

# Stabwerkmodelle



**BHT**

Berliner Hochschule  
für Technik

Studiere Zukunft

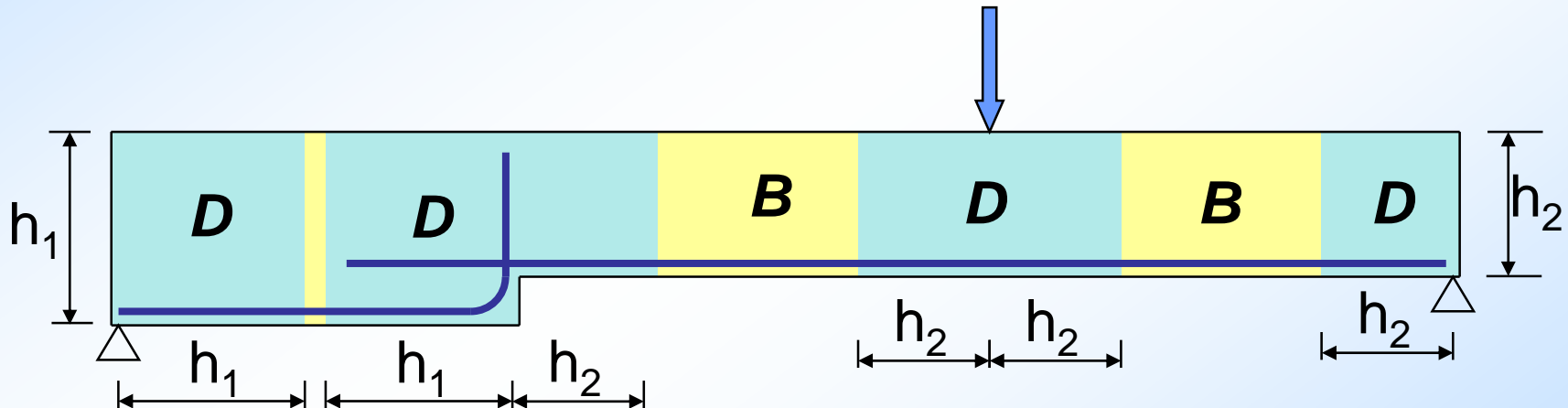
Prof. Dr.-Ing. Andreas Fischer

# 1 Einführung Stabwerkmodelle

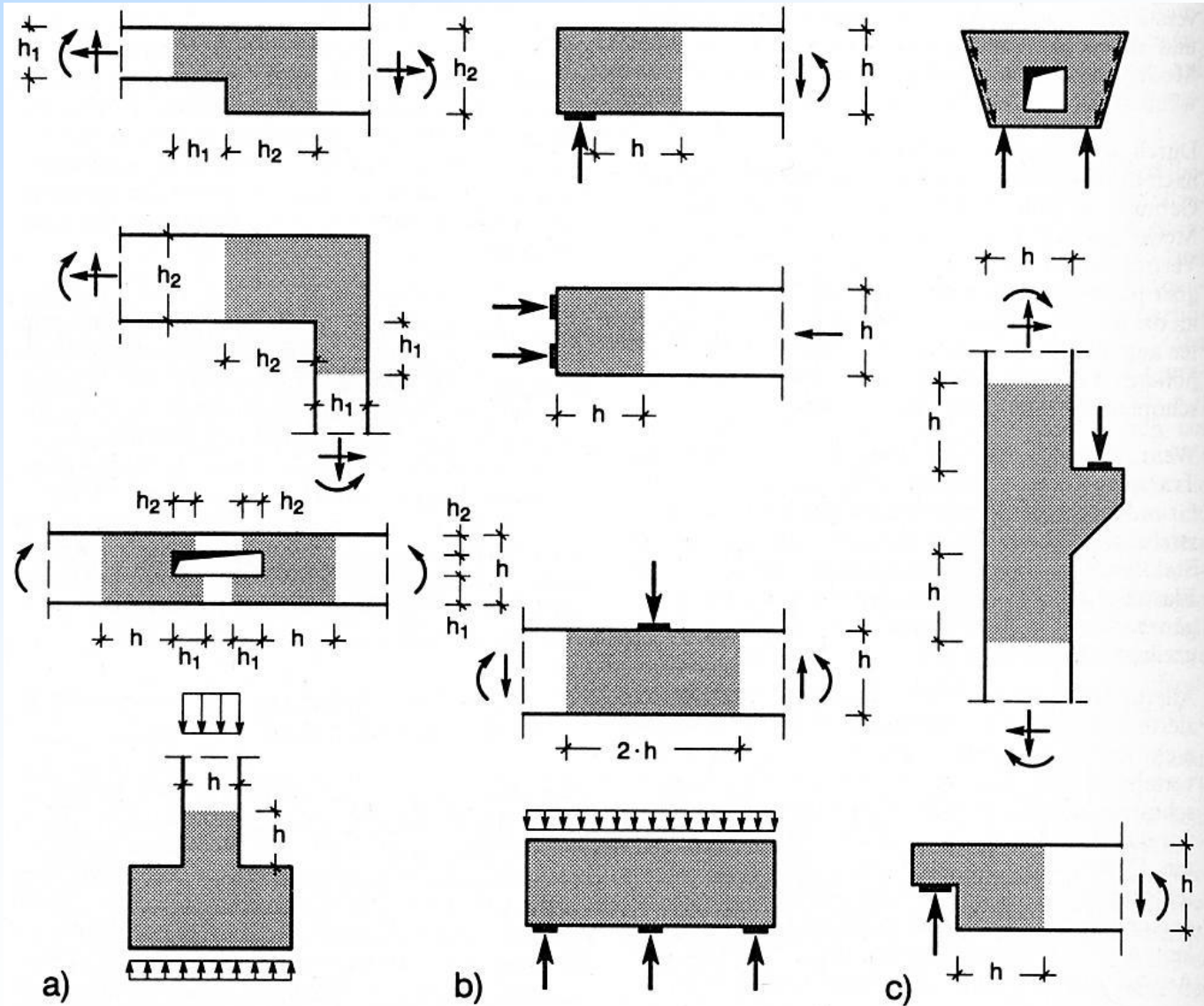
Grundlage: Plastizitätstheorie

Abgrenzung von *Bernoulli-Bereichen* (B-Bereich)

Abgrenzung von *Diskontinuitätsbereichen* (D-Bereich)



geometrische und statische Diskontinuitäten

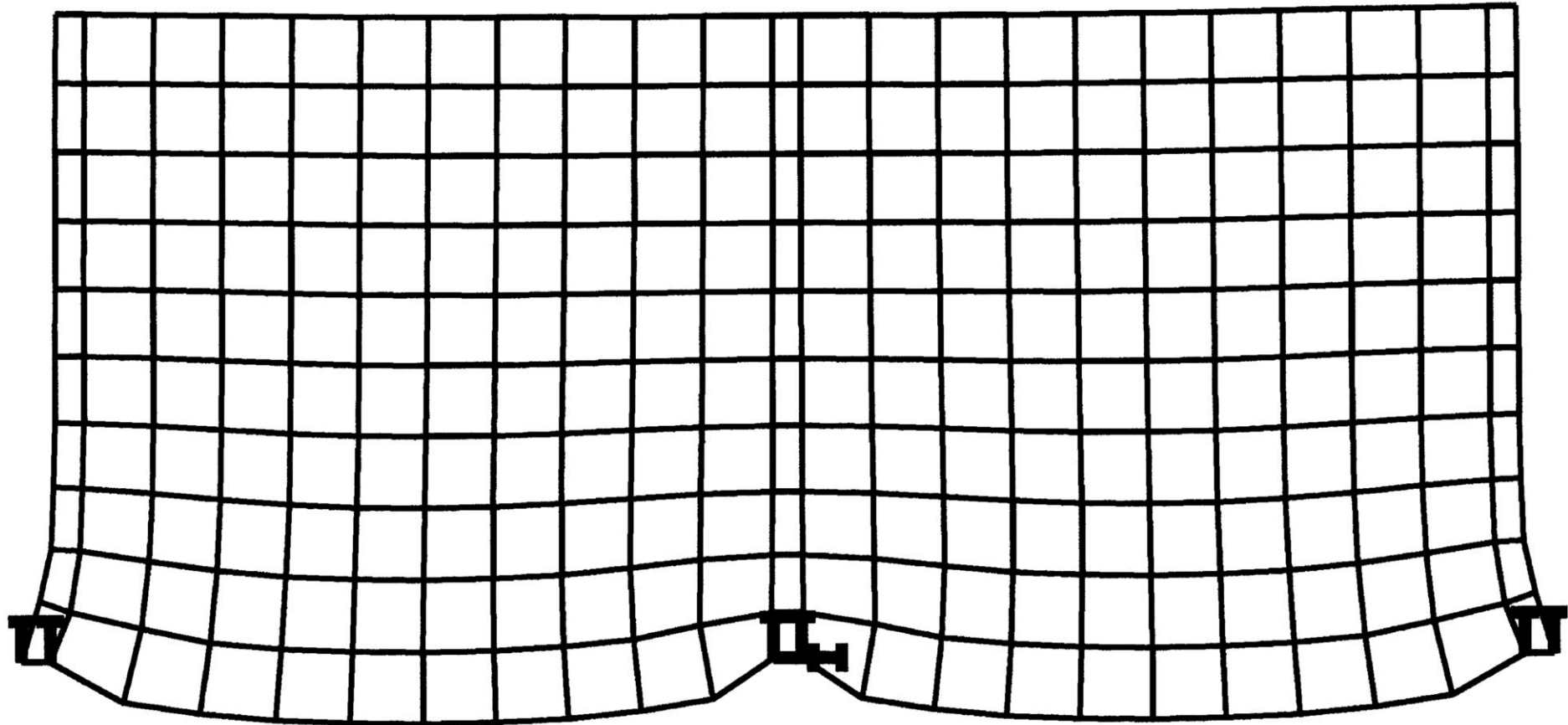


**Bild 3.2-1.** D-Bereiche (schraffierte Flächen) mit nichtlinearer Dehnungsverteilung infolge von  
 (a) geometrischen Diskontinuitäten,  
 (b) statischen Diskontinuitäten,  
 (c) statischen und geometrischen Diskontinuitäten

aus „Schlaich, Schäfer: Konstruieren im Stahlbetonbau“  
 Betonkalender 1984/89/93/98/01



