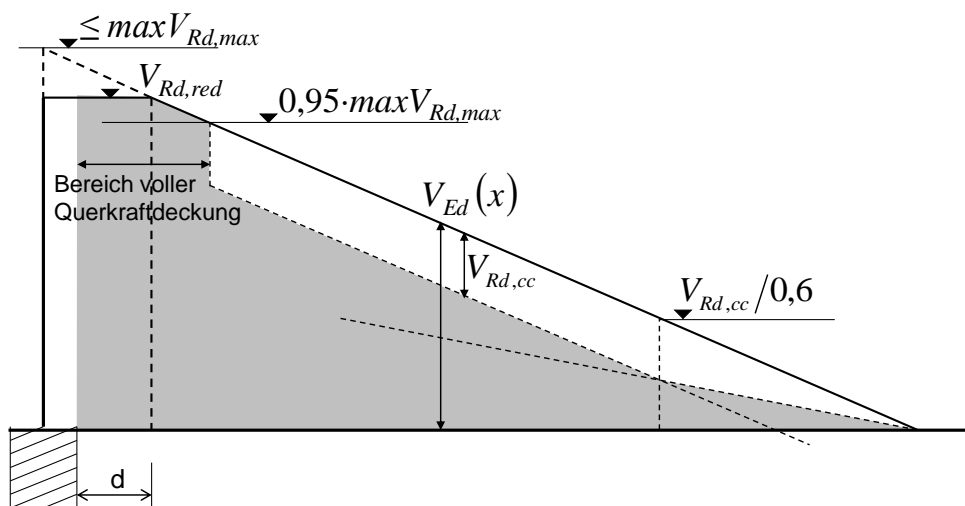


Bild 5-22 Erforderliche Abdeckung der Querkraftfläche für den Standardfall zwischen Auflager und Querkraftnullpunkt bei linearem Querkraftverlauf infolge einer Gleichlast

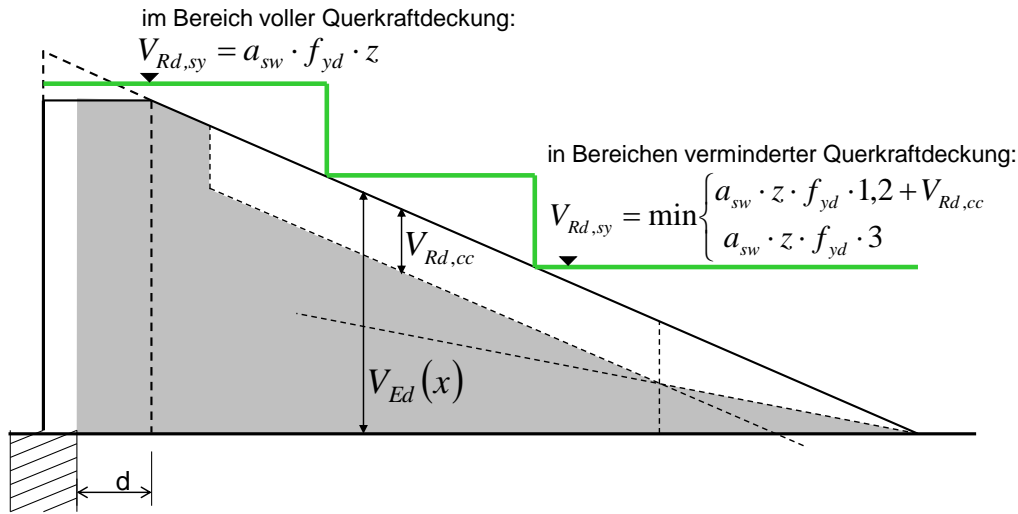


Bild 5-23 Querkraftdeckungsline für den Standardfall

Bei gestaffelter Querkraftbewehrung kann bei Beachtung der in Bild 5-24 genannten Bedingungen in die Querkraftlinie eingeschnitten werden.

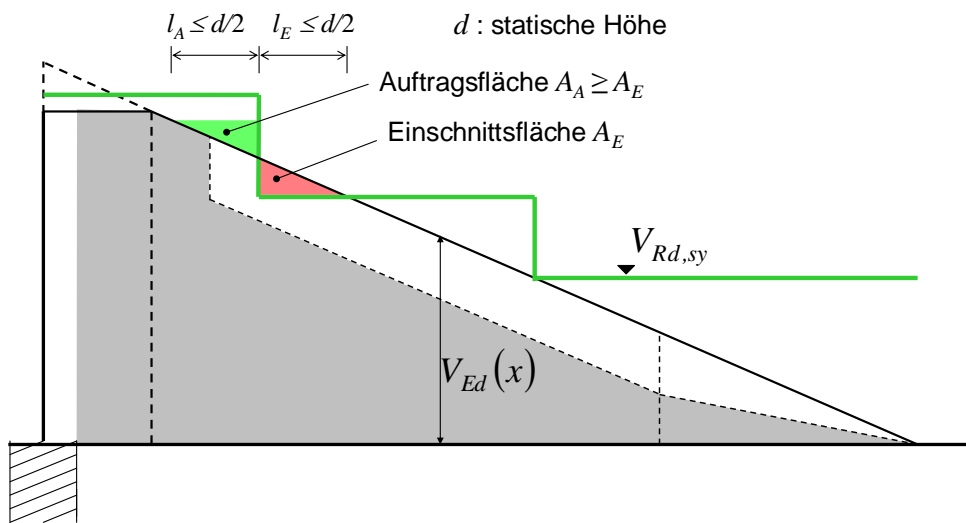


Bild 5-24 Einschneiden der Querkraftdeckungsline in die Querkraftlinie gemäß DIN 1045-1, Abschnitt 13.2.3, entsprechende Regel weiterhin zulässig, jedoch nur für oben angreifende Gleichlasten (vgl. Fingerloos/Hegger/Zilch: Eurocode 2 für Deutschland, S.260)

5.4.2 Allgemeiner Bemessungsfall

Bisher haben wir nur Bauteile ohne Normalkraft und mit senkrechter Querkraftbewehrung (senkrecht zur Stabachse) betrachtet. Die Querkraftbewehrung kann allerdings auch bis zu 45° geneigt ausgeführt werden. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn die Tragfähigkeit der Druckstrebe bei senkrechter Querkraftbewehrung nicht ausreichend ist. Die Neigung muss jeweils in Richtung der Auflager erfolgen (vgl. Bild 5-8). Die Neigung bezieht sich immer auf die Stabachse und nicht auf die Horizontale.

Der aufnehmbare Querkraftanteil der geneigten Zugstrebe ($45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) ergibt sich bei entsprechender Berücksichtigung der Geometrie analog zu 5.2.1.

$$V_{Rd,sy} = \frac{A_{sw}}{s_w} \cdot f_{yd} \cdot z \cdot (1/\tan \theta + 1/\tan \alpha) \cdot \sin \alpha \quad (5-29)$$

Ebenso kann $V_{Rd,max}$ aus der Tragfähigkeit der Druckstrebe gemäß Abschnitt 5.2.2 hergeleitet werden.

$$V_{Rd,max} = v_1 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot z \cdot \frac{1/\tan \theta + 1/\tan \alpha}{1 + 1/\tan^2 \theta} \quad (5-30)$$

Im ersten Schritt einer Bemessung ist nun an den maßgebenden Stellen im Tragwerk die Druckstrebenneigung innerhalb der gegebenen Grenzen zu wählen bzw. vorzuschätzen.

untere Grenze (flachste Druckstrebenneigung) mit $V_{Rd,cc}$ nach Gleichung (5-20):

$$\tan \theta = \max \begin{cases} 1/3 \quad (\Rightarrow \theta = 18,5^\circ) \\ \frac{1 - V_{Rd,cc}/V_{Ed}}{1,2 + 1,4 \cdot \sigma_{cd}/f_{cd}} \end{cases} \quad (5-31)$$

an Auflagern darf hier $V_{Ed,red}$ eingesetzt werden.

Es wird immer die kleinstmögliche Druckstrebenneigung angestrebt, da sich hierfür die geringste Querkraftbewehrung ergibt.

Im zweiten Schritt ist $V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$ nachzuweisen (Nachweis der Druckstrebe, siehe Glg. (5-30)). Gelingt dieser Nachweis nicht für die kleinstmögliche Druckstrebenneigung, kann ein größerer Neigungswinkel bis 45° gewählt werden. Darüber hinaus kann $V_{Rd,max}$ durch eine noch steilere Druckstrebe (maximal 60° , $\tan \theta = 1,73$) bei gleichzeitiger Neigung der Querkraftbewehrung gesteigert werden, dabei gilt:

bei $\alpha = 90^\circ$ darf θ höchstens bis 45°

bei $\alpha = 80^\circ$ darf θ höchstens bis 50°

bei $\alpha = 70^\circ$ darf θ höchstens bis 55°

bei $\alpha = 45^\circ$ bis 60° darf θ höchstens bis 60° gewählt werden, Zwischenwerte entsprechend.

Alternativ sollte zur Verbesserung der Druckstrebetragfähigkeit die Balkenbreite oder die Betongüte erhöht werden.

Im dritten Schritt erfolgt der Nachweis der Zugstrebe ersatzweise über die Ermittlung der Querkraftbewehrung an der maßgebenden Stelle x im Bauteil, ggf. auch an anderen Stellen mit dem dort vorhandenen $\tan \theta$. Für senkrechte Querkraftbewehrung ($\alpha = 90^\circ$,):

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s_w} = \frac{V_{Ed}}{f_{yd} \cdot z / \tan \theta} \quad (5-32)$$

Bei geneigter Querkraftbewehrung nach Glg. (5-34).

Im vierten Schritt (Querkraftdeckung der Querkraftlinie) wird dann die erforderliche Querkraftbewehrung in Abhängigkeit vom Querkraftverlauf bestimmt. Für eine Nachweisstelle x in Balkenlängsrichtung ist für die Zug- und Druckstrebe immer der gleiche $\tan \theta$ zu verwenden. Der $\tan \theta$ ist z.B. bei Gleichlasten entlang der Bauteilachse veränderlich. Dadurch wird die Staffelung der Bewehrung nach Glg. (5-32) rechnerisch aufwendig.

Jedoch kann unter bestimmten Randbedingungen analog zum vorhergehenden Abschnitt 5.4.1 auf die Berechnung von $\tan \theta$ an jeder Stelle x verzichtet werden: in Bauteilen oder Bauteilabschnitten mit senkrechter Querkraftbewehrung kann in Bauteilabschnitten der verminderten Querkraftbewehrung (liegt für die Abschnitte vor, wo die kleinste Druckstrebenneigung nach Gleichung (5-31) beim

Nachweis der Druckstrebe rechnerisch ausreichend ist) der Traganteil $V_{Rd,cc}$ von der einwirkenden Querkraft abgezogen werden (Gleichung(5-33)), sofern $\tan\theta$ mehr als 1/3 beträgt.