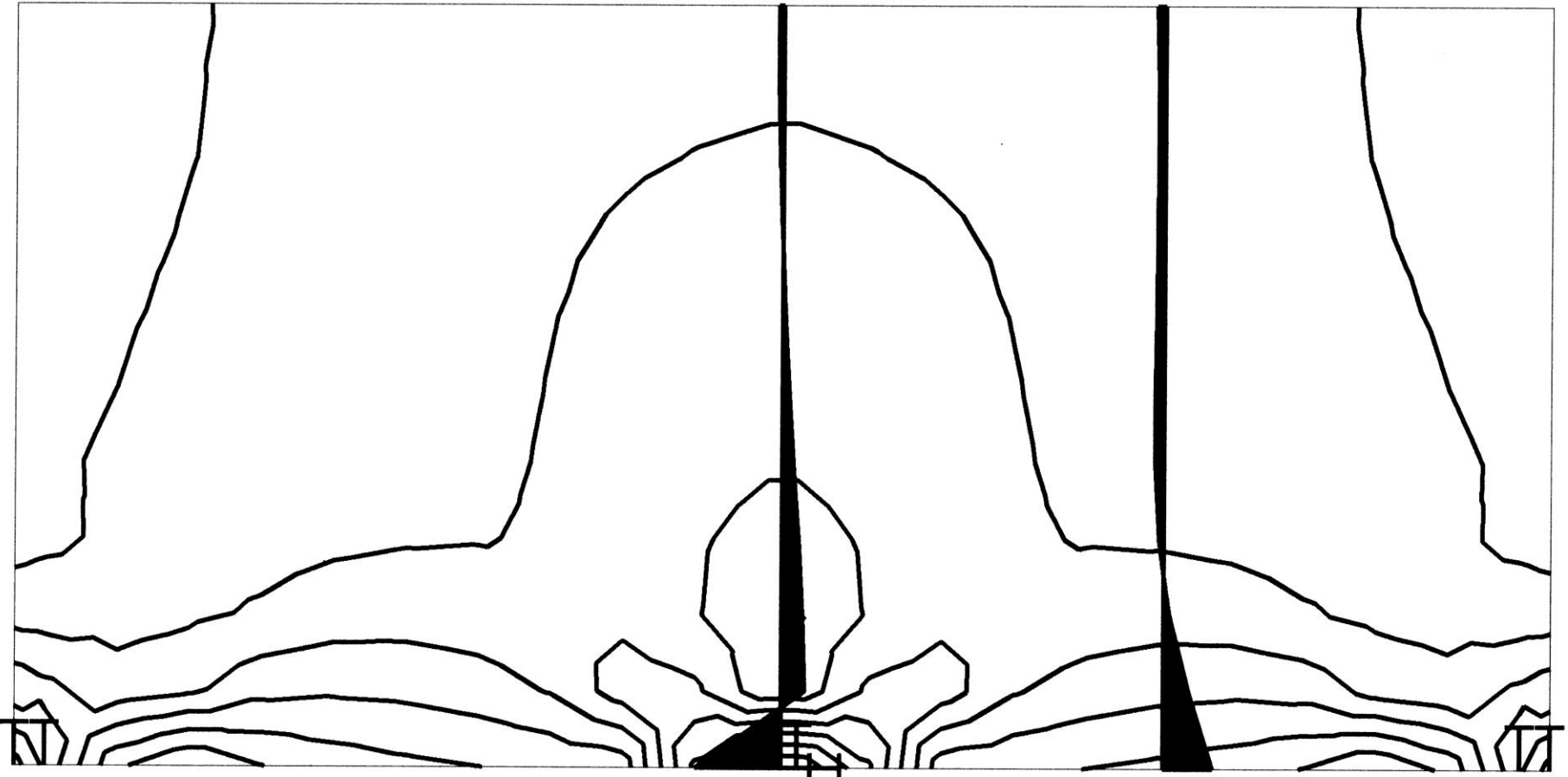
## Zweifeldrige Wandscheibe, Verformung



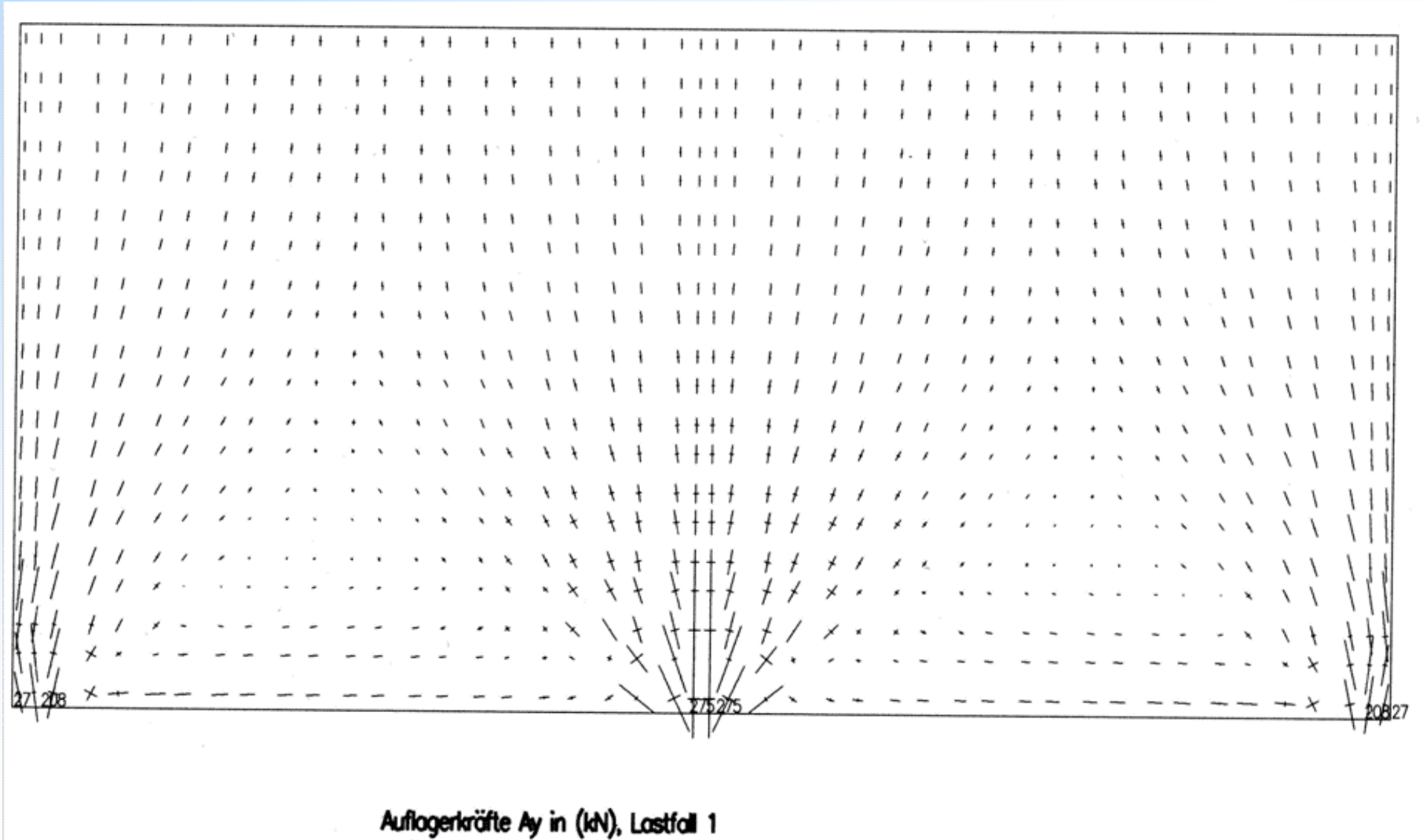


## Zweifeldrige Wandscheibe, Spannungen

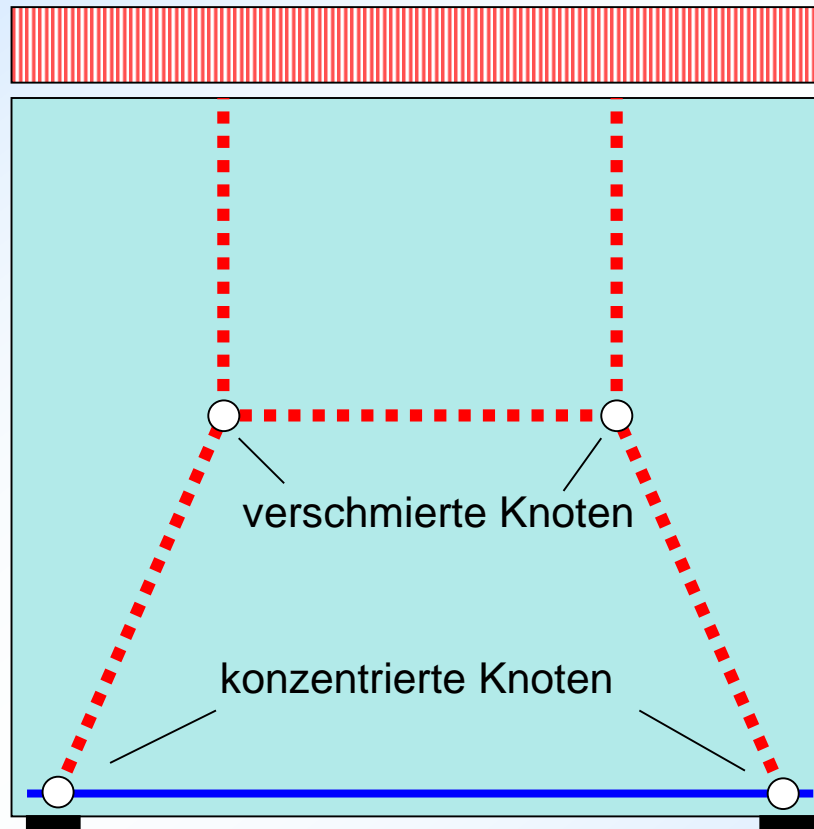
Höhenlinie für  $\sigma_{ix}$  in (kN/m<sup>2</sup>), Lastfall 1



## Zweifeldrige Wandscheibe, Spannungen



## 1 Einführung



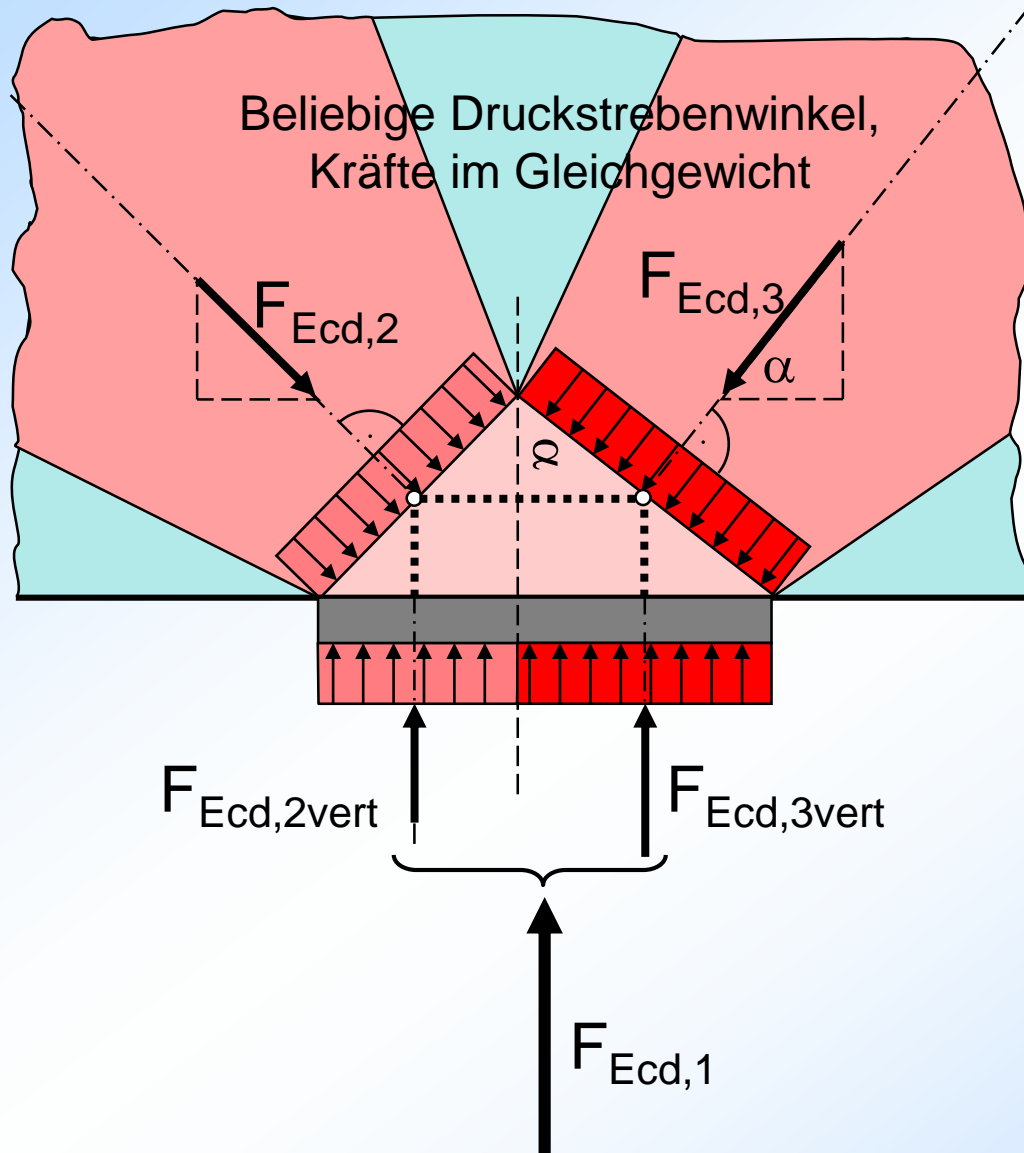


## Wozu überhaupt Stabwerkmodelle ?

- ▶ Modellierung des Kraftflusses, Anschaulichkeit
- ▶ leichte Ermittlung der inneren Kräfte in komplexen Systemen durch Verwendung einfacher Grundelemente
  - Stab: Druck- oder Zugstab
  - Knoten: Kreuzungspunkt von mind. 3 Stäben, erfüllt Gleichgewicht
- ▶ einfache Methodik zur Ergänzung und zur Kontrolle von FE-Berechnungen
- ▶ Grundlage für die Bemessung von Scheiben, Konsolen, ausgeklinkten Auflagern etc. nach EC2

# Druckknoten am Bauteilrand (CCC)

Entspricht EC2, Bild 6.26

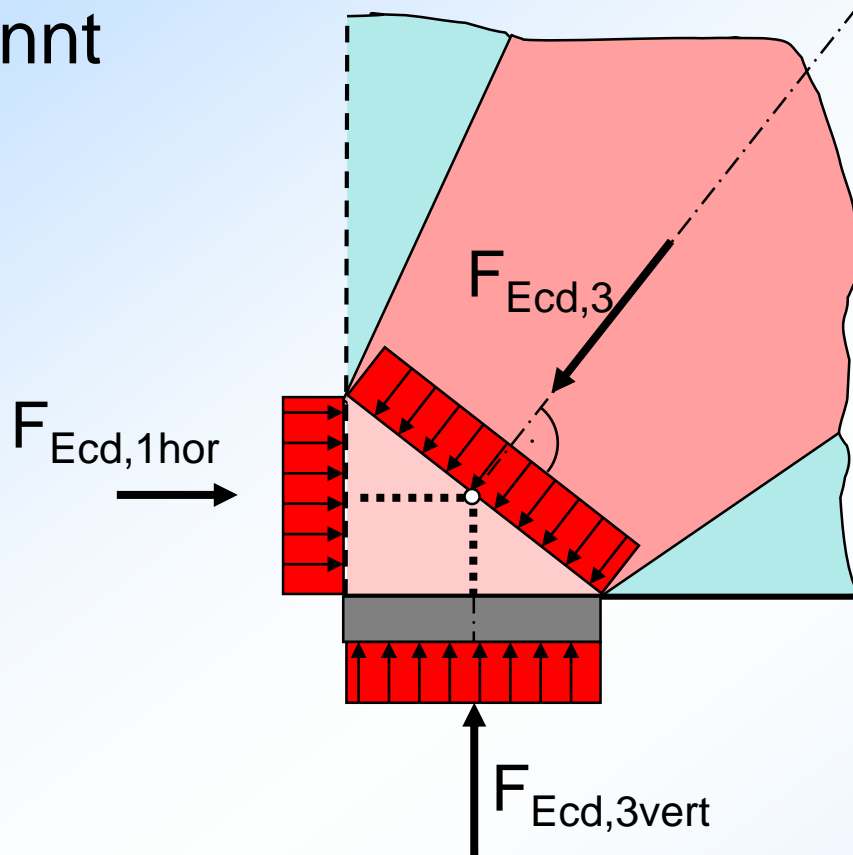


1. Lagerkraft wird entsprechend den Komponenten der beiden Druckstrebenkräfte aufgeteilt
2. Höhe des Knotendreiecks ergibt sich aus dem Verhältnis der Kraftkomponenten einer der beiden Druckstrebenkräfte
3. Alle am Knoten angreifenden Spannungen sind gleich groß (**hydrostatischer Knoten**)
4. Nachweis der Lagerpressung ist ausreichend

$$\sigma_{Rd,max} = 1,1 \cdot v_2 \cdot f_{cd}$$

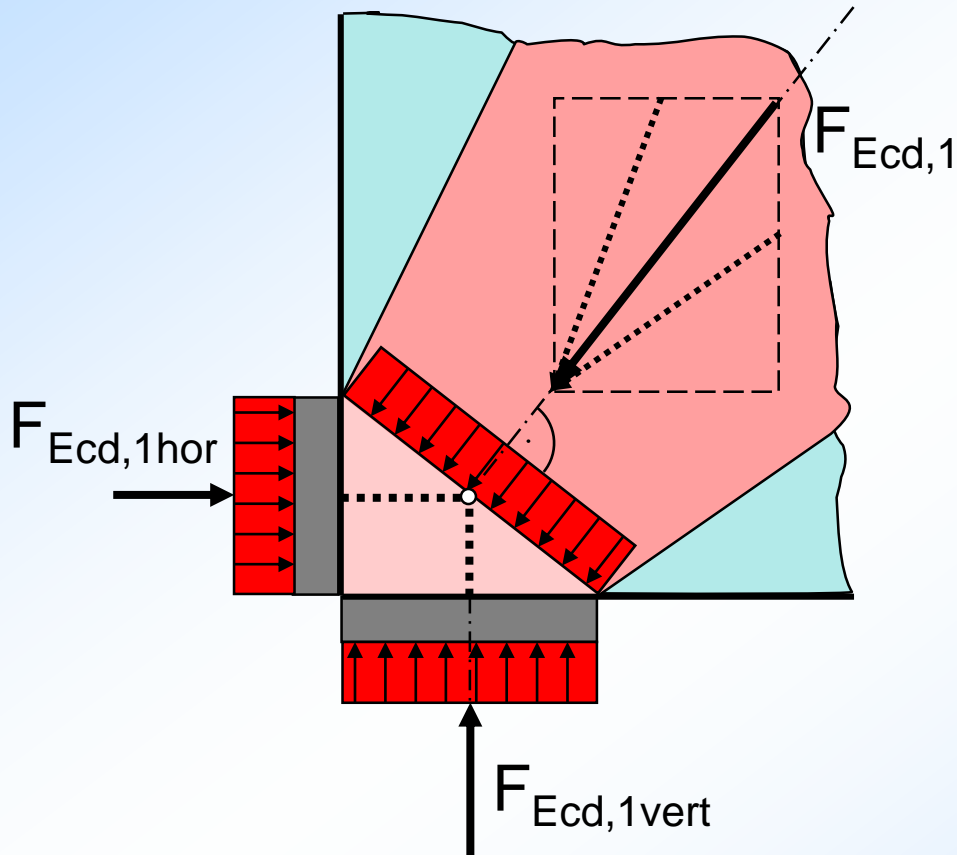
$v_2$  erst ab C55/67

# Druckknoten am Bauteilrand (CCC) durchtrennt





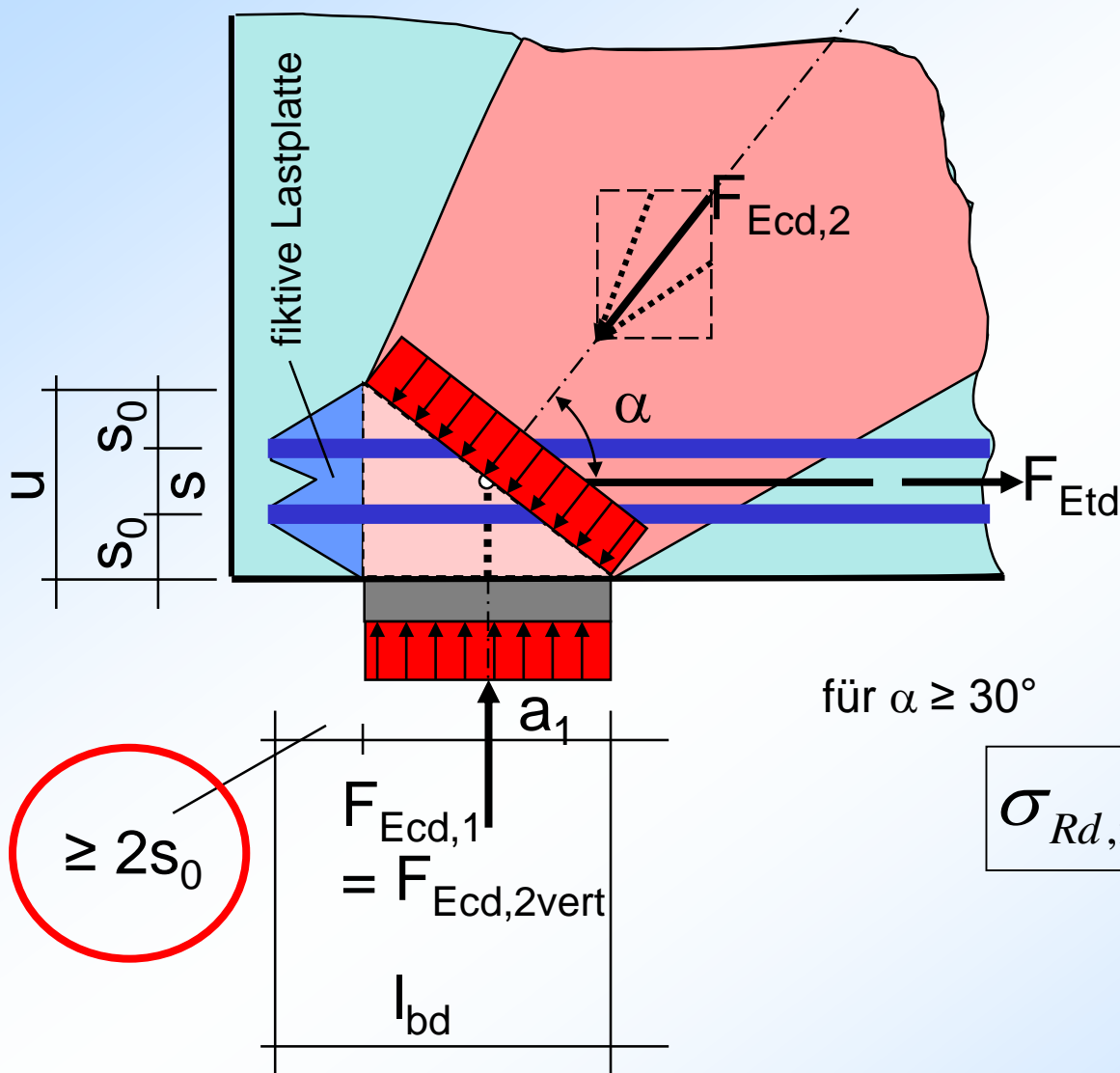
# Druckknoten in Bauteilecke (CCC)



$$\sigma_{Rd,max} = 1,1 \cdot v_2 \cdot f_{cd}$$

$v_2$  erst ab C55/67

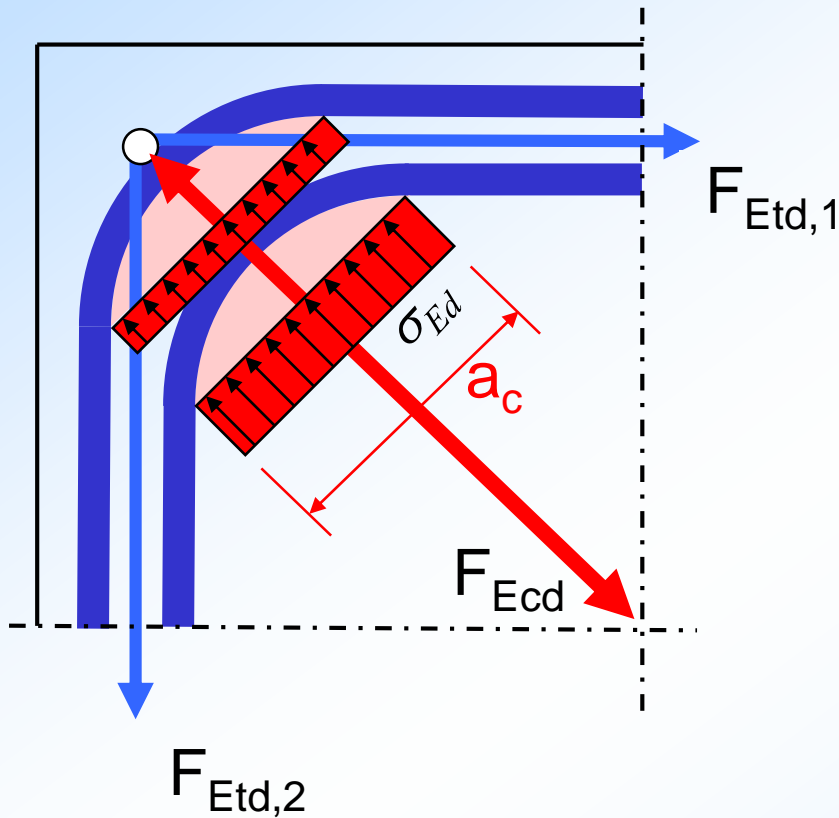
# Druck-Zug-Knoten (TCC)



$$\sigma_{Rd,max} = 0,75 \cdot v_2 \cdot f_{cd}$$

$v_2$  erst ab C55/67

# Knoten mit Umlenkung von Bewehrung (TTC)



EC2, Bild 6.28

Nachweis der zul. Druckspannung durch Einhaltung der Mindest-Biegerollendurchmesser  $d_{br}$  dringend zu empfehlen.

$$\sigma_{Rd,max} = 0,75 \cdot v_2 \cdot f_{cd}$$

$v_2$  erst ab C55/67

$$\sigma_{Ed} = \frac{F_{Etd}}{\underbrace{b_w \cdot d_{br} / 2}_{\text{nach Kesselformel}}} = \frac{F_{Ecd}}{a_c \cdot b_w}$$

nach Kesselformel

$b_w$  Bauteilbreite senkrecht zur Zeichenebene

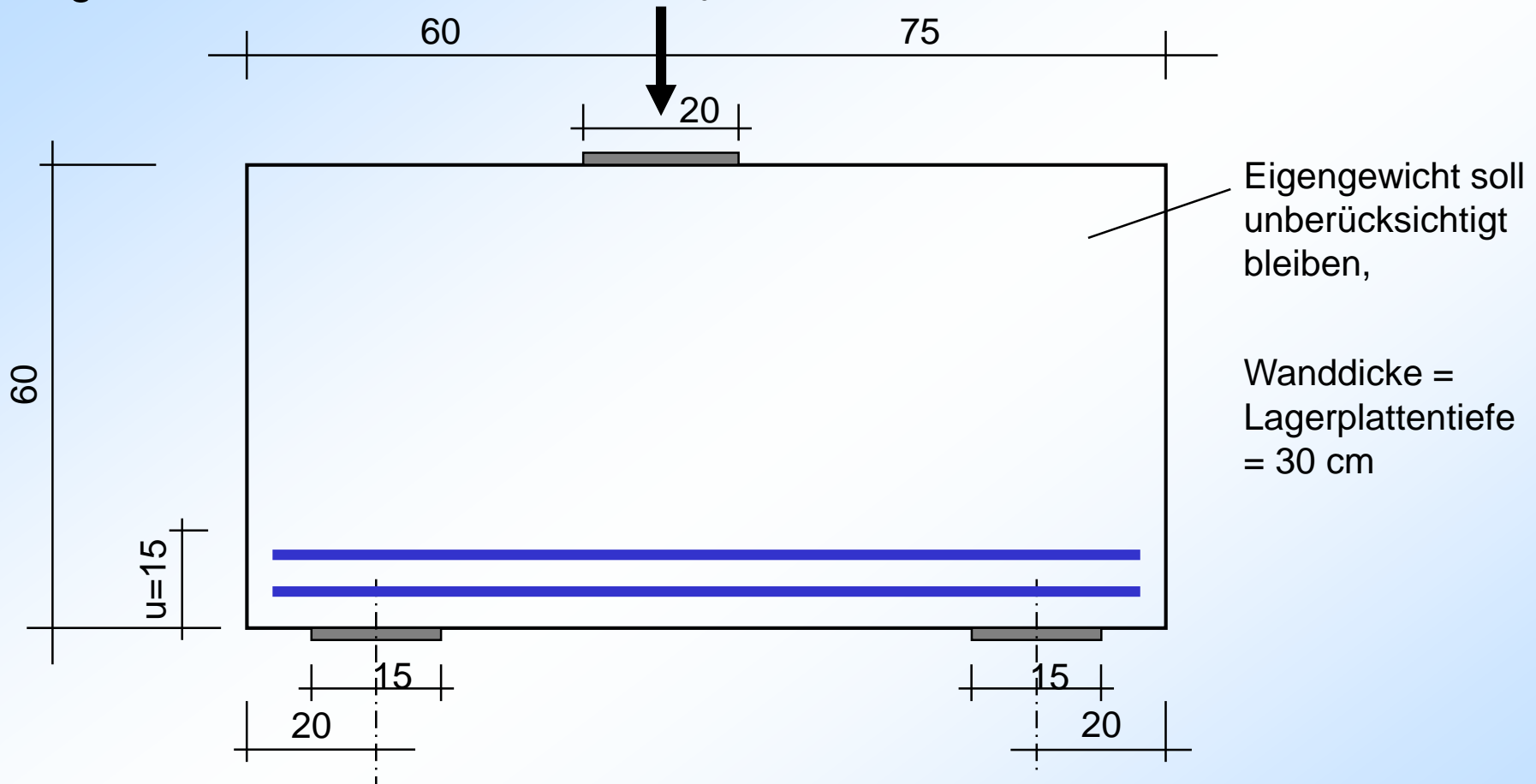
Ansatz von  $b_w$  setzt voraus, dass Spalten im Umlenk-knoten durch Querbewehrung vermieden wird.



Aufgabe:

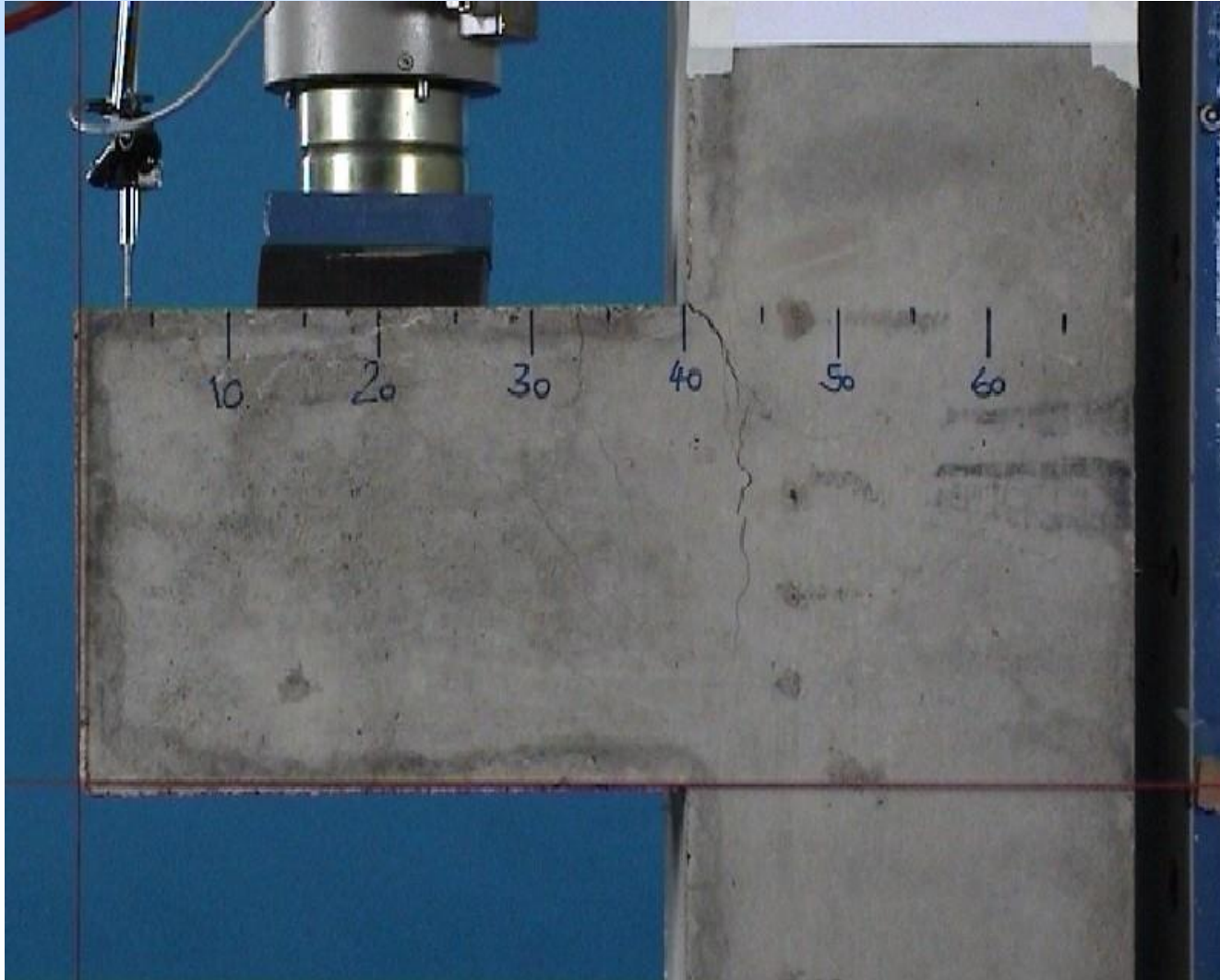
Abfangekonstruktion C20/25

$F_d = 650 \text{ kN}$



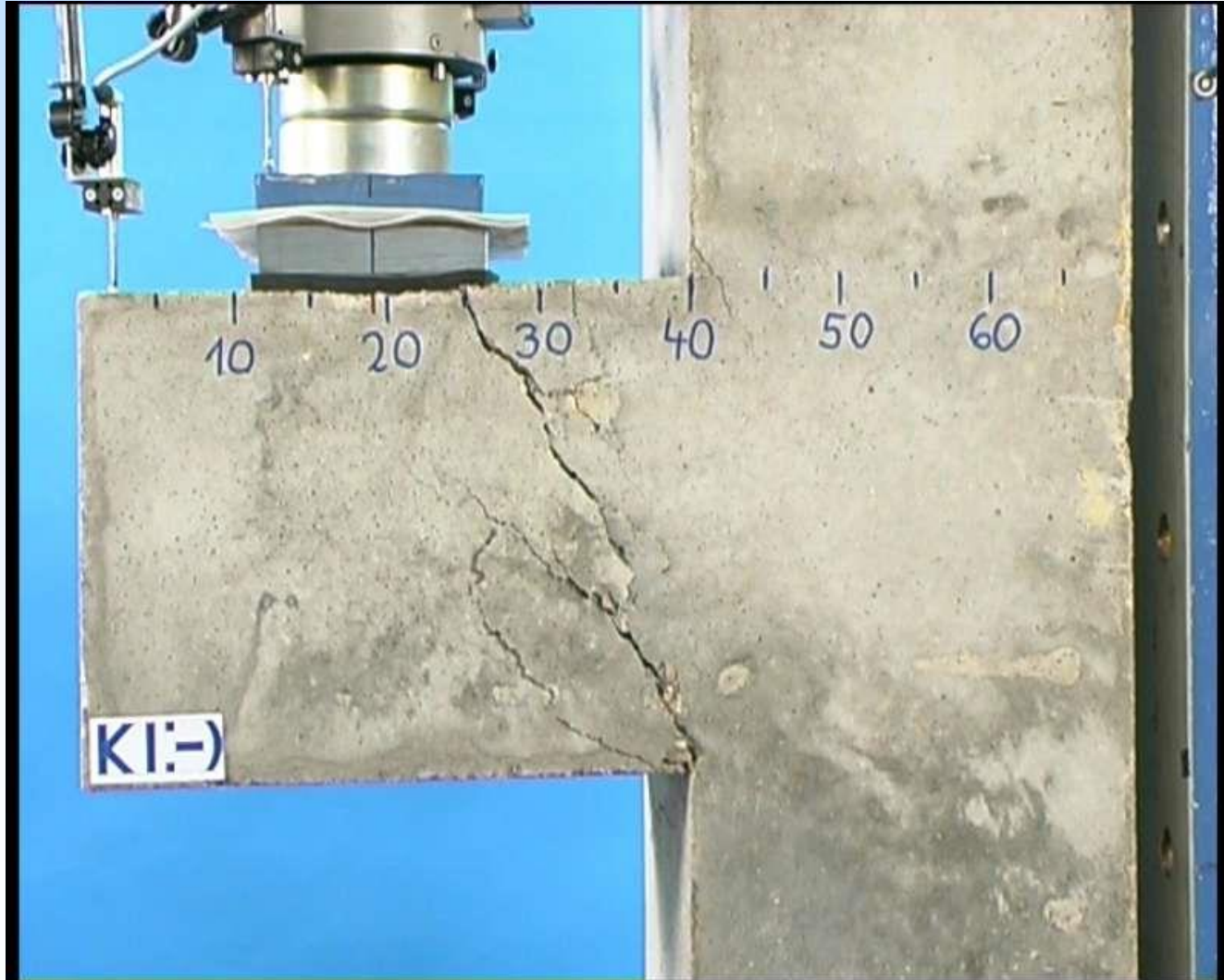
1. Ermitteln Sie über die „genaue“ Konstruktion der Knoten die Stabgeometrie (Neigungswinkel der Druckstreben) und die Druckstrebenkräfte.
2. Ermitteln Sie die Spannungen an den Lastplatten (einschl. fiktiver Lastplatten) und vergleichen Sie diese mit der jeweils zulässigen Spannung.

## 2 Konsolen



1. Projekt: KI-SMILE (Konstruktiver Ingenieurbau - Simulation, Motivation, Interaktion in Lehre und Experiment) : neue Medien im konstruktiven Ingenieurbau; Schlussbericht; [Laufzeit: 01.03.2001 - 31.12.2003] / [Projektpartner: Fachhochschule Potsdam, FB Bauingenieurwesen. Projektleitung: J. Vielhaber ... Fachhochschule Potsdam, FB Design. Leitung: M. Krohn. TFH Berlin, FB III. Leitung: A. Fischer. TU Berlin, Institut für Sprache und Kommunikation. Leitung: C. Schwender] <https://edocs.tib.eu/files/e01fb06/516981633.pdf>

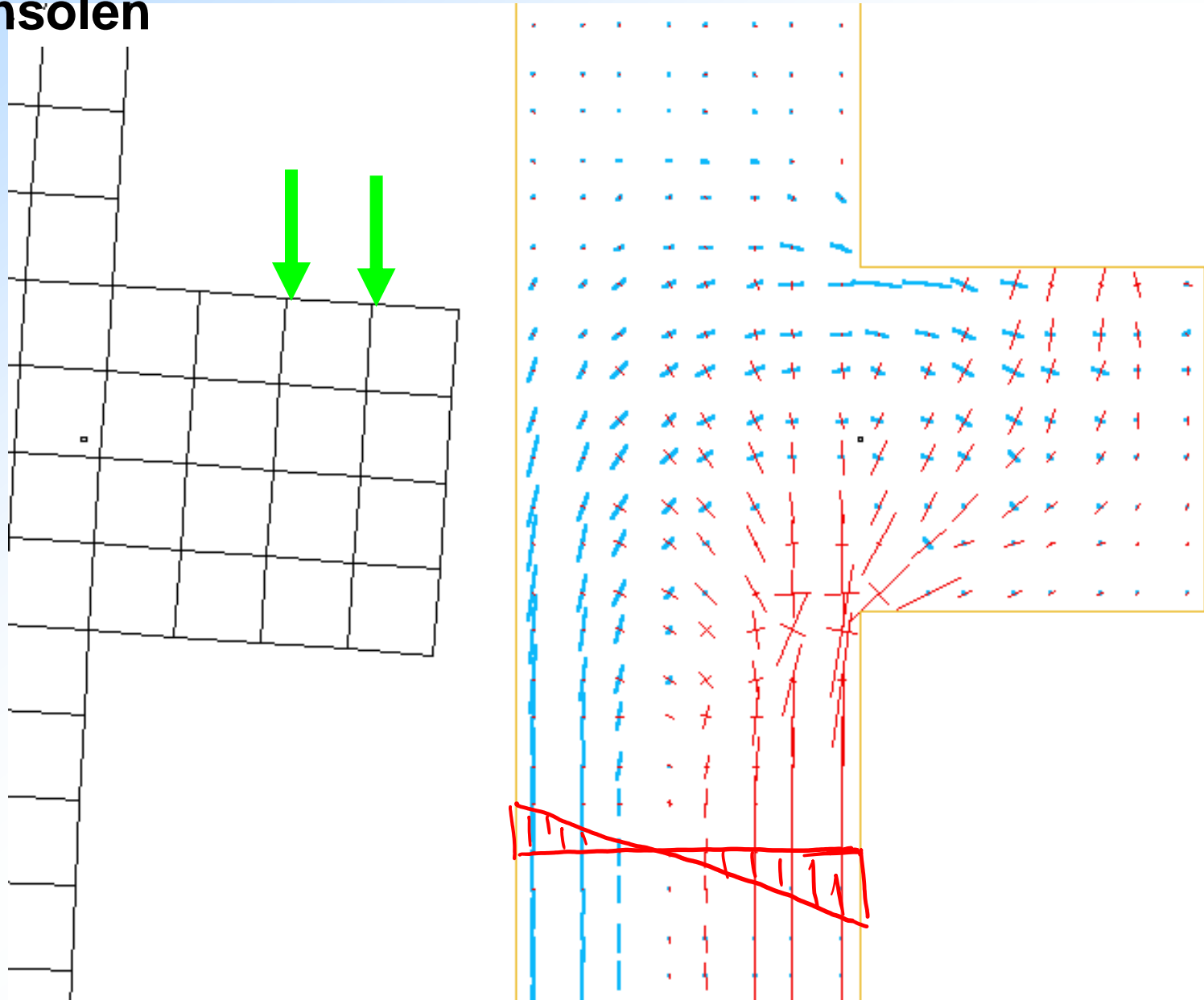
## 2 Konsolen

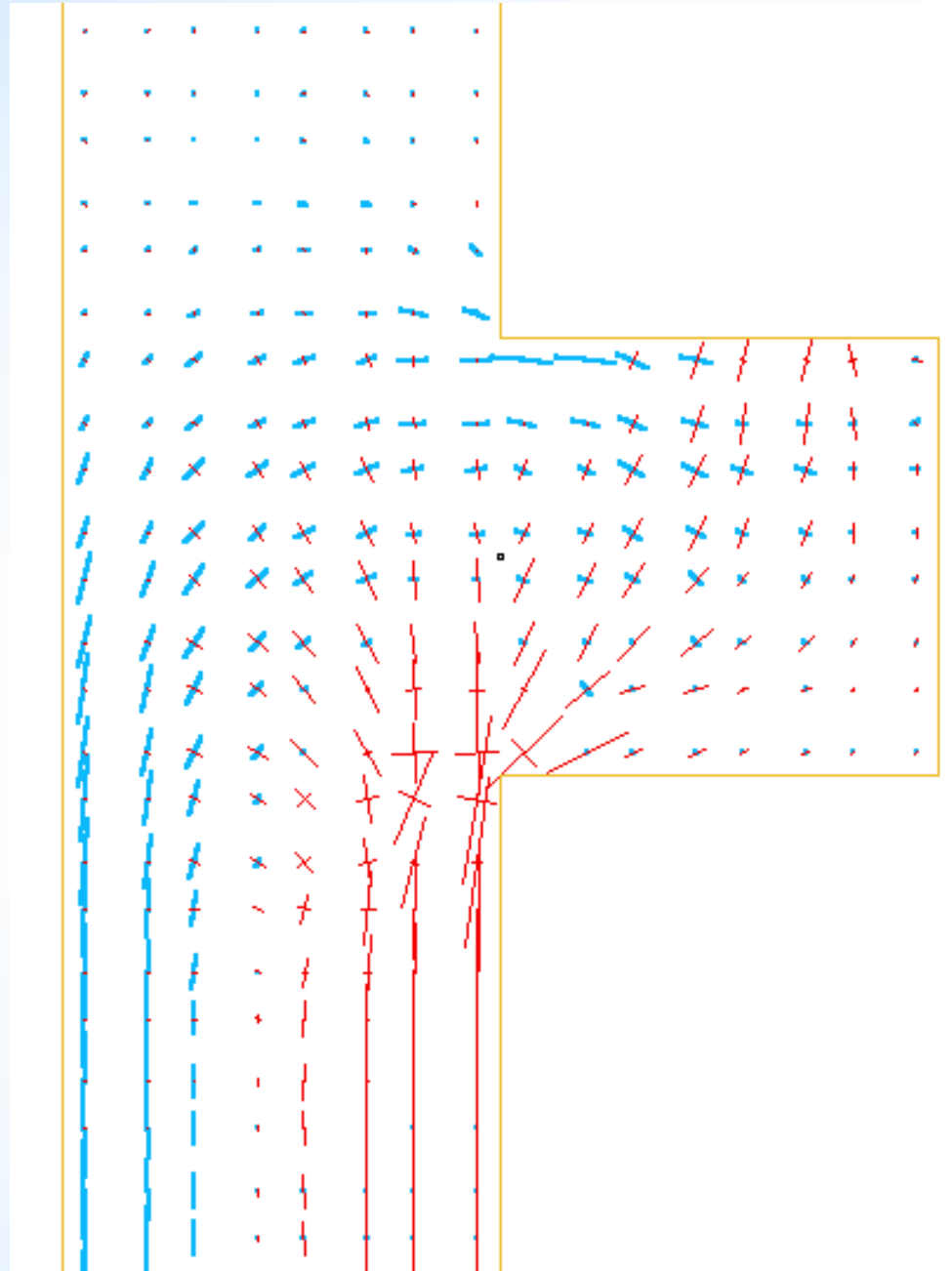
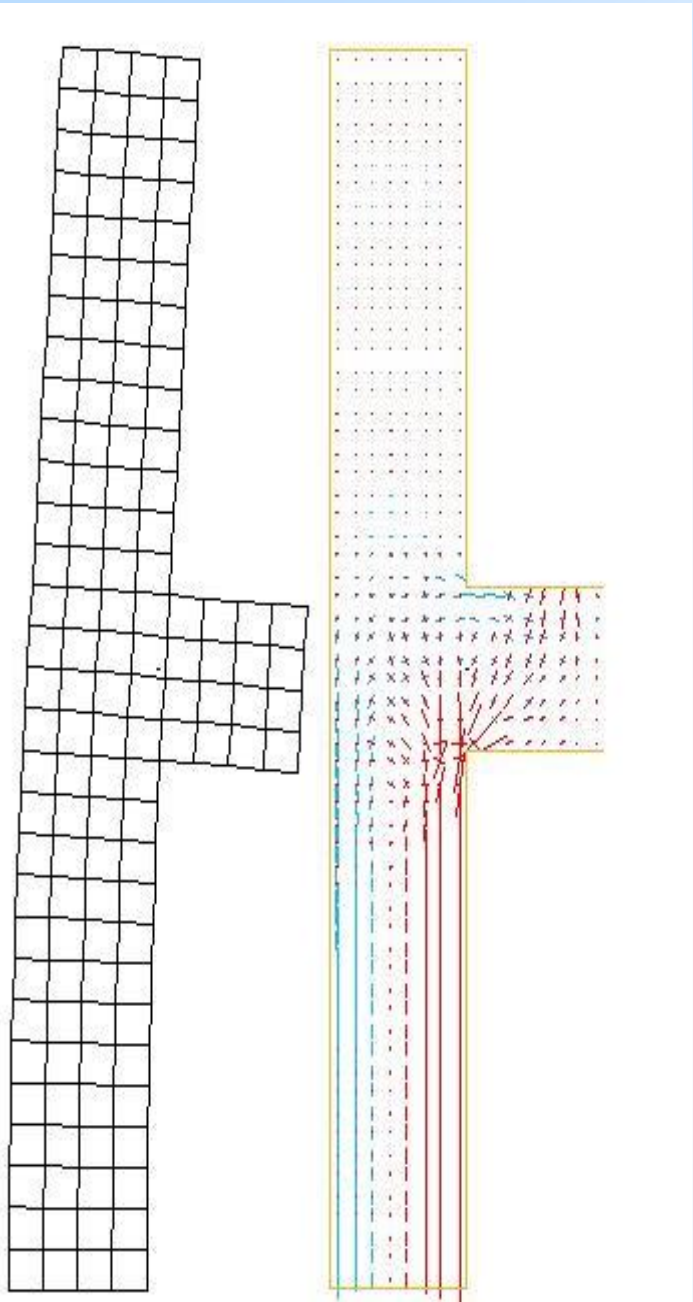


1. Projekt: KI-SMILE (Konstruktiver Ingenieurbau - Simulation, Motivation, Interaktion in Lehre und Experiment) : neue Medien im konstruktiven Ingenieurbau; Schlussbericht; [Laufzeit: 01.03.2001 - 31.12.2003] / [Projektpartner: Fachhochschule Potsdam, FB Bauingenieurwesen. Projektleitung: J. Vielhaber ... Fachhochschule Potsdam, FB Design. Leitung: M. Krohn. TFH Berlin, FB III. Leitung: A. Fischer. TU Berlin, Institut für Sprache und Kommunikation. Leitung: C. Schwender] <https://edocs.tib.eu/files/e01fb06/516981633.pdf>