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s_w} = \frac{V_{Ed} - V_{Rd,cc}}{f_{yd} \cdot \left[z \cdot \left(1,2 + 1,4 \cdot \frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} \right) \right]} \quad \text{jedoch mind.: } a_{sw} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{yd}} \cdot \frac{1}{3} \quad (5-33)$$

an Auflagern darf dabei $V_{Ed,red}$ berücksichtigt werden

Die Staffelung der Bewehrung kann für senkrechte Querkraftbewehrung entsprechend Bild 5-25 vorgenommen werden, Einschneiden gemäß Bild 5-24 zulässig.

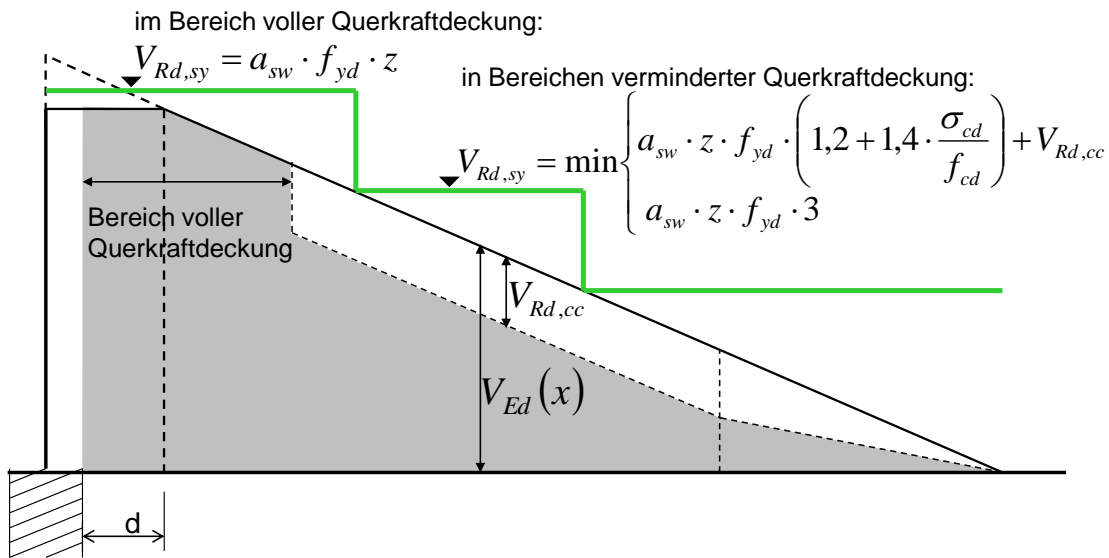


Bild 5-25 Querkraftdeckung für den allgemeinen Bemessungsfall bei Verwendung senkrechter Querkraftbewehrung

In Bauteilabschnitten höherer Beanspruchung und/oder geneigter Querkraftbewehrung muss die erforderliche Querkraftbewehrung entlang der Bauteilachse (alternativ zum allgemeinen Nachweis der Tragfähigkeit der Zugstrebe nach Glg. (5-29)) nach der umgestellten Formel unter Beachtung des veränderlichen $\tan\theta$ bestimmt werden:

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s_w} = \frac{V_{Ed}}{f_{yd} \cdot z \cdot [1/\tan\theta + 1/\tan\alpha] \cdot \sin\alpha} \quad (5-34)$$

an Auflagern darf dabei $V_{Ed,red}$ berücksichtigt werden

5.5 Bauteilwiderstand von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung

In Abschnitt 5.1 wurde bereits erwähnt, dass es auch Bauteile ohne Querkraftbewehrung gibt. Platten dürfen im allgemeinen ohne Querkraftbewehrung ausgebildet werden, da örtliche Schwachstellen durch anschließende Normalbereiche ausgeglichen werden können. Für balkenförmige Bauteile ist stets eine Mindestquerkraftbewehrung vorzusehen, da eine örtliche Schwachstelle zum Bauteilversagen führen kann.

5.5.1 Tragmodell(e) von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung

Bei Bauteilen ohne Querkraftbewehrung kann sich unter Gleichlasten ein Bogen-Zugband-Modell einstellen. Die kontinuierlich zum Auflager größer werdende Vertikalkomponente der Bogenkraft kann die Querkraft aufnehmen. Bei einem reinen Bogen-Zugband-Modell wäre die Kraft im Zugband über die volle Länge in gleicher Größe vorhanden, dies ist in der Realität nicht der Fall. Der tatsächliche Bogen liegt oberhalb der in Bild 5-26 gepunktet dargestellten Parabellinie (quad.). Trotzdem ist eine bis zu den Auflagern ungeschwächt durchlaufende Feldbewehrung mit entsprechend guter Verankerung sehr empfehlenswert, zwingend notwendig nach DIN 1045-1, 13.3.2(1) bzw. EC2, 9.3.1.2 (1) mindestens 50% der erforderlichen Feldbewehrung.

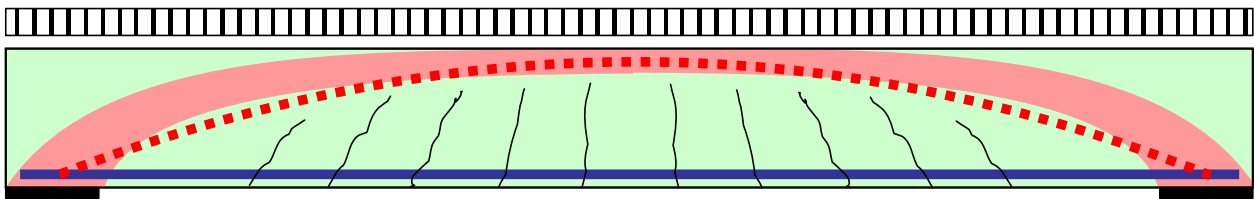


Bild 5-26 Bogen-Zugband-Modell eines Bauteils ohne Querkraftbewehrung

Ein weiteres Modell ist das Zahnmodell, das für die Modellrechnungen zur DIN 1045-1 und zum EC2 verwendet wurde. Es beschreibt insbesondere für Stützbereiche die Tragfähigkeit recht gut. In Stützbereichen wirkt neben der großen Querkraft auch ein betragsmäßig großes Stützmoment. Diese Bereiche sind kritischer als Endauflagerbereiche, an denen nur geringe Momente auftreten. Das Zahnmodell wird im nachfolgenden Abschnitt erläutert.

5.5.2 Bauteilwiderstand in gerissenen Bauteilabschnitten

Die Komponenten des Bauteilwiderstandes können am Zahnmodell qualitativ beschrieben werden. Die Rissbildung wird durch Biegemomente ausgelöst. In der ungerissenen Druckzone wird ein Teil der Querkraft übertragen. Da die Kraft in der Bewehrung auf beiden Seiten eines Zahns infolge veränderlicher Momente unterschiedlich ist, wird infolge der Zahnbiegung an seiner Wurzel eine Biegespannung hervorgerufen. Die Zähne können als in der Druckzone eingespannt betrachtet werden. Der aktivierte Biege- und Schubwiderstand der Zähne trägt wesentlich zur Querkraftaufnahme bei. Die sich gegenüberliegenden Rissufer zweier Zähne verschieben sich in tangentialer Richtung gegeneinander, so dass sich der Biege- und Schubwiderstand infolge der Kornverzahnung (siehe Bild 5-14 und Bild 5-15) zusätzlich erhöht. Weiterhin kann die Dübelwirkung (Bild 5-16) der Biegebewehrung zur Steigerung der Querkrafttragfähigkeit beitragen.

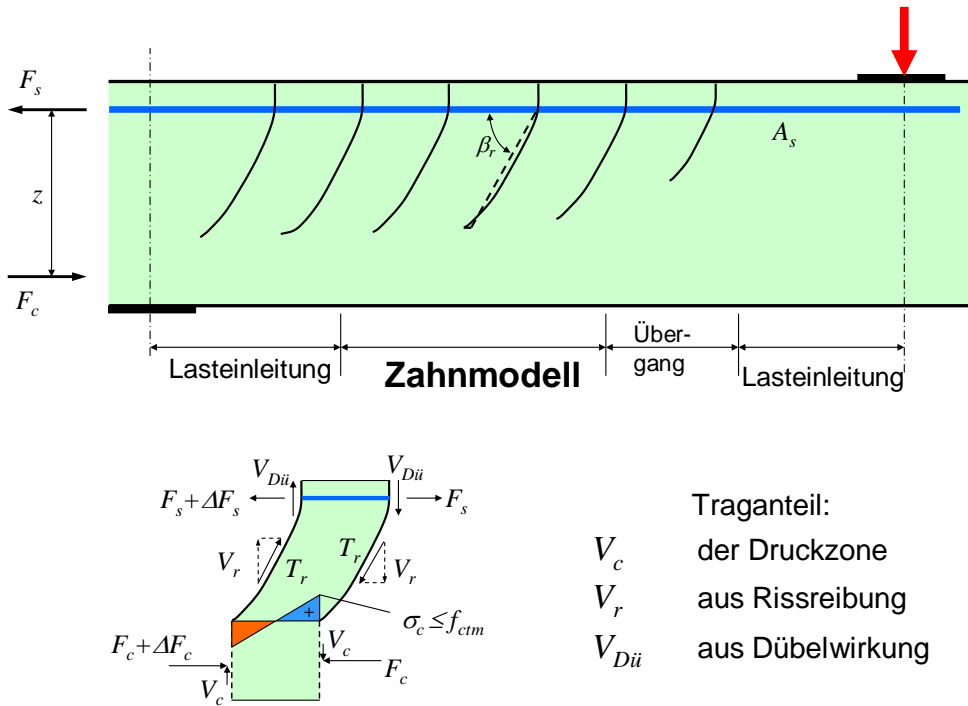


Bild 5-27 Zahnmodell zur Beschreibung der Bauteilwiderstände (Traganteile) von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung

Die verschiedenen Einflüsse können einzeln rechnerisch schwer erfasst werden. Die aufnehmbare Querkraft für Bauteile ohne rechnerisch erforderliche Querkraftbewehrung wurde bereits in DIN 1045-1 auf der Grundlage umfangreicher Modellrechnungen und Versuchsauswertungen (604 Versuche an Stahlbetonbauteilen und 285 Versuche an Spannbetonbauteilen) mit einem empirischen Ansatz beschrieben. Dabei werden die erläuterten Tragwirkungen summarisch erfasst. Der Bauteilwiderstand ist dem Bemessungswert der Beanspruchung (hier darf bei entsprechenden Voraussetzungen $V_{Ed,red}$ verwendet werden, s. Abschnitte 5.3.1 und 5.3.2) gegenüberzustellen:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,c} = \left[\frac{0,15}{\gamma_c} \cdot \kappa \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,12 \cdot \sigma_{cp} \right] \cdot b_w \cdot d \quad \text{Druck positiv!} \quad (5-35)$$

Dabei darf jedoch ein Mindestwert unabhängig von der Menge der Biegebewehrung angesetzt werden:

$$V_{Rd,c,min} = [v_{min} + 0,12 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \quad \text{Druck positiv!} \quad (5-36)$$

mit:

$$v_{min} = \frac{\kappa_1}{\gamma_c} \cdot \sqrt{\kappa^3 \cdot f_{ck}} \quad \text{in N/mm}^2 \quad (5-37)$$

dabei sind:

γ_c Teilsicherheitsbeiwert für bewehrten Beton nach EC2 Tab. NA 2.1

κ Maßstabsfaktor zur Berücksichtigung überproportional größeren Querkrafttragfähigkeit dünnerer Platten gegenüber dickeren Platten:

$$\kappa = 1 + \sqrt{\frac{200}{d [mm]}} \leq 2,0$$

f_{ck} charakteristischer Wert der Druckfestigkeit des Betons in N/mm²

$f_{ck}^{1/3}$ in N/mm²

ρ_l Längsbewehrungsgrad der Biegebewehrung (siehe hierzu Bild 5-28)

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} \leq 0,02 \quad (\text{der rechnerisch nicht größer als } 0,02 \text{ angesetzt werden darf})$$

σ_{cp} Bemessungswert der Betonlängsspannung in Höhe der Schwerachse des Querschnittes mit

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} \leq 0,2 \cdot f_{cd} \quad \text{in N/mm}^2,$$

N_{Ed} infolge äußerer Einwirkung oder Vorspannung (als Längsdruckkraft positiv)

b_w kleinste Querschnittsbreite innerhalb der Zugzone des Bauteils in mm.

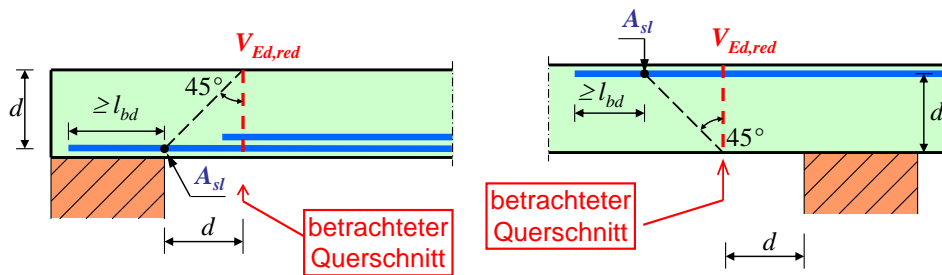
d statische Nutzhöhe in mm.

$\kappa_1 = 0,0525$ für $d \leq 600$ mm

$= 0,0375$ für $d \geq 800$ mm

für Zwischenwerte darf linear interpoliert werden.

Bei einer auflagnahen Einzellast ist Abschnitt 5.3.2 zu beachten.



bei gestaffelter Stützbewehrung:

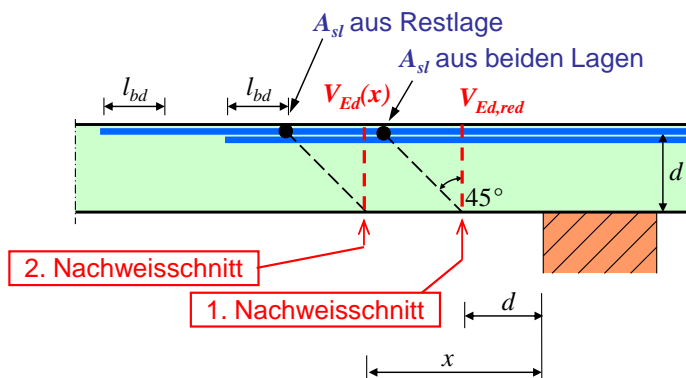


Bild 5-28 Festlegung der rechnerisch ansetzbaren Biegezugbewehrung bei Bauteilen ohne Querkraftbewehrung

Mit dem empirischen Ansatz nach Gleichung (5-35) können die oben beschriebenen Tragwirkungen bei Bauteilen ohne Querkraftbewehrung qualitativ nachvollzogen werden.

5.5.3 Bauteilwiderstand in ungerissenen Bauteilabschnitten

Es gelten folgende Regelungen für die ungerissenen Abschnitte, die gerissenen Abschnitte müssen für die Querkraft an der Übergangsstelle nach 5.5.2 nachgewiesen werden:

Ungerissene Bauteilbereiche liegen vor, wenn

- die Betonrandzugspannungen kleiner sind als

$$\frac{f_{ctk;0,05}}{\gamma_c} \quad f_{ctk;0,05} \quad \text{nach EC2, Tab. 3.1}$$

- (und vorwiegend ruhende Belastung vorliegt.)

ausgehend von der bekannten Haupt**zug**spannung im ungerissenen Zustand:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\left(\sigma_I - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2 \quad \tau_{xz} = \frac{V_{Ed} \cdot S}{I \cdot b_w}$$

$$\sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I \cdot \sigma_x} = \tau_{xz} \quad \Rightarrow \quad V_{Ed} = \frac{I \cdot b_w}{S} \cdot \sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I \cdot \sigma_x}$$

$$\text{mit } \sigma_I = \frac{f_{ctk;0,05}}{\gamma_c} \quad \text{wird} \quad V_{Ed} = V_{Rd,c}$$

$$\sigma_x = \alpha_l \cdot \sigma_{cp}$$

und es ergibt sich der Bauteilwiderstand von Bauteilen ohne rechnerisch erforderliche Querkraftbewehrung in **ungerissenen** Bauteilbereichen:

$$V_{Rd,c} = \frac{I \cdot b_w}{S} \cdot \sqrt{f_{ctd}^2 + \alpha_1 \cdot \sigma_{cp} \cdot f_{ctd}}$$

$$f_{ctd} = \alpha_{ct} \cdot \frac{f_{ctk;0,05}}{\gamma_c} \quad \text{nach EC2 Glg.(3.16)} \quad \alpha_{ct} = 0,85$$

$$\alpha_1 = \frac{l_x}{l_{pl2}} \quad \begin{array}{l} \text{bei Vorspannung mit sofortigem Verbund Abminderungsfaktor} \\ \text{für } \sigma_{cp}, \text{ da innerhalb der Krafeinleitung noch nicht der volle} \\ \text{Wert der Vorspannung wirksam ist} \\ l_{pl2} \text{ ist der obere Bemessungswert der Kraftübertragungslänge} \\ \text{des Spannstahls nach EC2 Glg.(8.18)} \\ = 1,0 \quad \text{in allen übrigen Fällen} \end{array}$$

l_x Abstand des betrachteten Querschnitts vom Beginn der Übertragungslänge

Für diesen Nachweis im ungerissenen Zustand ist der Nachweischnitt in dem Abstand von der Auflagervorderkante anzunehmen, der im Schnittpunkt einer Geraden unter 45° von der Auflagerkante bis zur Schwerachse liegt.

6 Konstruktive Durchbildung (Detailierung)

6.1 Oberflächenbewehrung bei vorgespannten Bauteilen

Zur Vermeidung von klaffenden Rissen aus Eigenspannungen infolge von Schwinden, Temperatur usw. muss eine Mindestoberflächenbewehrung angeordnet werden. Das Entstehen der Eigenspannungen wird in Abschnitt 3.3.3 erläutert. Zum besseren Verständnis ist es wichtig, sich die Eigenspannungen infolge einer Austrocknung oder einer Abkühlung im Querschnitt vorzustellen. Im Inneren des Querschnitts entstehen Druckspannungen, im Außenbereich Zugspannungen.

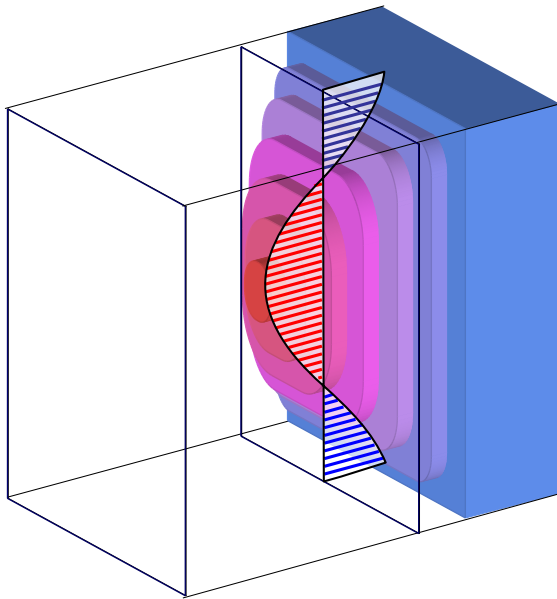


Bild 6-1 Eigenspannungen in Längsrichtung

Zur Darstellung im Querschnitt werden die Linien gleicher Temperatur wie Höhenlinien genutzt. Die Zug- und Druckspannungen entstehen in zwei Richtungen:

- senkrecht zur Querschnittsebene und
- in der Querschnittsebene in Richtung der „Höhenlinien“

Zur Begrenzung möglicher Oberflächenrisse muss eine Bewehrung senkrecht zur Querschnittsebene und eine in der Querschnittsebene vorgesehen werden.

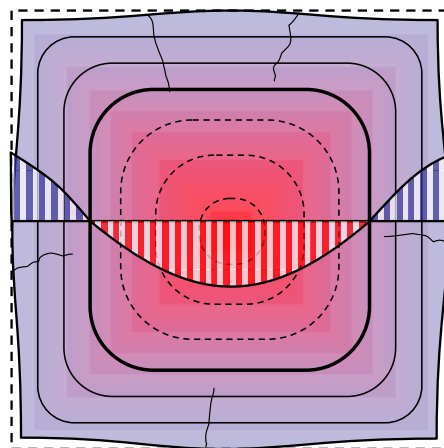


Bild 6-2 Eigenspannungen in Querrichtung

Bei langgestreckten Querschnitten oder Querschnittsteilen richtet sich die Größe des Zugspannungsbereiches nach der kleineren Bauteildicke.

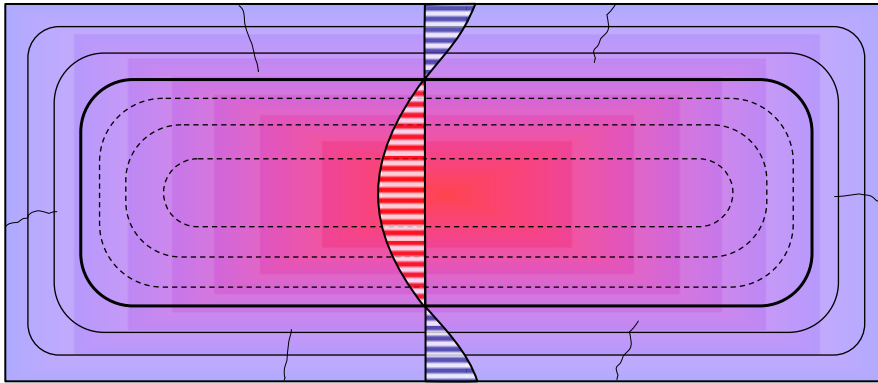


Bild 6-3 Eigenspannungen in Querrichtung bei langgestrecktem Querschnitt

Bei gegliederten Querschnitten treten die extremalen Eigenspannungen in den verschiedenen Querschnittsbereichen zu verschiedenen Zeitphasen auf. Zu beachten sind jeweils die maßgebenden Querschnittsdicken.