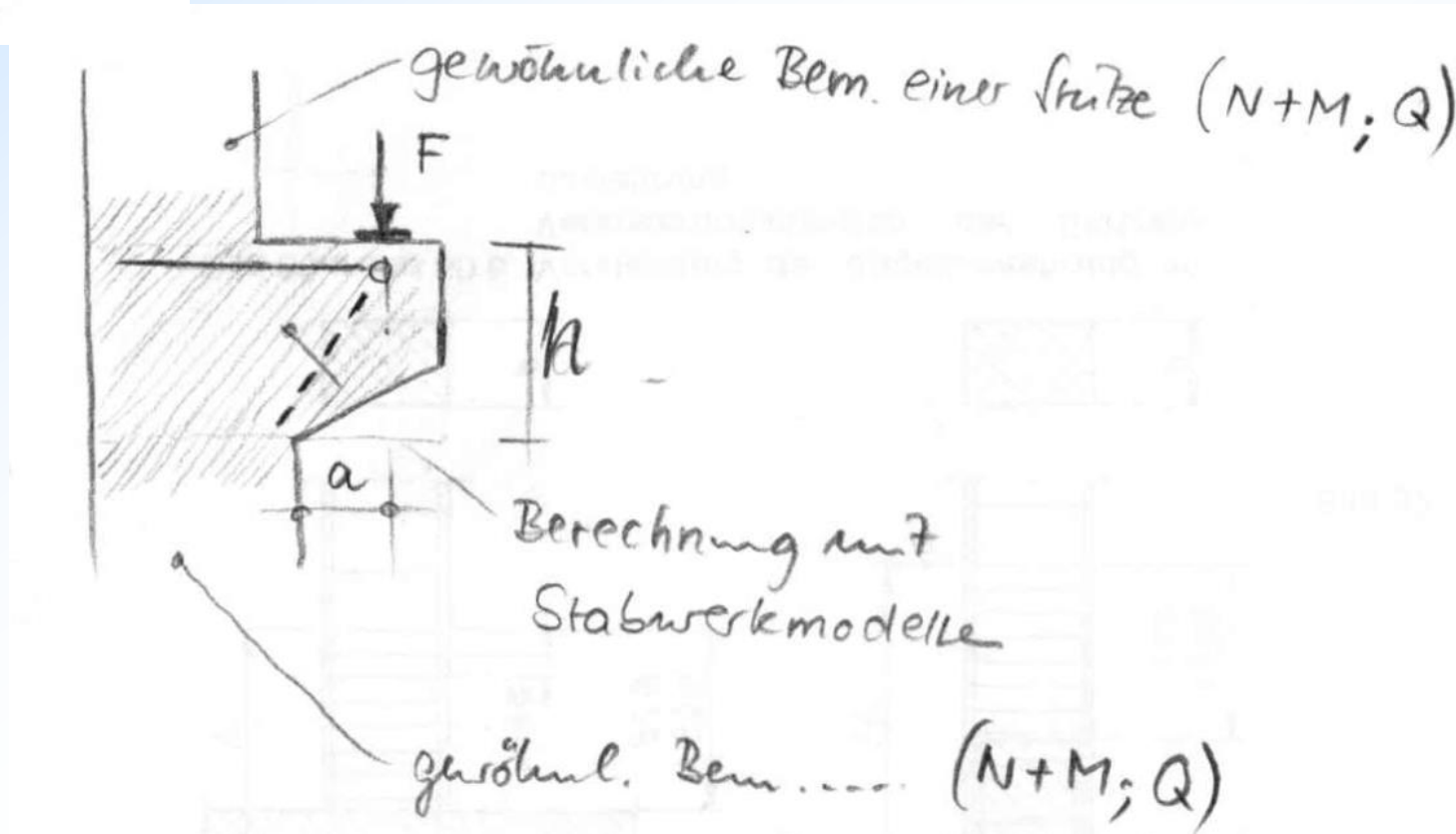
## 2 Konsolen



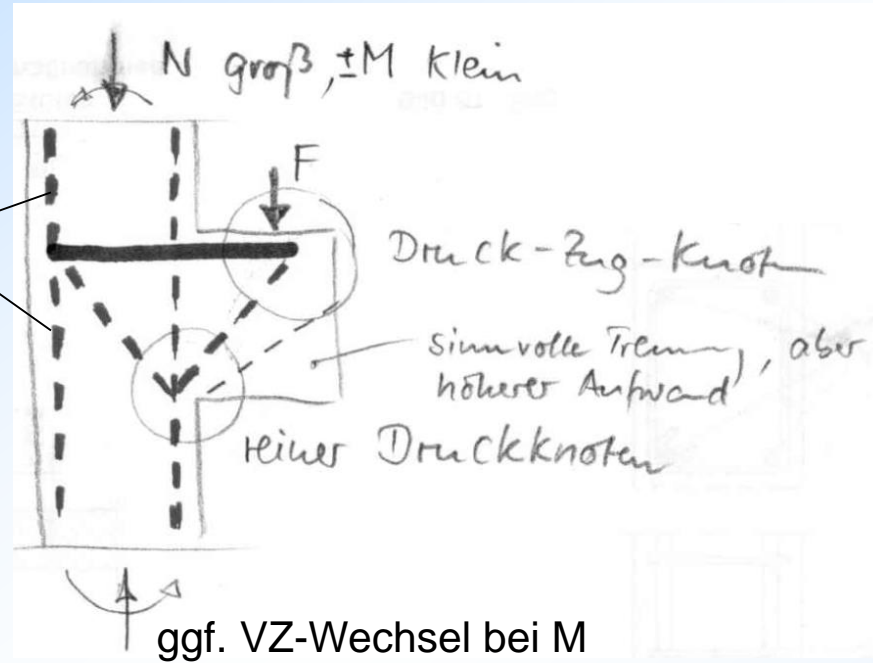


Konsolen = kurze „Kragträger“, besser: Krag­scheiben, die nicht mehr nach der Balkentheorie bemessen werden können.

$$\frac{a}{h} \leq 1,0$$

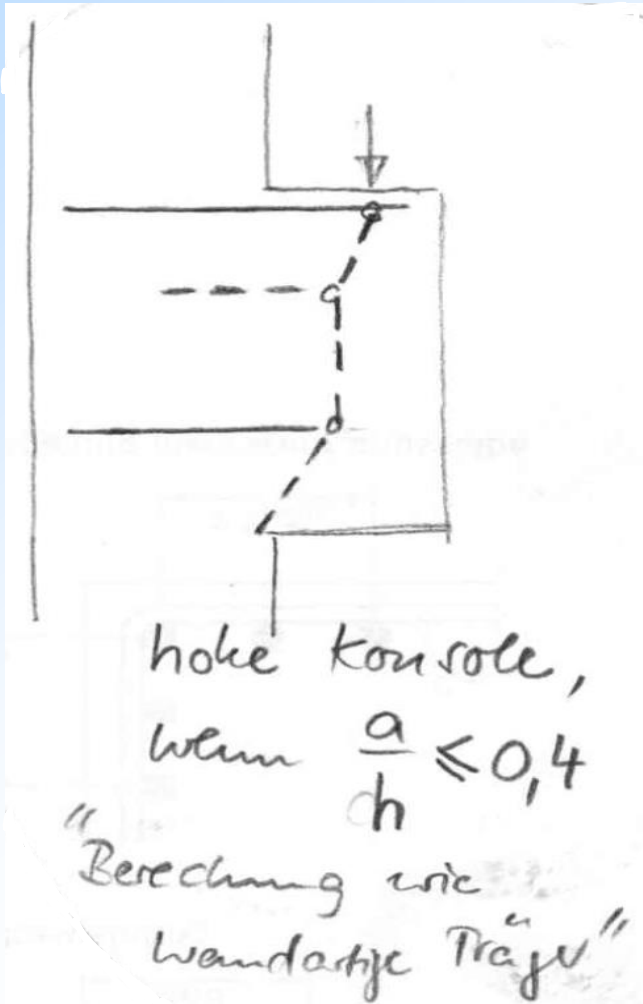


bei neg. M und  
geringerem N  
kann dieser Gurt  
auch ein Zuggurt  
sein.

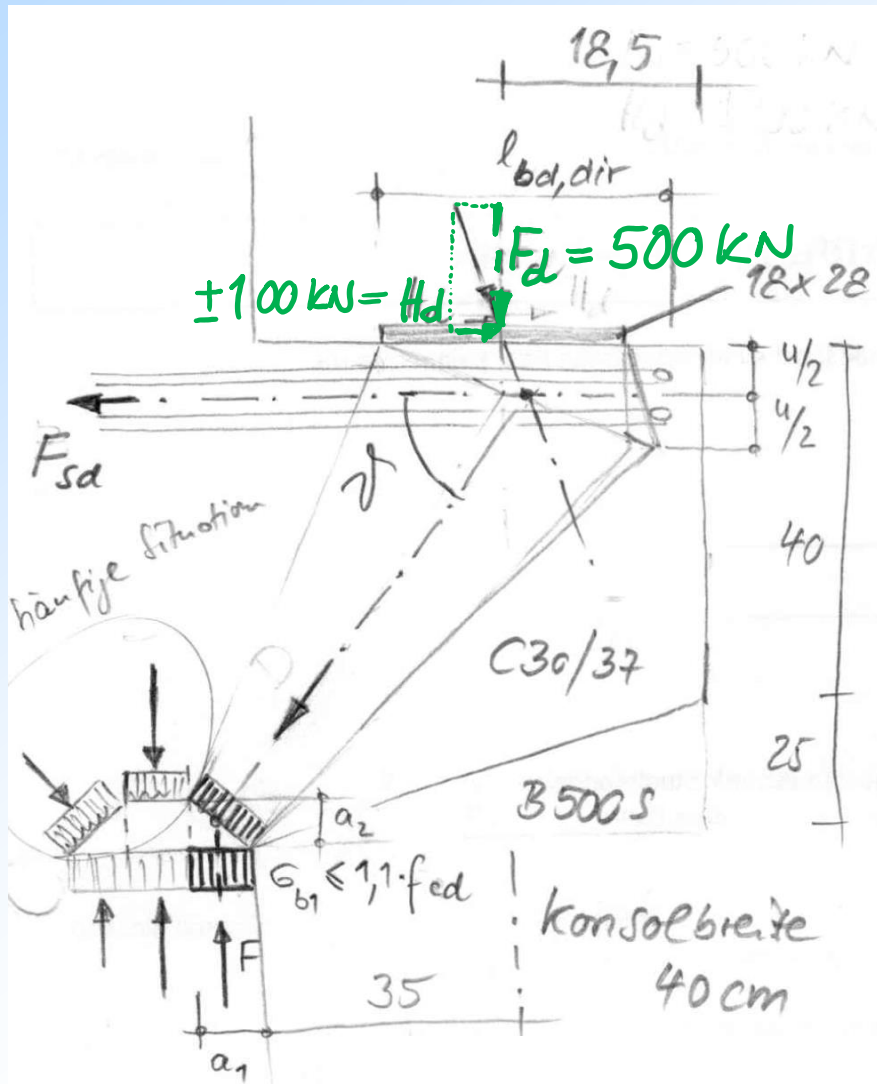


Lasteinleitung mittels einfacher, unbewehrter Elastomerlager zur Vermeidung großer Kantenpressungen sehr empfehlenswert (dabei Mindeststrandabstände beachten).

Sofern nicht besonders nachgewiesen, sollte eine zusätzliche H-Kraft infolge unberücksichtigter Zwangbeanspruchung von  $\pm 0,2 \cdot F$  in der Mitte des Lagers berücksichtigt werden.



## Beispiel:



Bauteil mit häufigem Zutritt von Außenluft

1. Nachweis der Lagerpressung
2. Ermittlung von  $a_1$
3. Vorschätzen von  $u/2$  und  $a_2$
4. Ermittlung von  $F_{cd,h}$  und  $F_{sd}$
5. Kontrolle von  $a_2$
6. Bewehrungswahl und Kontrolle  $u/2$ , ggf. red u an gedachter Lastplatte beachten
7. Nachweis der Verankerungslänge
8. Nachweis am Umlenkknott und der Übergreifungslänge mit dem Zuggurt, bzw. beim Druckgurt Nw der Verankerungslänge ab der Stützenvorderkante



$$F_d = 500 \text{ kN}$$

C30/37

$$f_{cd} = \frac{0,85 \cdot 30}{1,5} = 17,0 \text{ MN/m}^2$$

$$H_d = 0,20 \cdot 500 = 100 \text{ kN}$$

Kontrolle mit  $0,4 \leq \frac{a}{h} \leq 1,0$

$$\frac{a}{h} = \frac{35}{65} = 0,54$$

## 1. Nachweis der Lagerprestung

$$\sigma_l = \frac{0,500}{0,18 \cdot 0,28} = 9,9 \text{ MN/m}^2 \leq 0,75 \cdot 17 = 12,75$$

generell empfehlenswert:  
(Ausführung mit Schlauf)

## 2. Ermittlung von $a_1$

$$\sigma_1 = \frac{0,500 \text{ MN}}{a_1 \cdot 0,40 \text{ m}} \leq 1,1 \cdot 17,0 \Rightarrow a_1 = 0,067 \text{ m}$$

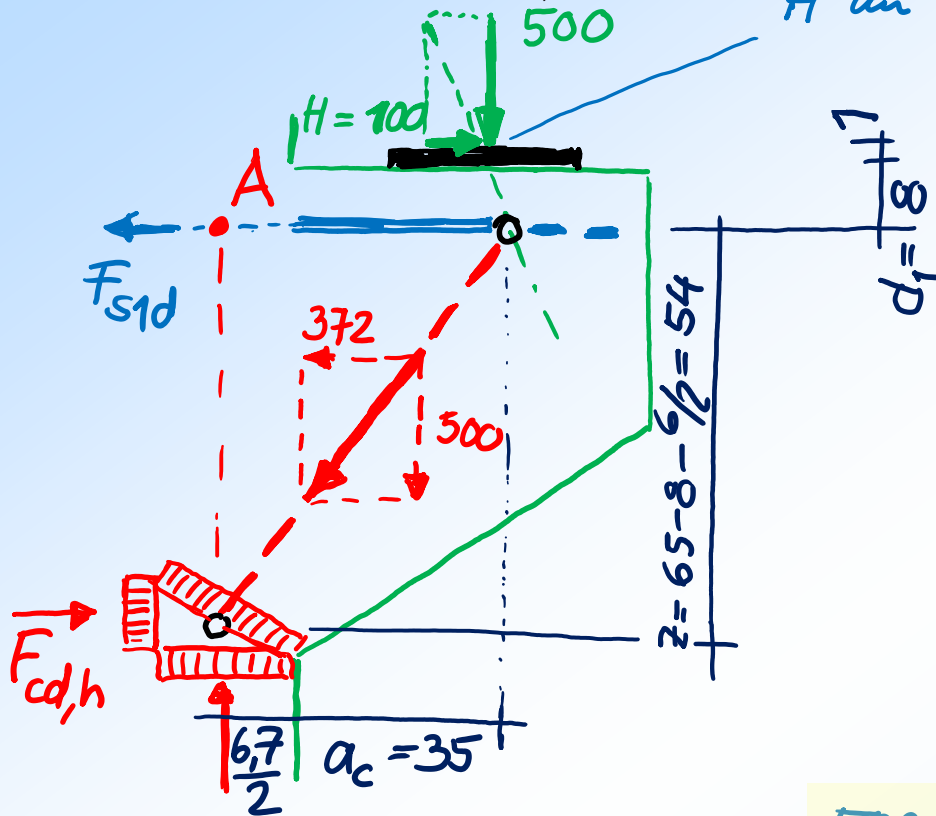
in der Regel Knoten unter absertig Druck