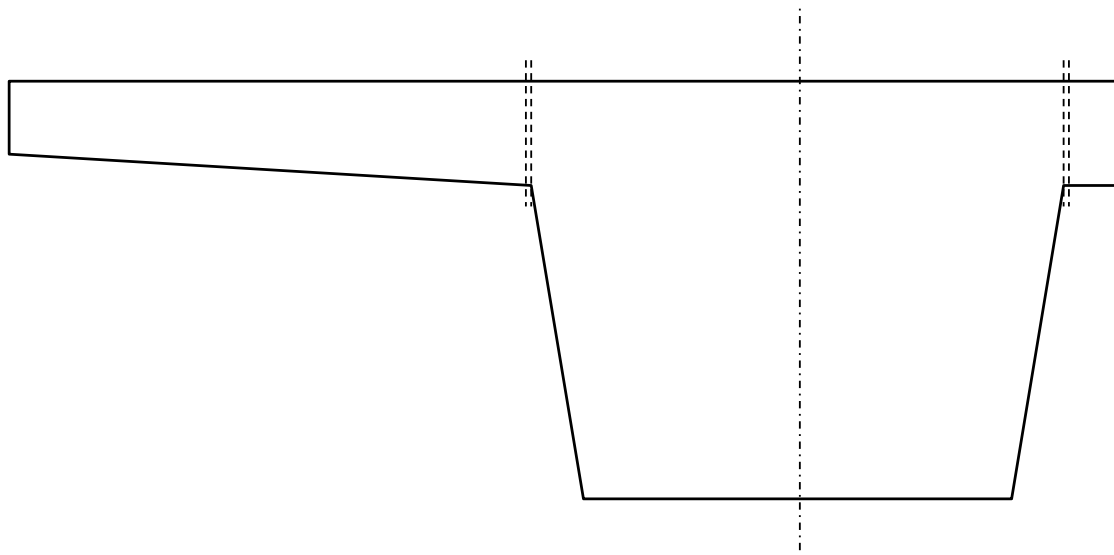


Bild 6-4 Eigenspannungen in einem Plattenbalken, Skizze bitte ergänzen

Die Bewehrungsmenge je laufenden Meter wird gemäß *Heft 525* [21] für eine Spannungsnulllinie bei etwa einem Viertel der kleineren Querschnittsabmessung h bzw. b_w oder h_f für 80 % der mittleren Zugfestigkeit und eine Völligkeit der Zugspannungen von etwa 0,8 festgelegt:

$$A_s = 0,8 \cdot \frac{0,25 \cdot h \cdot 0,8 f_{ctm}}{f_{yk}} = 0,16 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot h = \rho \cdot h \quad (6-1)$$

Der Mindestbewehrungsgrad ρ ist in Tabelle 29 der DIN 1045-1 angegeben. In Tabelle 30 ist für die verschiedenen Querschnittsbereiche die Bewehrung pro laufenden Meter angegeben, hierbei wird ebenfalls nur die kleinere Querschnittsabmessung h , b_w oder h_f berücksichtigt. Sofern nur die Expositionsklassen XC1 bis XC4 maßgebend sind, darf die Bewehrung auf die Hälfte reduziert werden. Bei der Bewehrungsmenge nach Fußnote a der Tabelle 30 wird davon ausgegangen, dass die Tiefe der Zugspannung höchstens $2,5 \cdot d_1$ erreicht. Als Beton wurde ein C35/45 und für $d_1 = 3,5$ cm angenommen.

Als Abstand der Bewehrungsstäbe darf 200 mm nicht überschritten werden.

Bei Vorspannung mit sofortigem Verbund darf die Spannstahlquerschnittsfläche angerechnet werden, die innerhalb der zweifachen Betondeckung der Oberflächenbewehrung liegt.

In Tabelle 30 fehlen Angaben zu den Zugzonen und zur Mindestquerkraftbewehrung. Die Zugzonen werden entsprechend der Robustheitsbewehrung ausgelegt, die Mindestquerkraftbewehrung wird nach DIN 1045-1, Abschnitt 13.2.3 bestimmt und ist mindestens so groß wie die Oberflächenbewehrung.

Neben der Oberflächenbewehrung sind auch die folgenden Bewehrungen zu beachten:

- Robustheitsbewehrung
- Mindestquerkraftbewehrung
- Mindestbewehrung bei Zwangbeanspruchung
- Bewehrung zur Begrenzung der Rissbreite
- zusätzliche Betonstahlbewehrung beim Nachweis für Biegung im GZT

Für alle Bewehrungen kann die Oberflächenbewehrung voll angerechnet werden.

6.2 Robustheitsbewehrung

Die Robustheitsbewehrung entspricht der Mindestbewehrung nach DIN 1045-1, Abschnitt 13.1.1. bzw. EC2, NDP zu 9.2.1.1 (1). Zur Vermeidung von Verwechslungen mit anderen Mindestbewehrungen sollte der Begriff Robustheitsbewehrung genutzt werden. Die Robustheitsbewehrung ist auch für Stahlbetonbauteile zu berücksichtigen und daher bereits in den Grundlagen bekannt. Sie ist für die maßgebenden Risschnittgrößen zu ermitteln, in der Regel bei alleiniger Wirkung eines Biegemomentes:

$$M_{cr} = f_{ctm} \cdot W_c \quad (6-2)$$

Die günstige Wirkung aus der Drucknormalkraft infolge der Vorspannung darf nicht angesetzt werden. Der Hebelarm der inneren Kräfte z darf näherungsweise mit $0,9 \cdot d$ angenommen werden, bei Plattenbalken mit Druck in der Platte mindestens mit $d - h_f/2$. Die Stahlkraft ergibt sich dann zu

$$F_{s,min} = \frac{M_{cr}}{z} \quad (6-3)$$

und die erforderliche Betonstahlbewehrung

$$A_{s,min} = \frac{F_{s,min}}{f_{yk}} \quad (6-4)$$

Wenn bei Zuggurten von Plattenbalken oder Hohlkästen die obere und untere Oberflächenbewehrung der Gurtplatte angerechnet werden soll, dann muss die Schwerachse der Bewehrung aus beiden Bewehrungslagen ermittelt werden.

Die in der Norm geforderte gleichmäßige Verteilung der Robustheitsbewehrung über die Breite und Höhe hat nur empfehlenden Charakter, da der Nachweis der Robustheitsbewehrung in erster Linie ein Nachweis im GZT ist und nicht der Begrenzung von Rissbreiten dient. Die Begrenzung der Rissbreiten ist gesondert nachzuweisen, wobei die Bewehrung in den verschiedenen Querschnittsbereichen getrennt zu ermitteln bzw. nachzuweisen ist.

In Verbindung mit der Ermittlung einer Oberflächenbewehrung kann folgende Vorgehensweise als sinnvoll betrachtet werden:

- Ermittlung der Mindestoberflächenbewehrung
- Ermittlung und Verteilung der Betonstahlbewehrung gemäß den Anforderungen aus der Rissbreitenbeschränkung
- Volle oder teilweise Anrechnung der Bewehrung beim Nachweis der Robustheitsbewehrung, ggf. zusätzlich erforderliche Bewehrung prozentual gleichmäßig auf die angerechnete Bewehrung verteilen. Bei Gurtplatten ist zu beachten, dass beim Nachweis des Gurtplattenanschnitts die in die Gurtplatte ausgelagerte Robustheitsbewehrung berücksichtigt wird.

Abschließend wird die Ermittlung der Oberflächen-, Robustheits- und Mindestquerkraftbewehrung am Beispiel einer zweifeldrigen Fußgängerbrücke mit einer Spannweite von 25,0m erläutert.

Querschnitt im Feldbereich

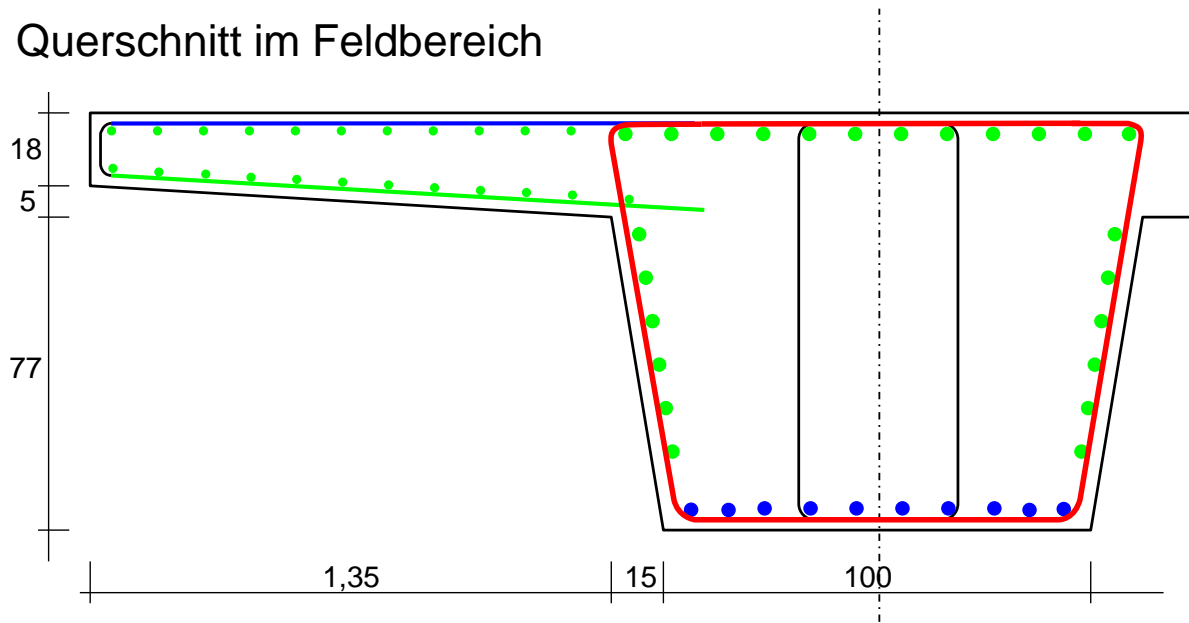


Bild 6-5 Oberflächen-, Robustheits- und Mindestquerkraftbewehrung im Feldbereich

Querschnitt im Stützbereich

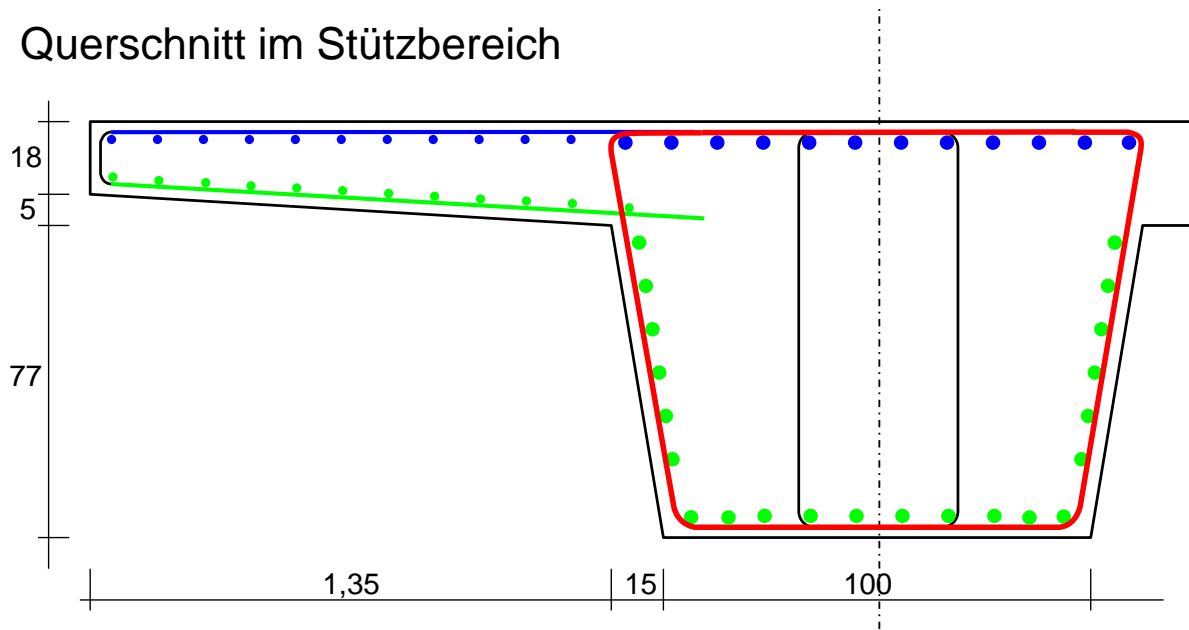


Bild 6-6 Oberflächen-, Robustheits- und Mindestquerkraftbewehrung im Stützbereich

6.3 Einleitung von Ankerkräften

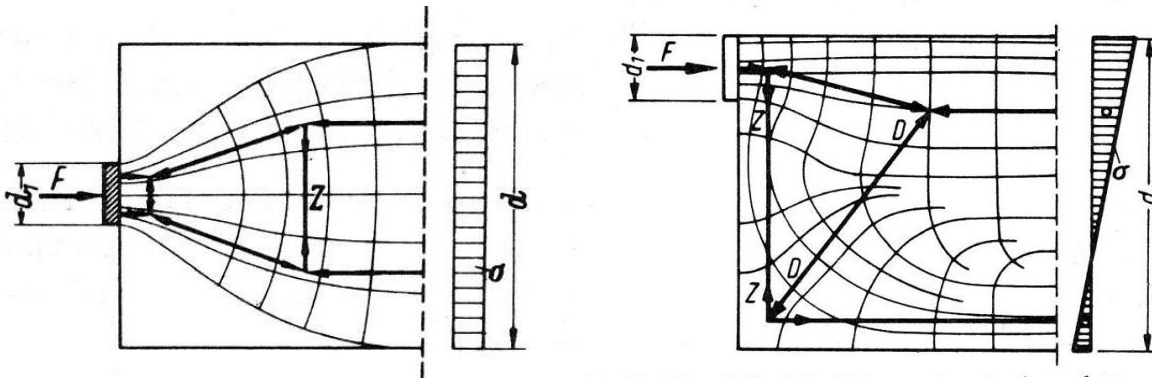


Bild 6-7 Kraftfluss bei mittiger Lage und Randlage einer Ankerplatte nach Kupfer [31]

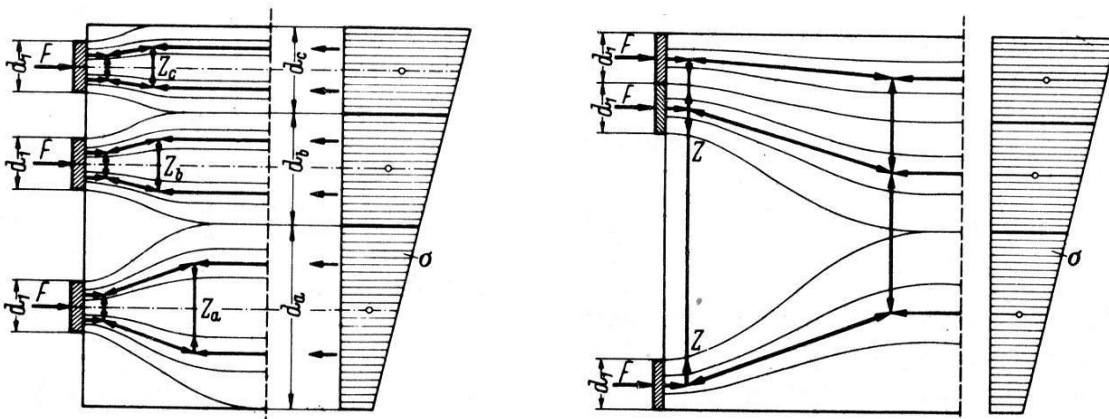


Bild 6-8 Kraftfluss bei mehreren gut verteilten und ungünstig verteilten Ankerplatten nach Kupfer [31]

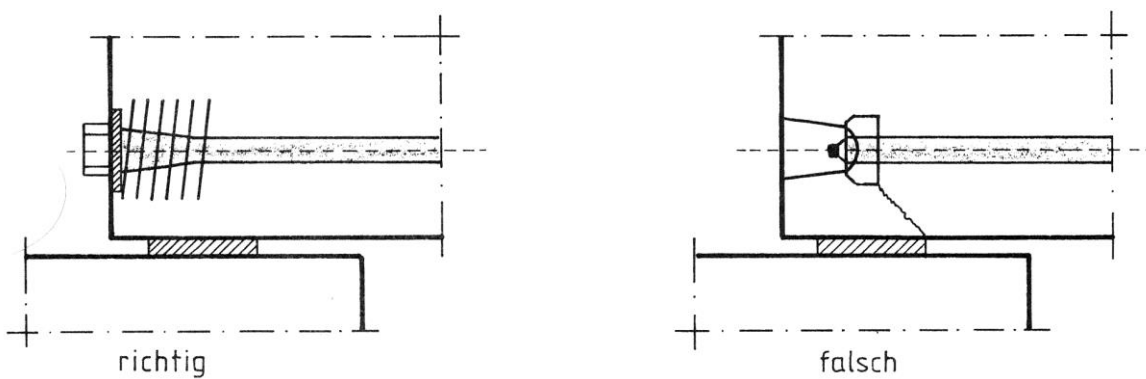


Bild 6-9 aus [24]

6.4 Einleitung von Verbundkräften

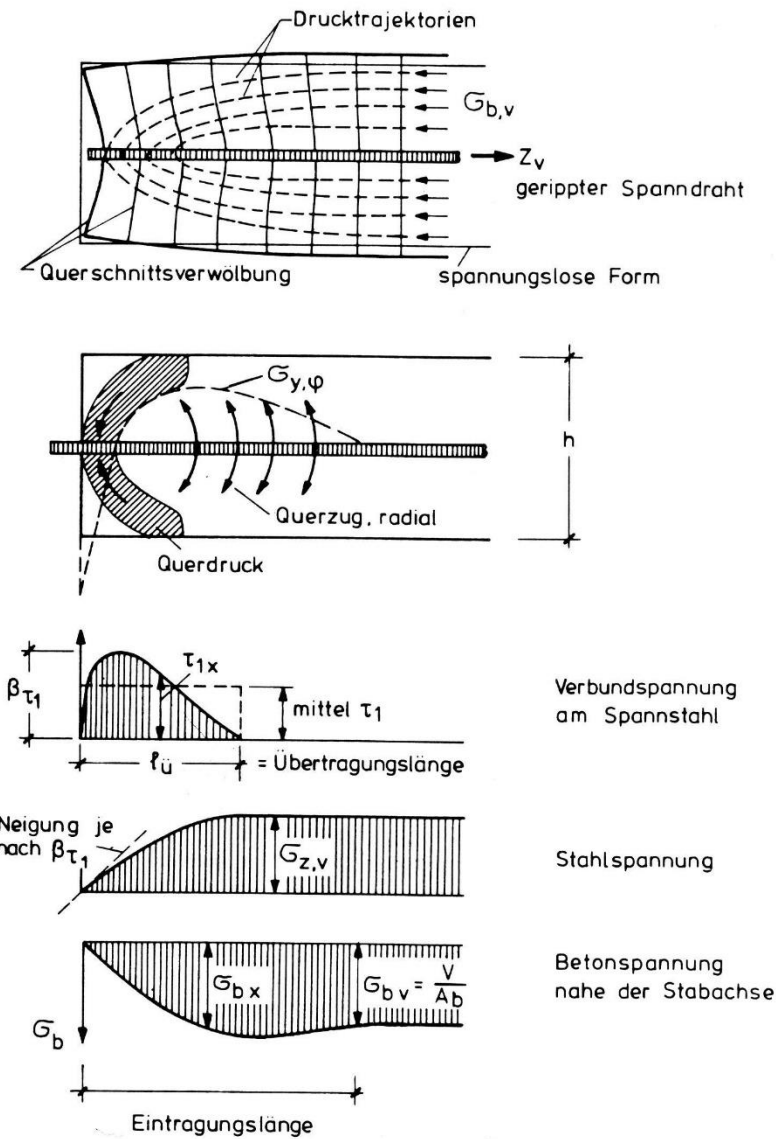


Bild 6-10 Einleitung von Verbundkräften für zentrische Lage des Spannstahls, aus [25]

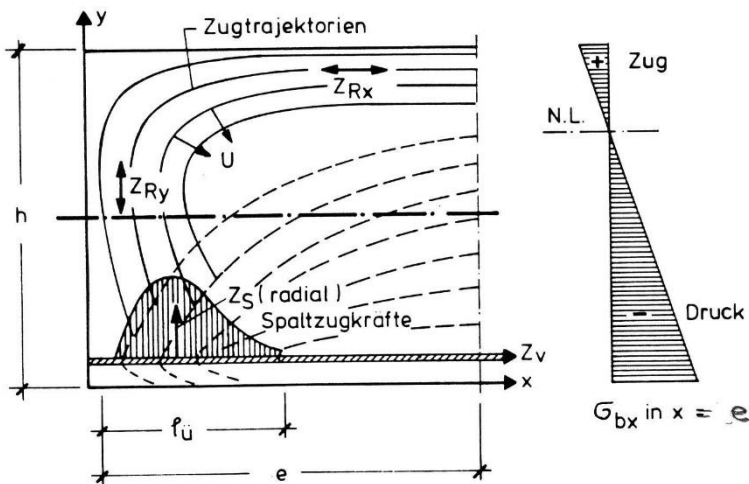


Bild 6-11 Einleitung von Verbundkräften am Trägerende in exzentrischer Lage, aus [25]

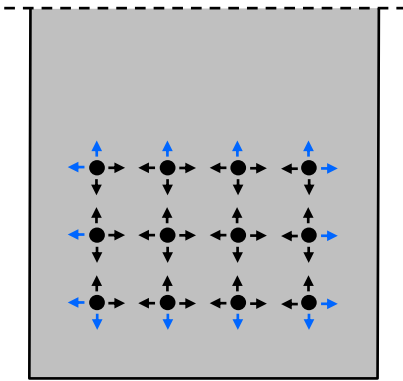


Bild 6-12 Bei Verankerung mehrerer Spanndrähte oder -litzen heben sich die Spaltkräfte im Inneren auf, aus [25]