## 3. Vorschätzen von $\frac{u}{2}$ und $a_2$

$$a_2 \approx 6 \text{ cm}$$

$$\frac{u}{2} \approx 8 \text{ cm}$$

4. Ermittlung von  $F_{cd,h}$  und  $F_{sd}$  *H an ok Lager liegt auf sicherer Seite*



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{cd,h} = \frac{500 \cdot 0,3835 + 100 \cdot 0,09}{0,54} = 372 \text{ kN}$$

$$\sum F_{hor} = 0 \Rightarrow F_{sd} = 472 \text{ kN}$$

5. Kontrolle von  $a_2$

$$erfa_2 = \frac{0,372 \text{ MN}}{0,40 \text{ m} \cdot (1,1 \cdot 17,0 \text{ MN/m}^2)} = 0,05 \leq 0,06 \text{ m} \text{ geschätzt}$$

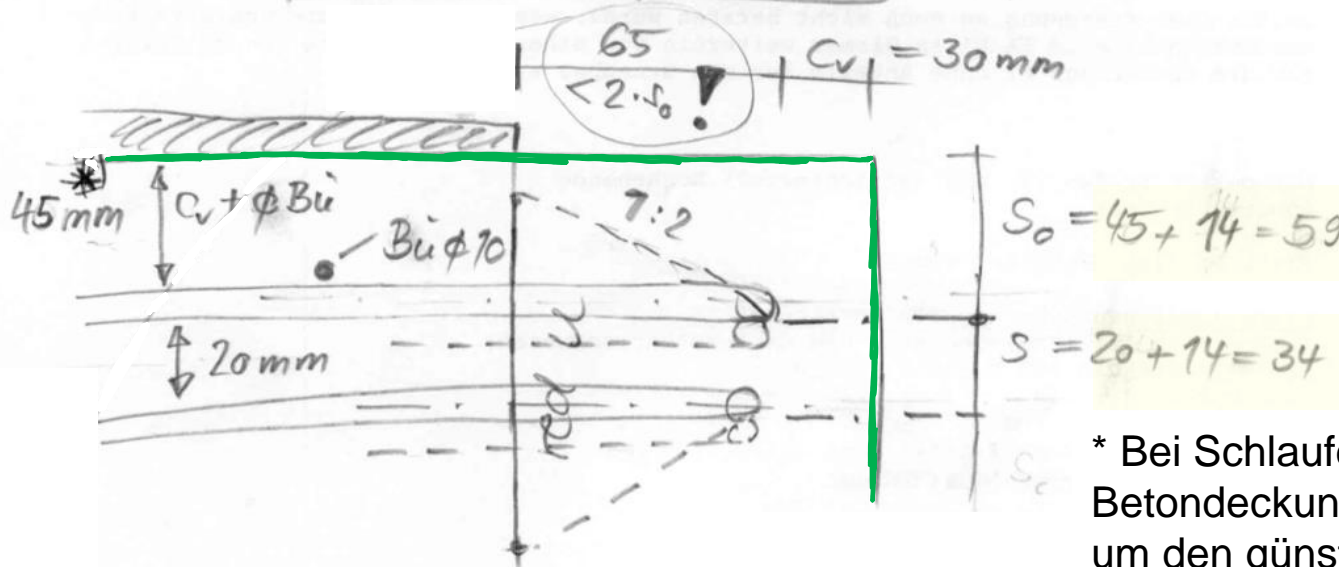
## 6. Bewehrungswahl und Kontrolle $u/2$ , ggf. red u an gedachter Lastplatte beachten

$$erf A_s = \frac{0,472}{435} \cdot 10^4 = 10,85 \text{ cm}^2$$

XC3  $\Rightarrow$  mind C20/25

$$\Rightarrow c_v = 20 + 15 = 35$$

gew. 4 Schlaufen  $\phi 14 \Rightarrow 12,32 \text{ cm}^2$



\* Bei Schlaufen muss die Betondeckung größer sein als  $3 \cdot \phi_s$ , um den günstigen  $\alpha_1$ -Wert bei der Verankerungslänge nutzen zu können.

Schwerachse der Bew.  $\frac{u}{2} = 59 + \frac{34}{2} = 76 \text{ mm} \geq 80 \text{ mm}$  (geschätzt)

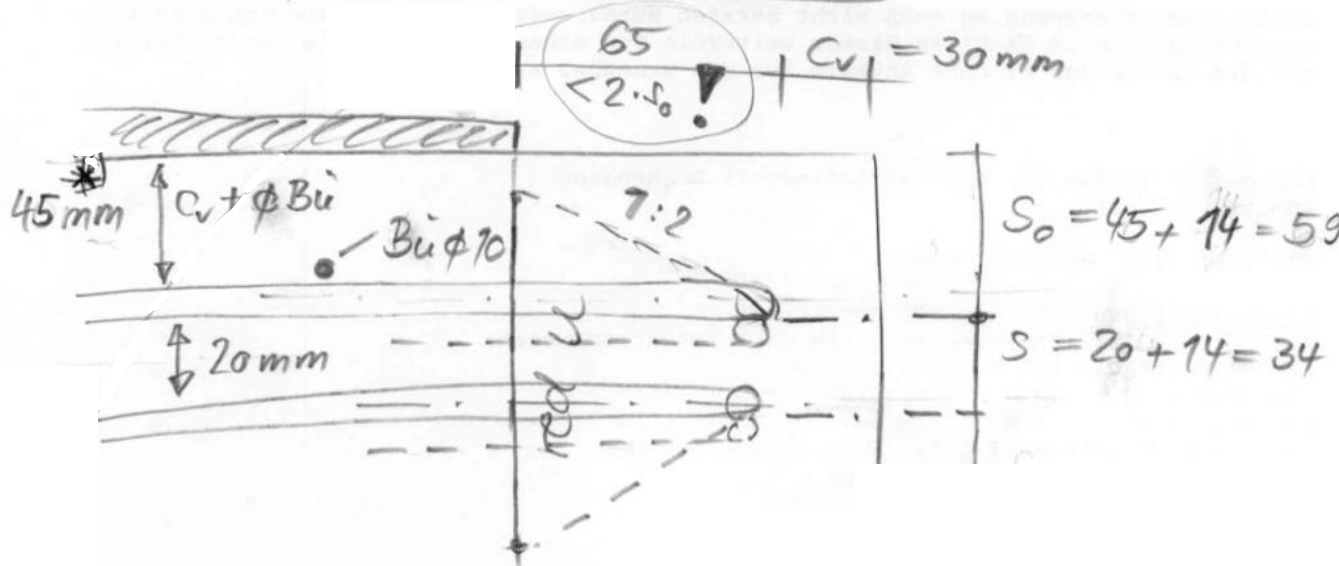
## 6. Bewehrungswahl und Kontrolle $u/2$ , ggf. red $u$ an gedachter Lastplatte beachten

$$erf A_s = \frac{0,472}{435} \cdot 10^4 = 10,85 \text{ cm}^2$$

XC3  $\Rightarrow$  mind C20/25

$$\Rightarrow c_v = 20 + 15 = 35$$

$$\boxed{\text{gew. 4 Schlaufen } \phi 14} \hat{=} 12,32 \text{ cm}^2$$



**Hinweis zur Betondeckung der Schlaufen: die 30mm können auch als richtig betrachtet werden, wenn im Fertigteilwerk eine besondere Qualitätskontrolle vorgenommen wird (s. EC2, Tab. 4.3.N).**

Spannungsnachweis an fiktiver Lastplatte:

$$\sigma_c = \frac{0,472 \text{ MN}}{0,40 \text{ m} \cdot 0,099 \text{ m}} = 11,9 \leq 12,75 \text{ MN/m}^2$$

$$\rightarrow \text{red } u = 34 + 2 \cdot \frac{65}{2} = 99 \text{ mm}$$

## 7. Nachweis der Verankerungslänge unter der Lastplatte

gew. Verankerung mit tieferer Schlaufe  $d_{br} \geq 15 \cdot d_s \Rightarrow \alpha_1 = 0,5$   
 $c_v \geq 3 \cdot d_s$

maßiger V.

$$\text{erf } l_{s,d,dir} = \frac{2}{3} \alpha_1 \cdot \alpha_4 \cdot \frac{\text{erf } A_s}{\text{vorh } A_s} \cdot (71)$$

günstiges Querdr.  $\alpha_4 \geq 0,3$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot \frac{10,85}{12,32} \cdot 71 \approx 21$$

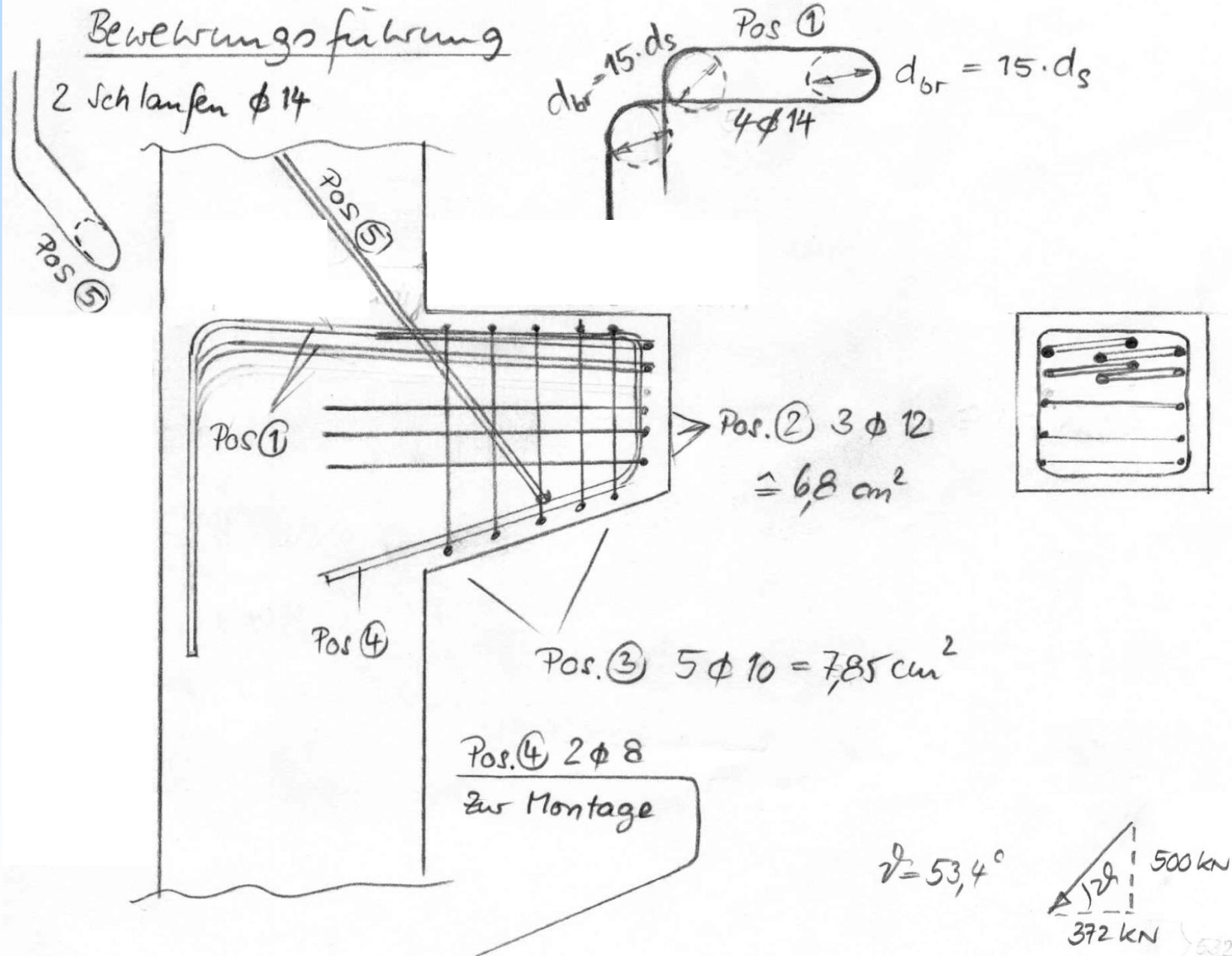
$$\geq \frac{d_{br}}{2} + d_s = \frac{15 \cdot 14}{2} + 1,4 = 11,9 \text{ cm}$$

$$\text{vorh } l_{s,d,dir} = 9 + 18,5 - 3,0 = 24,5 \text{ cm} \geq 21 \text{ cm}$$

8. Nachweis am Umlenkknoten und der Übergreifungslänge mit dem Zuggurt, bzw. beim Druckgurt Nw der Verankerungslänge ab der Stützenvorderkante

hier mangels Stützendaten nicht geführt

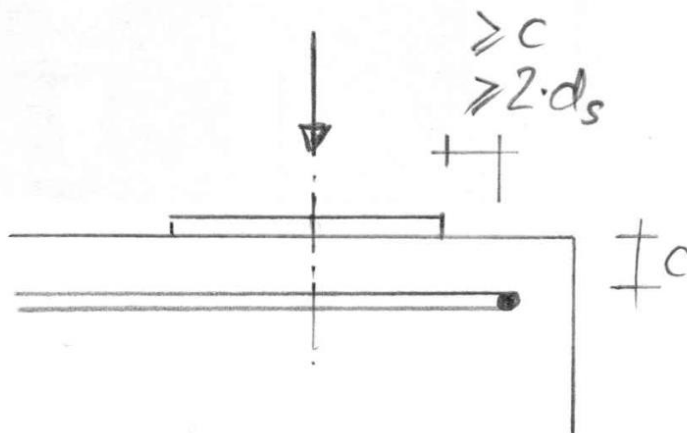






$F_{cd} = 0,500 / \sin 53,4^\circ = 0,623 \text{ MN}$   
 $\Rightarrow F_{sd} \approx 2 \cdot \frac{F_{cd}}{4} \Rightarrow \text{erf } A_s = \frac{0,312 \cdot 10^4}{435} = \underline{\underline{7,2 \text{ cm}^2}}$   
 vereinfachend horizontal u. vertikal  
 Pos ②                      Pos ③  
 einlegen.