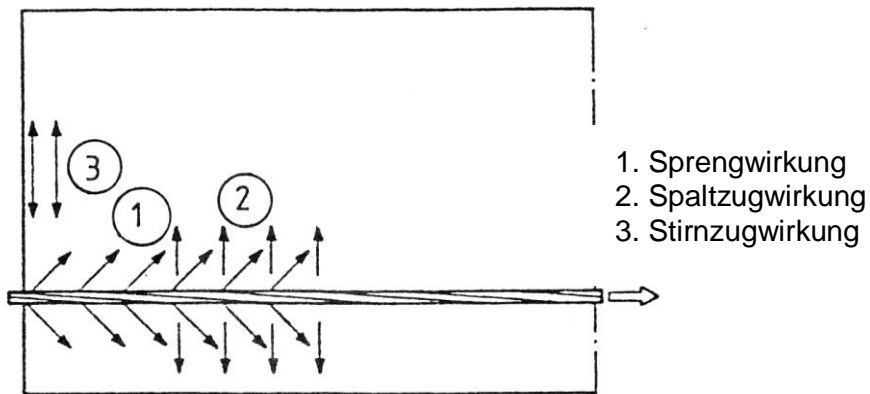


Bild 6-13 Drei Zugwirkungen bei Vorspannung mit sofortigem Verbund, aus [24]

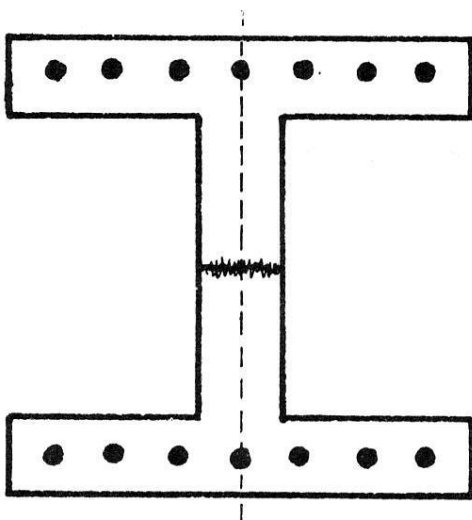


Bild 6-14 Stirnzug infolge ungleichmäßiger Spannkrafteinleitung, aus [24]

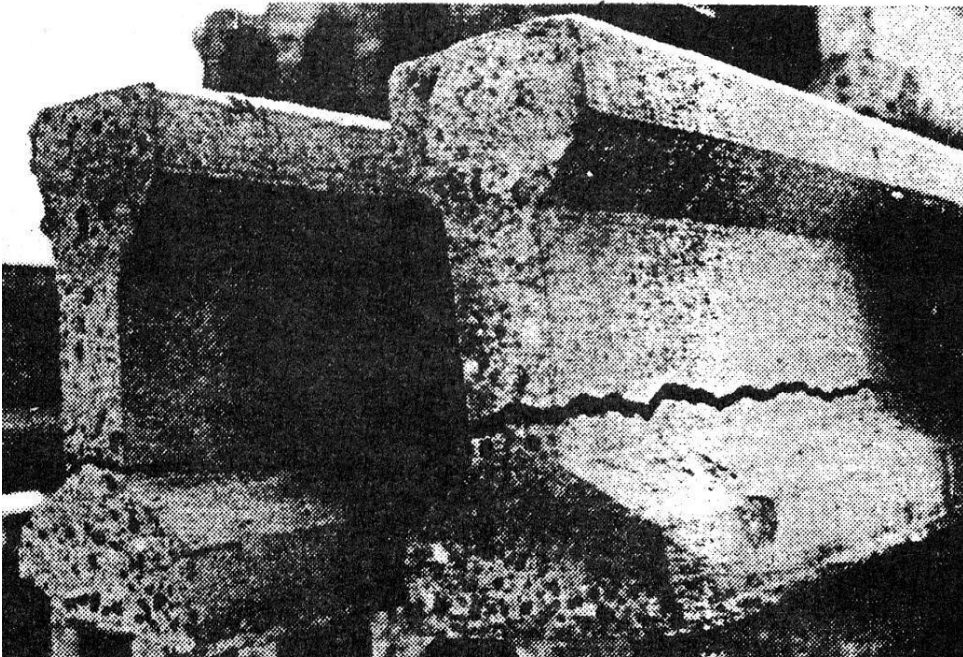


Bild 6-15 „Typische“ Stirnzugrisse, aus [24]

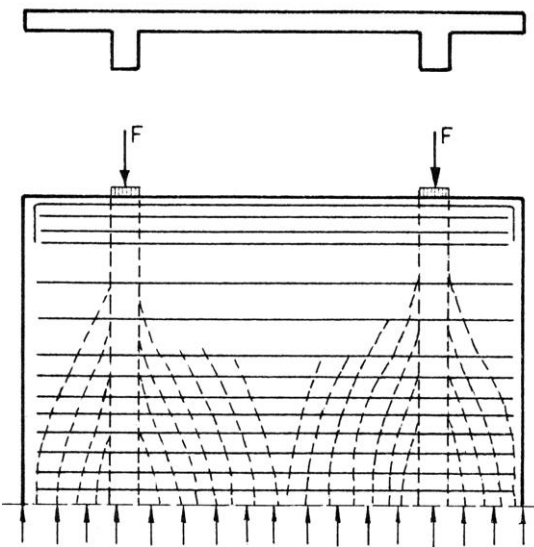


Bild 6-16 schlafe Randzug(Stirnzug-)bewehrung einer π -Platte, aus [24]

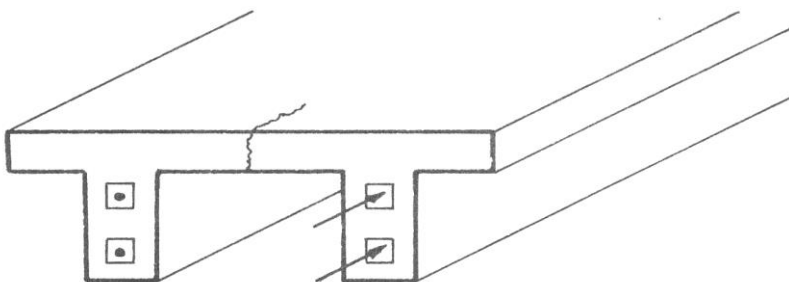
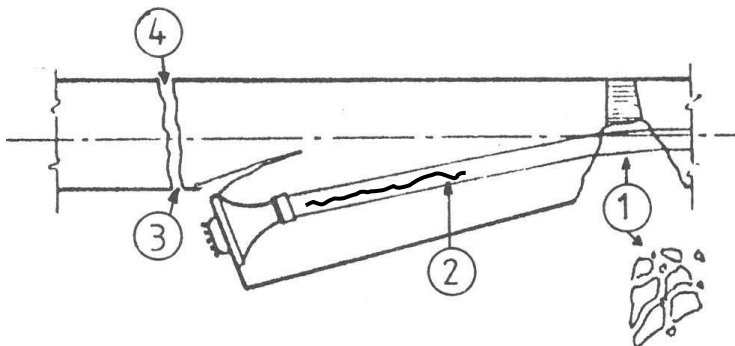


Bild 6-17 ungünstiger Stirnzug durch unüberlegte Spannreihenfolge, aus [24]

6.5 Ausreichender Einbau von schlaffer Bewehrung im Kraffteinleitungsbereich



1. Abtrennen des Betons infolge Umlenkung
2. Spaltriss
3. Abriss der Konsole
4. Riss hinter der Verankerung

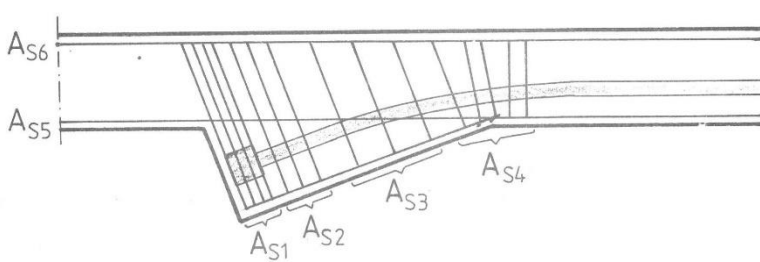


Bild 6-18 Mögliche Schäden und deren Vermeidung an einer Lisenenverankerung, aus [24] nach [31]

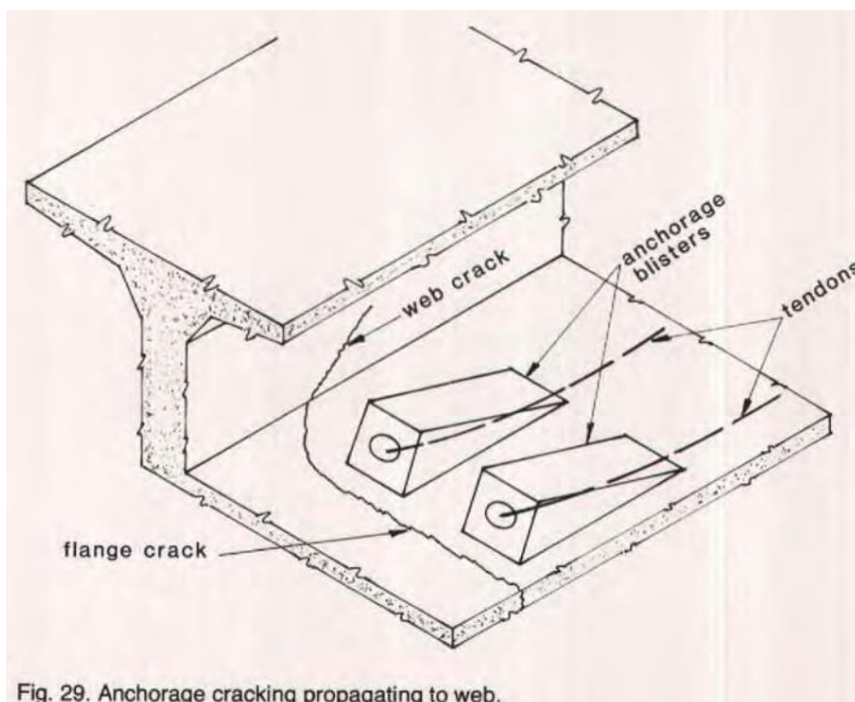


Fig. 29. Anchorage cracking propagating to web.

Bild 6-19 mögliche Risse hinter einer Lisenenverankerung, aus [31], siehe auch https://www.pci.org/PCI/PCI/Publications/PCI_Journal/Issues/1985/March-April/The_Cause_of_Cracking_in_Post-Tensioned_Concrete_Box_Girder_Bridges_and_Retrofit_Procedures.aspx

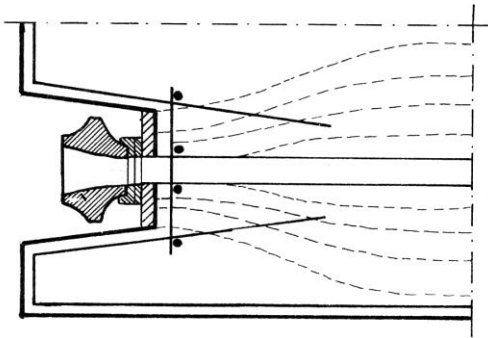


Bild 6-20 schlaife Bewehrung zur Vermeidung des Absprensens hinter einer Verankerung, aus [24]

6.6 Sonstiges

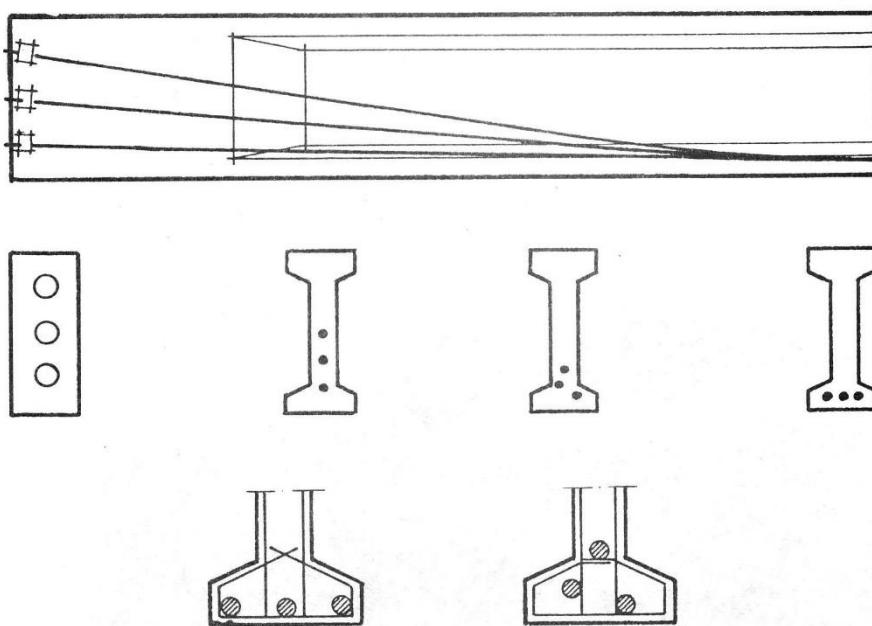


Bild 6-21 Ausführungstechnische Konsequenzen durch Spanngliedverlauf, aus [24]

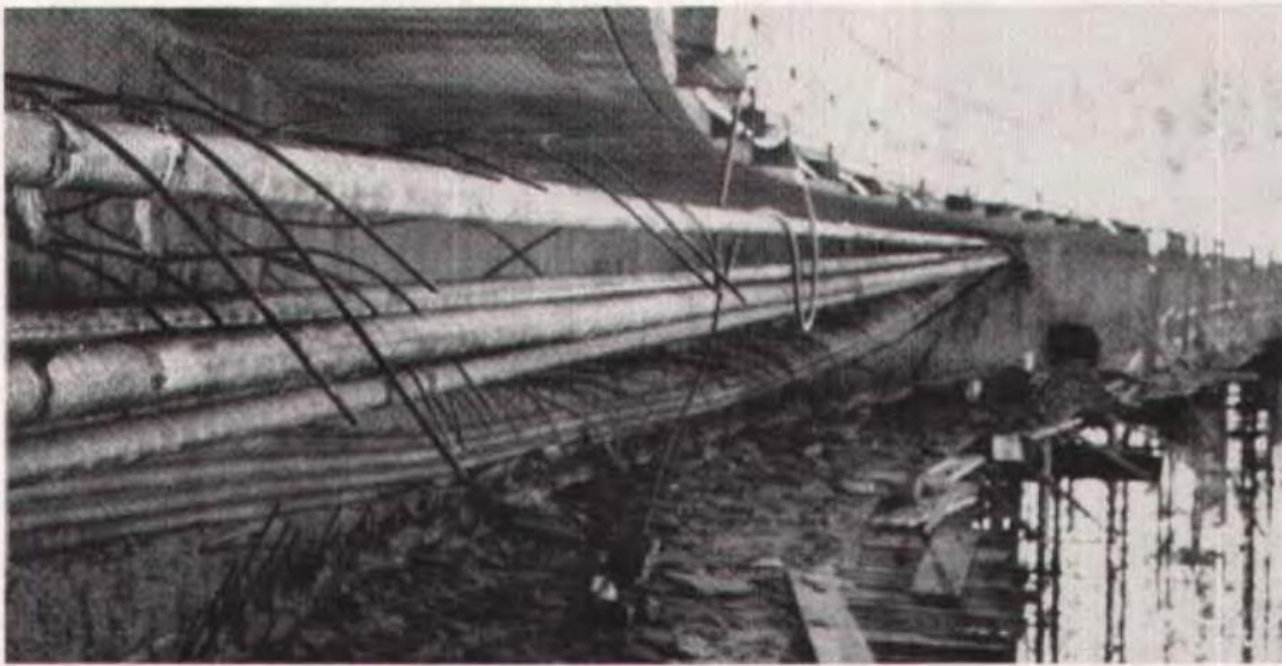


Fig. 39. Horizontal pullout of curved tendons (courtesy of T. Y. Lin).

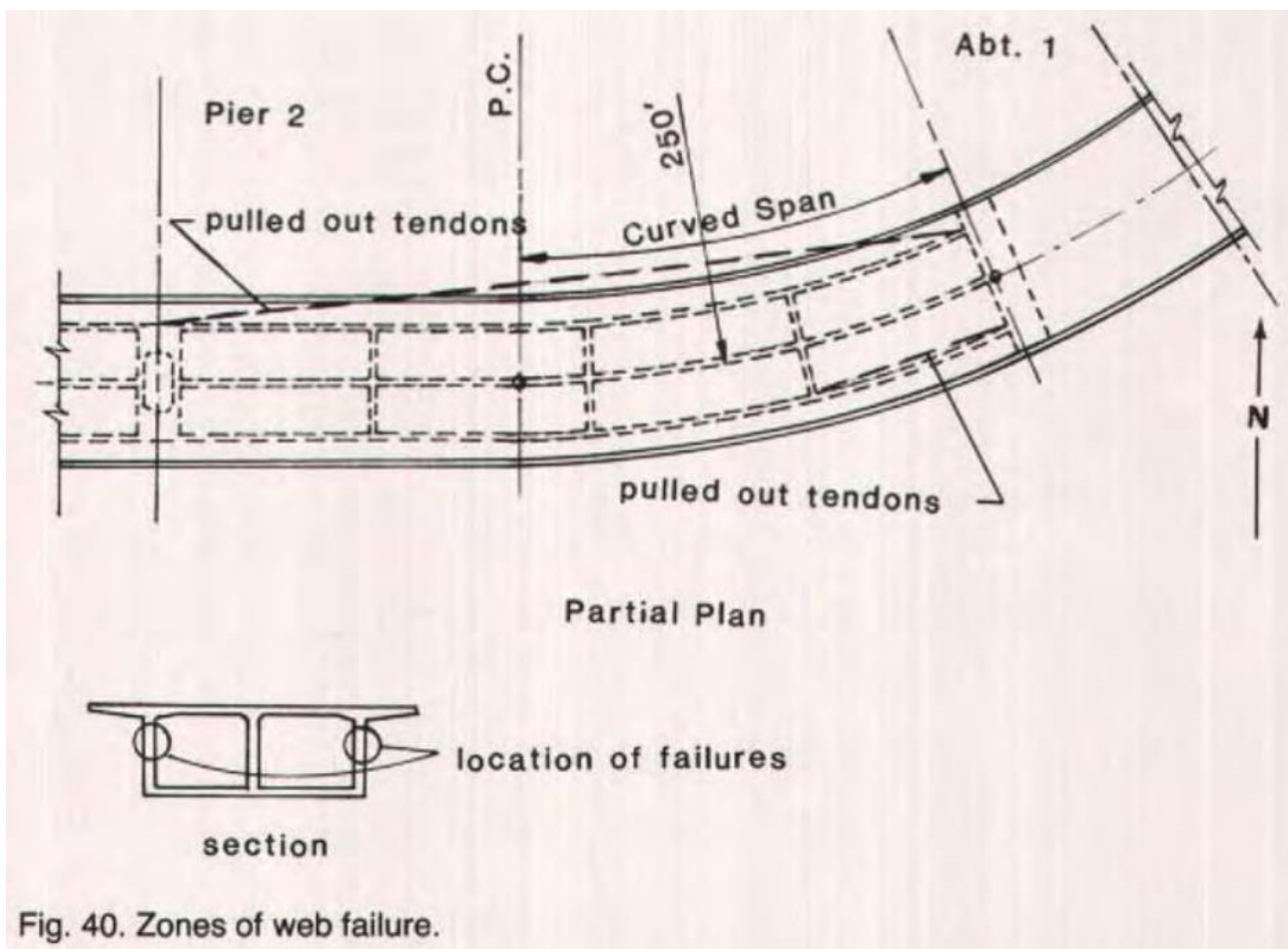


Fig. 40. Zones of web failure.

Bild 6-22 Schaden durch mehrdimensionale Auswirkungen von Spanngliedumlenkungen, aus [31], siehe auch https://www.pci.org/PCI/Publications/PCI_Journal/Issues/1985/March-April/The_Cause_of_Cracking_in_Post-Tensioned_Concrete_Box_Girder_Bridges_and_Retrofit_Procedures.aspx

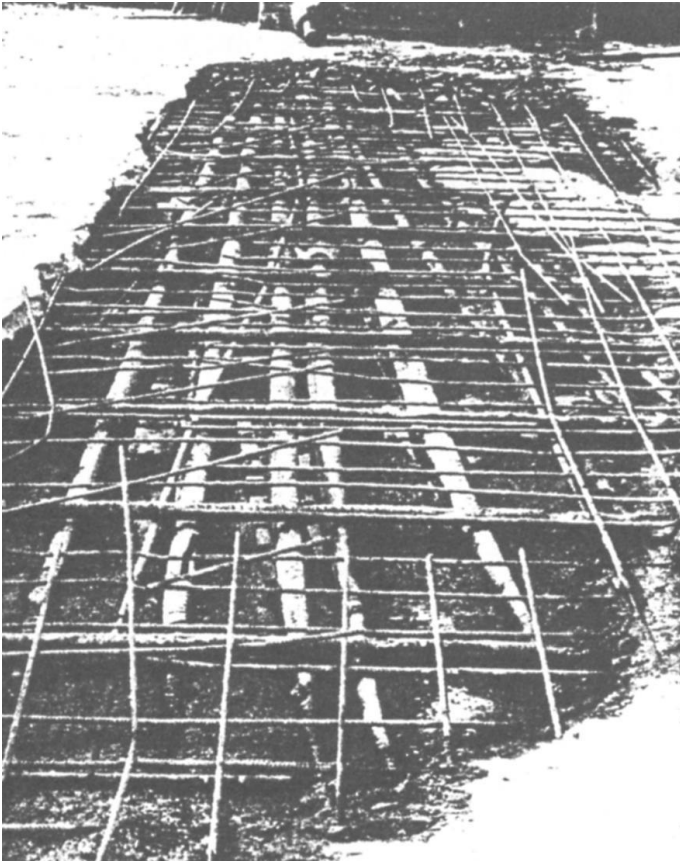
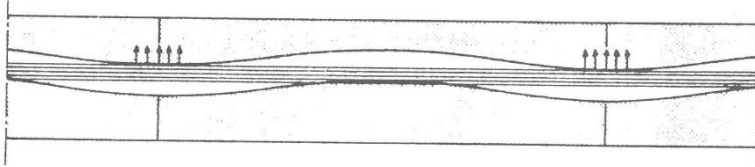