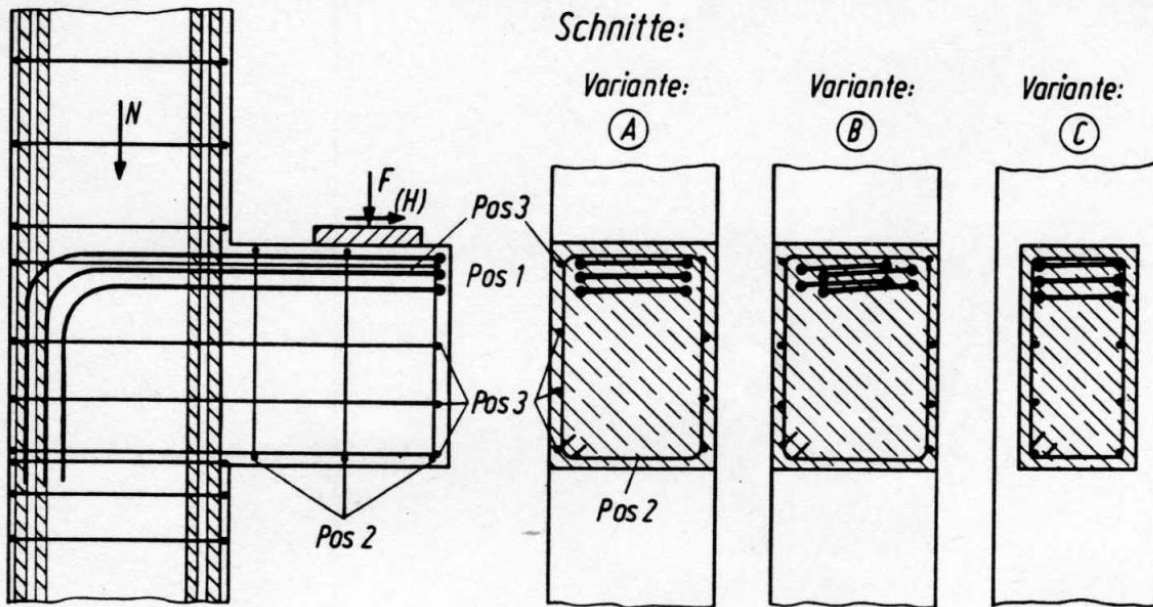
weitere konstruktive Forderung



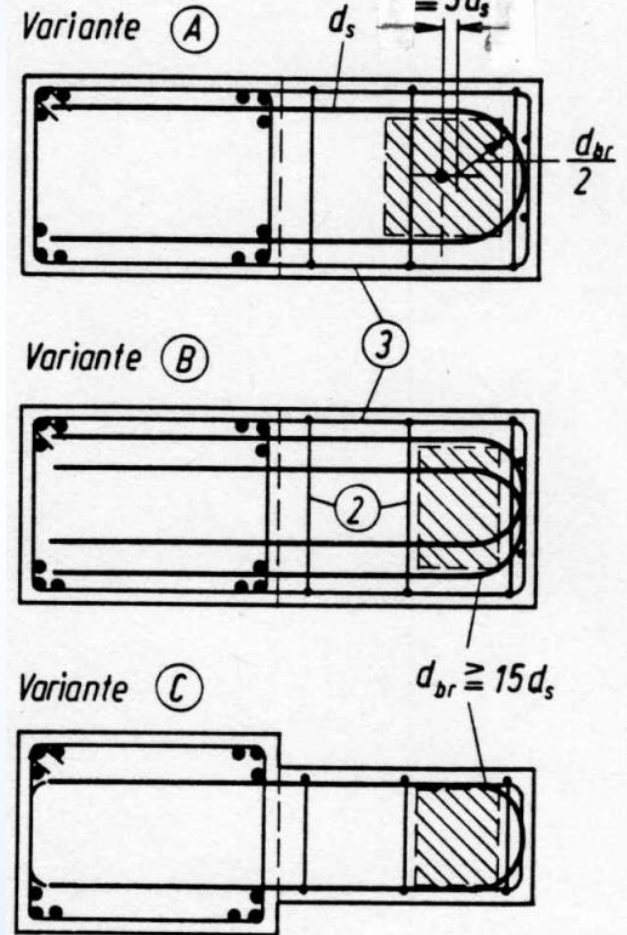
$c = 4,5 \text{ cm}$

$2 \cdot d_s = 2 \cdot 1,4 = 2,8 \text{ cm}$

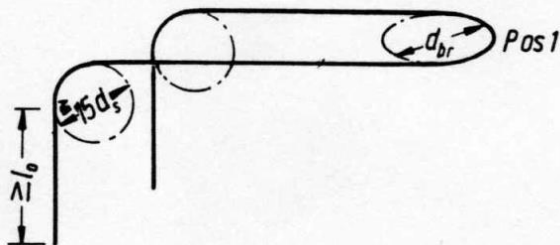
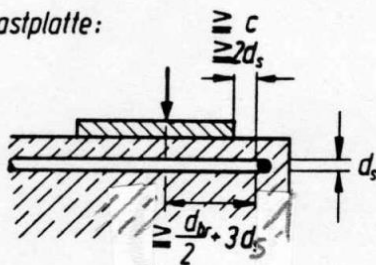
vorh:  $18,5 - 9,0 - 3,0 - 1,4 = 5,1 \text{ cm}$



Grundrisse:

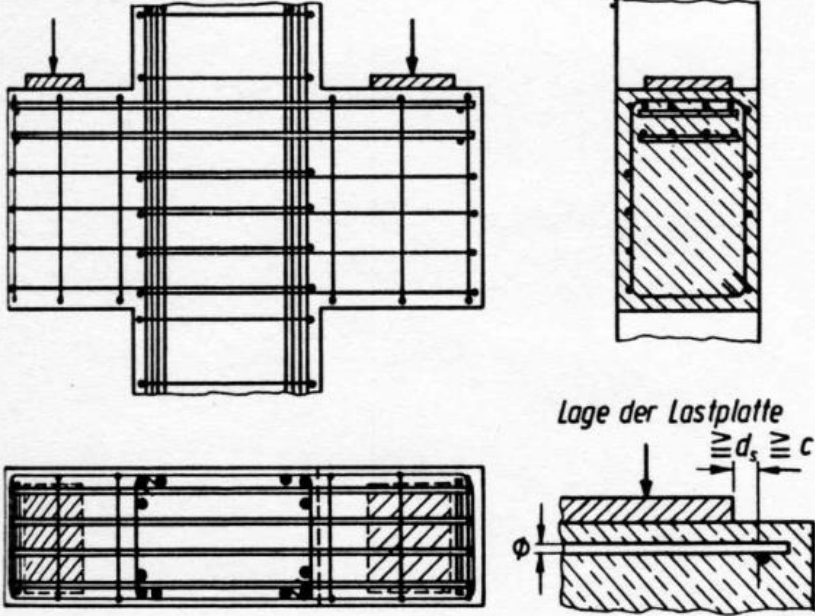


Lage der Lastplatte:

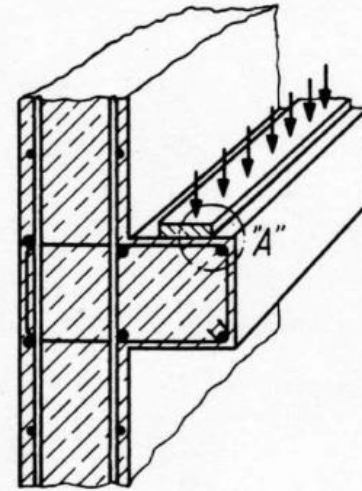


**Bild 4.5-7.** Zweckmäßige Bewehrungen in Konsolen (Modell Bild 4.5-1a)

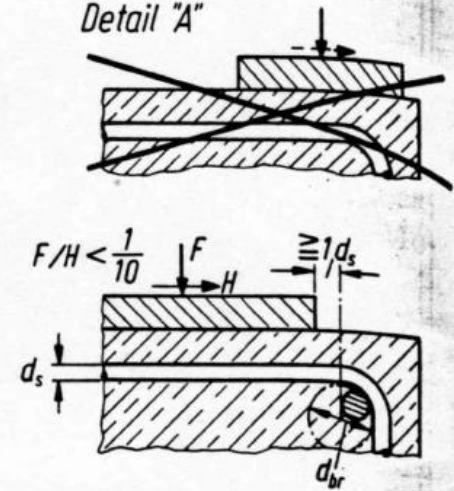
entnommen aus:  
Schlach/Schäfer: konstruieren im Stahlbetonbau  
in Bk 98/II



**Bild 4.5-8.** Verankerung der Gurtbewehrung von Konsolen mit angeschweißtem Querstab



Detail "A"



**Bild 4.5-6.** Regel für nach unten abgebogene Gurtstäbe in Konsolen nach [4.19]

entnommen aus:  
Schlaich/Schäfer: konstruieren im Stahlbetonbau  
in Bk 98/II

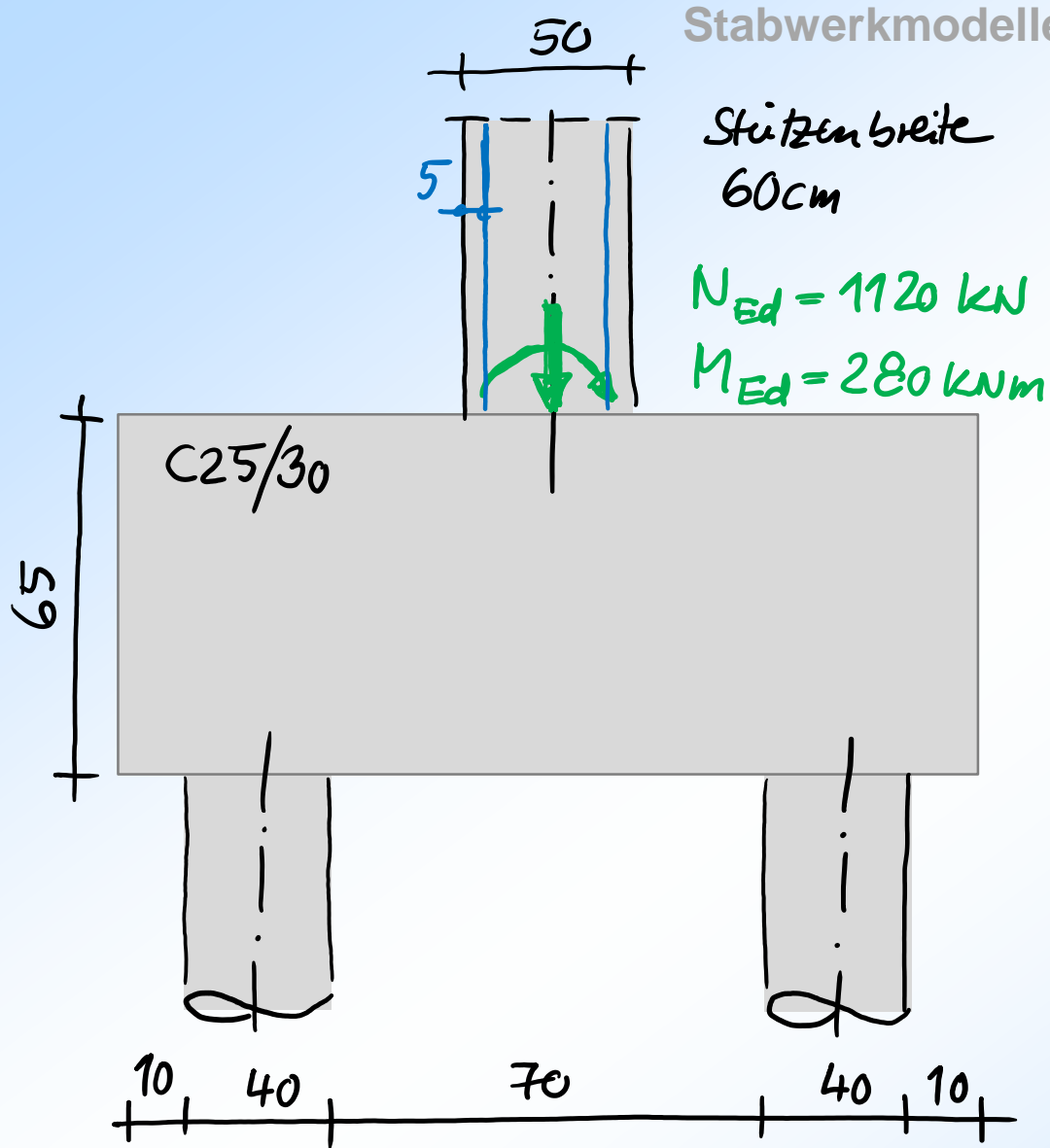




Was ist hier falsch?