Bild 6-23 Abgeplatzte Betondeckung durch ungewollte Umlenkung an einer Leichtbetonbrücke in den Niederlanden [32]

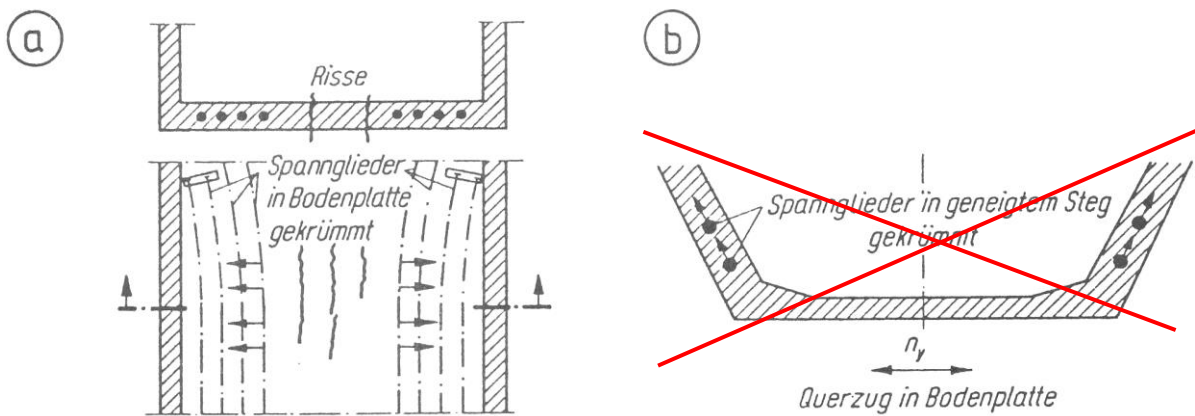


Bild 6-24 Rissgefahr durch Spanngliedumlenkung, aus [24]

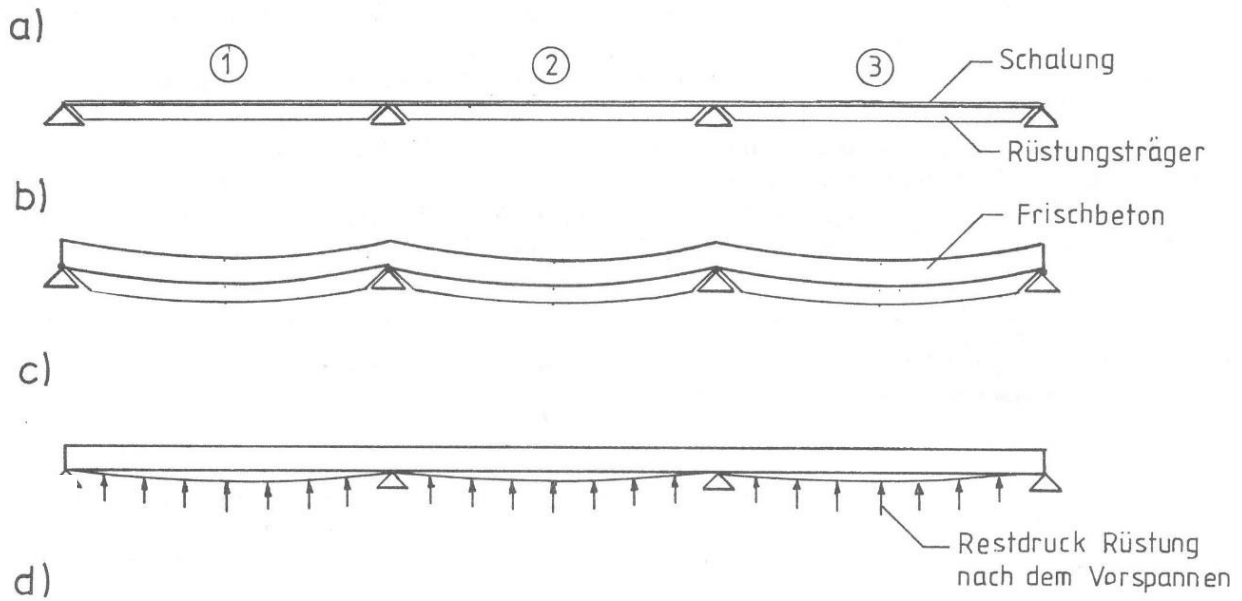


Bild 6-25 Rissgefahr bei vorgespannten Brückenträgern durch elastische Rückfederung von biegeweichen Rüstungsträgern, Risse im Feld oben und an den Stützungen unten, aus [24]

Literatur

- [1] Lamprecht, H.-O.: Opus Caementitium – Bautechnik der Römer. Düsseldorf: Beton-Verlag, 5. Auflage 1996
- [2] Herzog, M.: 150 Jahre Stahlbeton (1848 – 1998). Bautechnik Spezial Berlin: Ernst und Sohn, 1999
- [3] Straub, H.: Die Geschichte der Bauingenieurkunst. Basel: Birkhäuser-Verlag, 4. Auflage 1992
- [4] Hampe, E., Raue, E., Kaller, W.: Stahlbeton, Teil 1, Grundlagen. Berlin, München: Verlag für Bauwesen, 1993
- [5] König, G., Tue, N.: Grundlagen des Stahlbetonbaus – Einführung in die Bemessung nach EC 2. Stuttgart: Teubner, 1998
- [6] Zilch, K., Zehetmaier, G.: Bemessung im konstruktiven Betonbau, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006
- [7] Duda, H.: Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung. Heft 419 aus der Schriftenreihe des DAfSbt. Berlin: Ernst und Sohn, 1991
- [8] CEB-FIP Model Code (1990), CEB-FIP Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton. Comité Euro-International du Béton, Bulletin d'Information No. 213/214. Lausanne: CEB 1993
- [9] Zilch, K., Rogge, A.: Bemessung der Stahlbeton- und Spannbetonbauteile nach DIN 1045-1. In: Betonkalender 2002, Teil 1. Berlin: Ernst und Sohn, 2002
- [10] DIN Deutsches Institut für Normung e. V.: Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen. 1. Auflage. Berlin, Köln: Beuth-Verlag, 1981
- [11] DIN V ENV 1991-1: Eurocode 1 – Teil 1, Ausgabe Dezember 1995: Einwirkungen auf Tragwerke. Berlin: Beuth-Verlag, 1995
- [12] DIN 1055-100, Ausgabe März 2001: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln. Berlin: Beuth-Verlag, 2001
- [13] Springenschmid, R.: Die Ermittlung der Spannungen infolge von Schwinden und Hydratationswärme im Beton. Beton- und Stahlbetonbau 79 (1984), Heft 10, S. 263-269
- [14] Schleeh, W.: Die Zwängspannungen in einseitig festgehaltenen Wandscheiben. Beton- und Stahlbetonbau 1962, Heft 3, S. 64-72
- [15] Leonhardt, F.: Rissebeschränkung. Beton- und Stahlbetonbau 71 (1976), Heft 1, S. 14-20
- [16] Eurocode 2, Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1-1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau. Deutsche Fassung ENV 1992-1-1, 1991
- [17] Hochreither, H.: Bemessungsregeln für teilweise vorgespannte, biegebeanspruchte Betonkonstruktionen – Begründung und Auswirkung. Dissertation, TU München, 1982
- [18] Zilch, K., Rogge, A.: Bemessung der Stahlbeton- und Spannbetonbauteile nach DIN 1045-1. In: Betonkalender 2002, Teil 1. Berlin: Ernst und Sohn, 2002
- [19] Fischer, A., Kramp, M., Prietz, F., Rösler, M.: Stahlbeton nach DIN 1045-1, Verlag Ernst und Sohn, Berlin, 2003
- [20] Zilch, K., Fritsche, T.: Einfluß des Kriechens auf Beton- und Stahlspannungsumlagerungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Stahlbetonbauteile. TU München, Lehrstuhl für Massivbau: DIBt-Forschungsbericht, Stuttgart: Fraunhofer IRB, 1999
- [21] Heft 525 der Schriftenreihe des DAfStb: Erläuterungen zu DIN 1045-1, Berlin, Beuth-Verlag, 2003
- [22] Reineck, K.-H.: Hintergründe zur Querkraftbemessung in DIN 1045-1 für Bauteile aus Konstruktionsbeton mit Querkraftbewehrung. Bauingenieur 76 (2001), S. 168-179
- [23] Eibl, J.; Ivanyi, G.; Buschmeyer, W.; Kobler, G.: Vorspannung ohne Verbund, in Betonkalender 1995, Bd. 2, Ernst und Sohn, S. 739ff
- [24] Walraven, J.: Skript Spannbeton 1991, Technische Hochschule Darmstadt
- [25] Leonhardt, F.; Mönnig, E.: Vorlesungen über Massivbau. Teil 5: Spannbeton. Heidelberg : Springer, 1980
- [26] Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. Beton- und Stahlbetonbau 63 (1967), Heft 10, S. 230
- [27] Projekt: KI-SMILE (Konstruktiver Ingenieurbau - Simulation, Motivation, Interaktion in Lehre und Experiment) : neue Medien im konstruktiven Ingenieurbau; Schlussbericht; [Laufzeit: 01.03.2001 - 31.12.2003] / [Projektpartner: Fachhochschule Potsdam, FB Bauingenieurwesen. Projektleitung: J. Vielhaber ... Fachhochschule Potsdam, FB Design. Leitung: M. Krohn. TFH Berlin, FB III. Leitung: A. Fischer. TU Berlin, Institut für Sprache und Kommunikation. Leitung: C. Schwender]
<https://edocs.tib.eu/files/e01fb06/516981633.pdf>
- [28] KUPFER, H. B.: Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 229, Beuth Verlag, Berlin, 1973.
- [29] Reinhardt, H.-W.: Beton, Betonkalender 2007, Ernst und Sohn, Berlin
- [30] Kupfer, H.: Bemessung von Spannbetonbauteilen - einschließlich teilweiser Vorspannung. Beton-Kalender 1992, Teil I, S. 561.
- [31] Podolny, W.: The Cause of Cracking in Post-Tensioned Concrete Box Girder Bridges and Retrofit Procedures, PCI JOURNAL, V. 30, No. 2., March-April 1985
- [32] J. Brakel, L. van Doorn, H. Hoos, F.J.M. van der Pol. Schadegevallen aan betonnen kunstwerken in Nederland, 1995, Stuvo-Rapport 101

- [33] Leonhardt, F.: Risschäden an Betonbrücken – Ursachen und Abhilfen. Beton- und Stahlbetonbau, 1979, 74, Heft 2, S. 36-44