Prof. Dr.-Ing. Andreas Fischer

# Stabwerkmodelle



# Stabwerkmodelle

0,258



0



0

1,358

+5



305

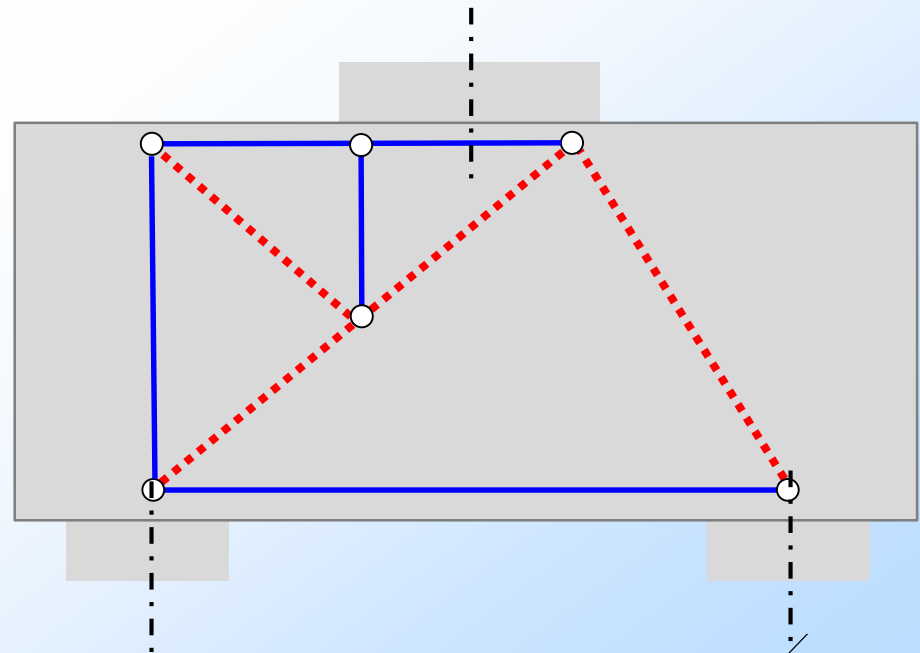
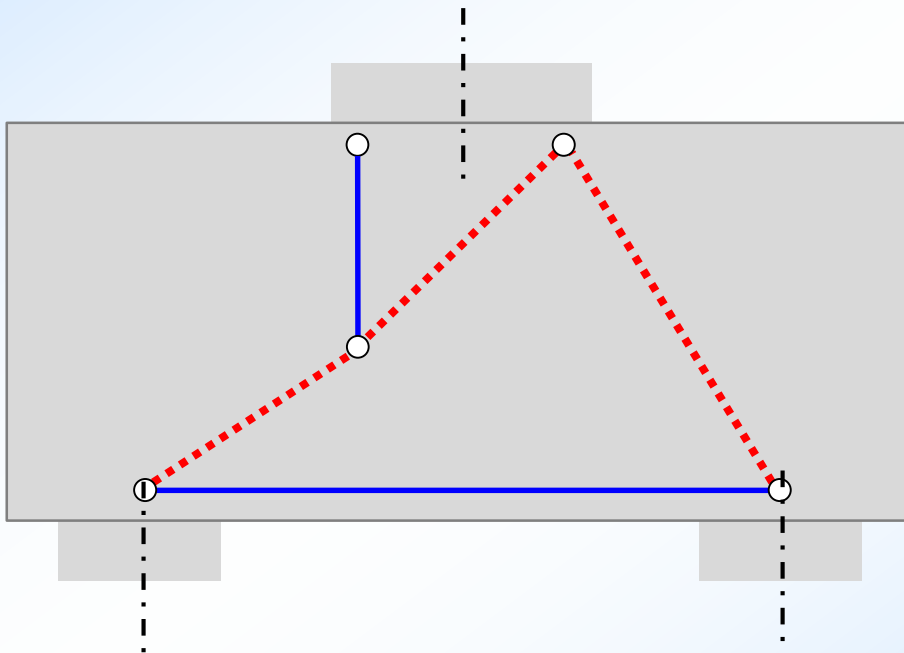
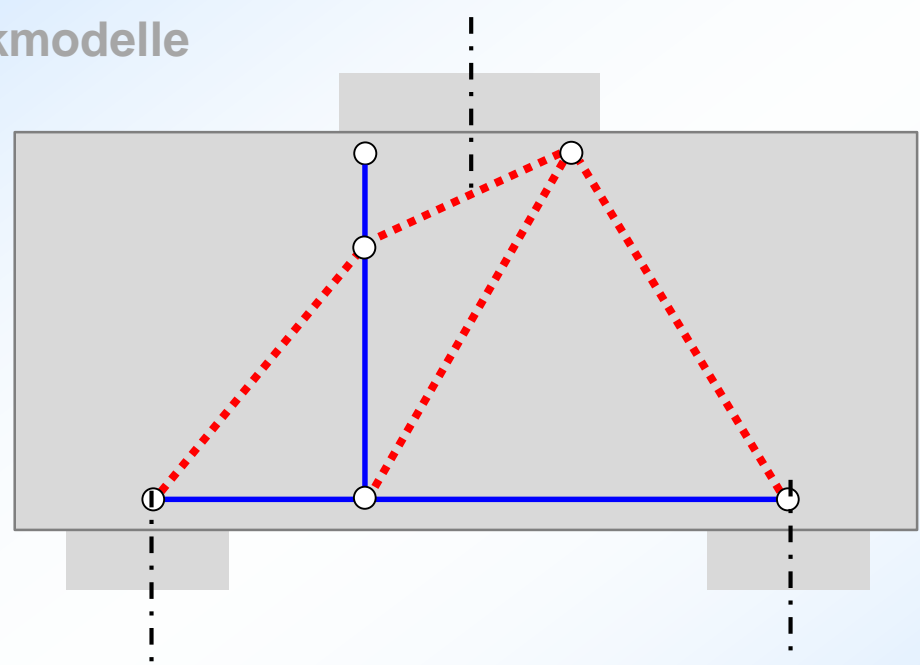
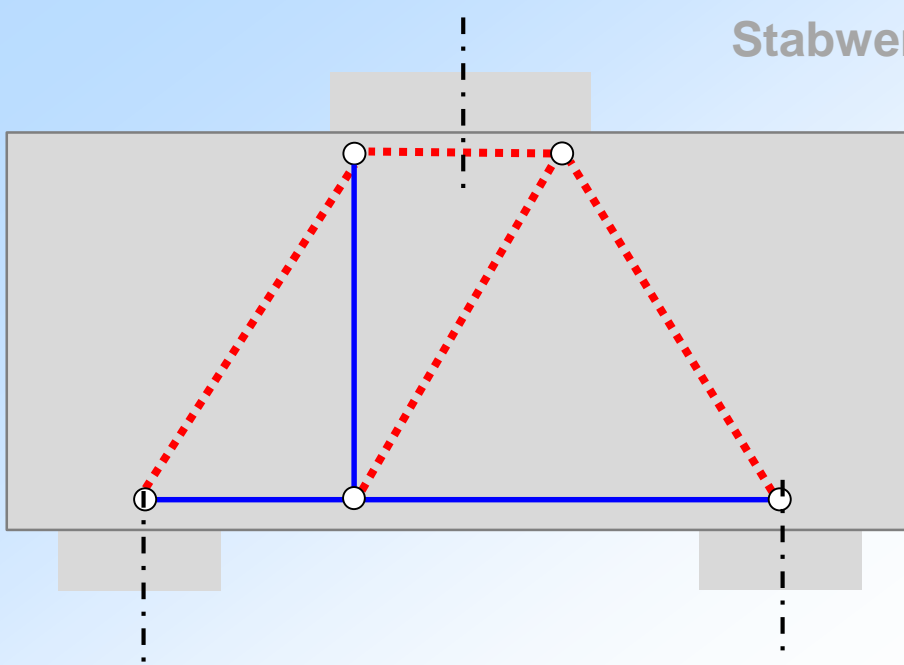


815

18



# Stabwerkmodelle



# Stabwerkmodelle

Die Dehnungen in den Druckstäben sind

Bewertung der Stabwerke mit Hilfe der Formänderungsarbeit: vernachlässigbar gering

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon \cdot N \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \sum \varepsilon_i \cdot F_i \cdot l_i = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{yd} \cdot \sum F_i \cdot l_i \sim \sum F_i \cdot l_i$$

System 1

$$W_i =$$

System 2

$$W_i = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{yd} \cdot \left[ 602 \cdot 75 + 305 \cdot \frac{35}{h} \cdot 35 + 258 \cdot (52 - h) + \left( 602 - 305 \cdot \frac{35}{h} \right) \cdot \frac{52}{36,6} \cdot h \right]$$

$$h = 52 \text{ cm} \approx 81600 \quad \longrightarrow \hat{=} \text{System 1}$$

$$25,4 \approx 73300 \quad (\text{Min})$$

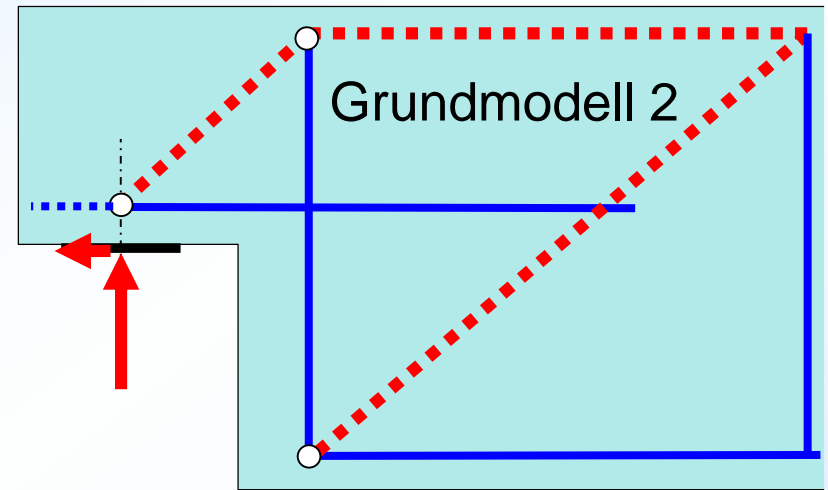
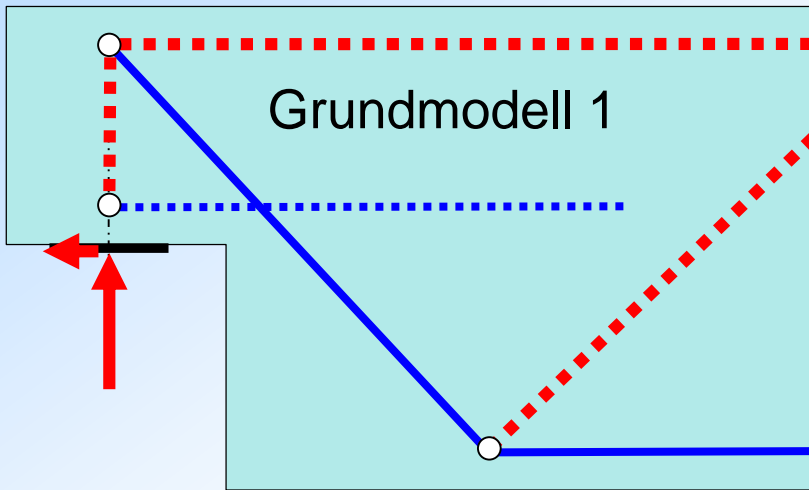
$$17,7 \approx 75100 \quad \longrightarrow \hat{=} \text{System 3}$$

System 4:

$$W_i = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{yd} \cdot \left[ \right]$$

$$\left] \approx \frac{\varepsilon_{yd}}{2} \cdot 92400$$

## 3 Ausgeklinkte Auflager



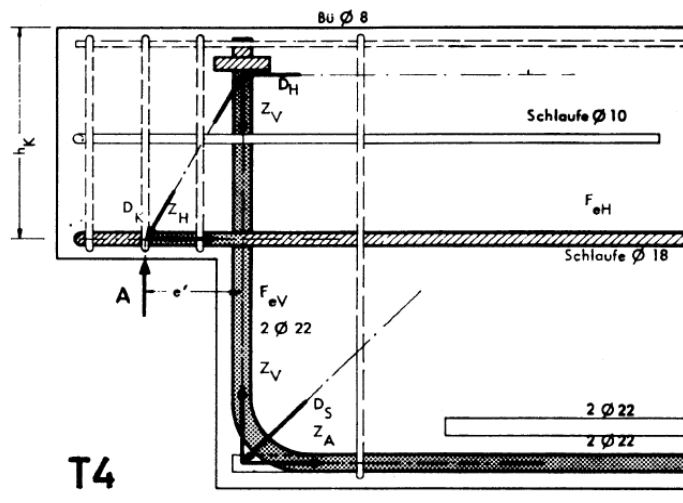
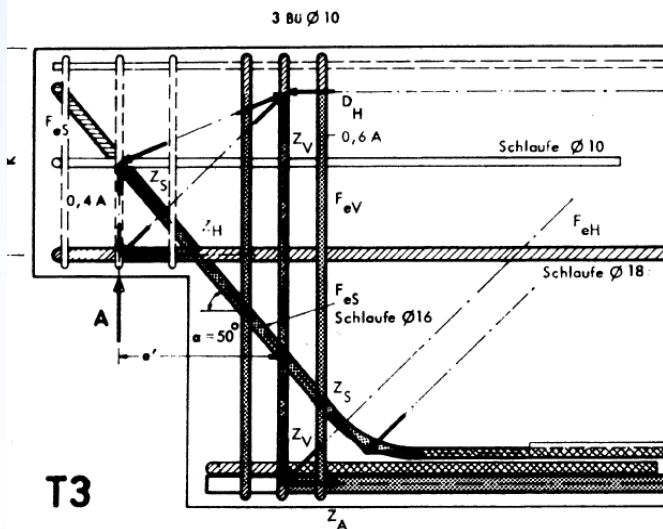
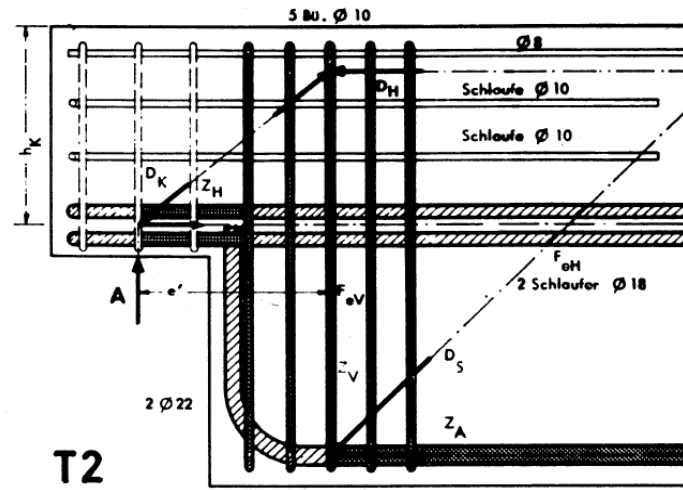
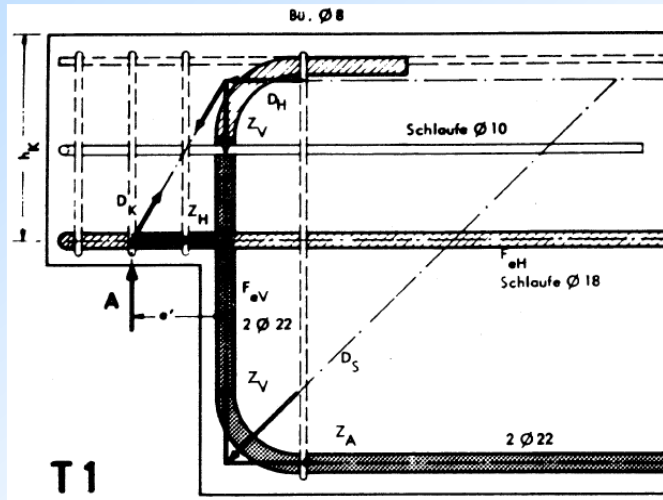
- aufgebogene Feldbewehrung ungeeignet für Verankerung über Verbund
- große Rissbreite bei dicken Stäben
- + günstiger unterer Umlenkknoten

- große Rissbreite in einspringender Ecke
- kurze Verankerung der großen Kraft in Konsolbew. am Auflagerknoten
- stark druckbeanspruchter oberer Knoten
- ungünstiger unterer Umlenkknoten
- + einfache Bewehrungsführung

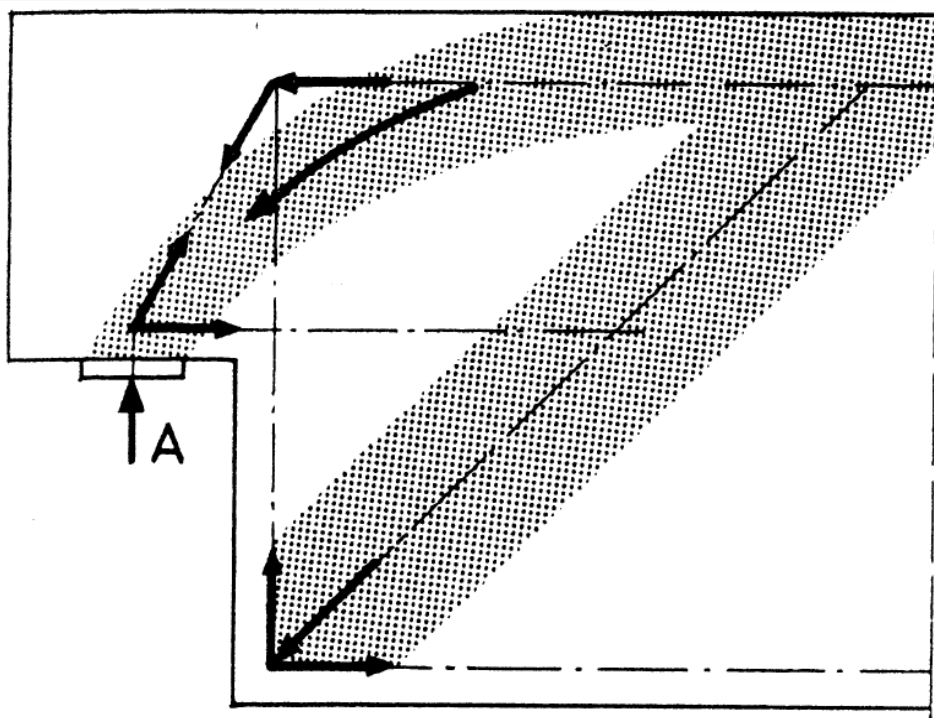
Offene Frage: wo verbleibt die Zugkraft des Konsolbandes im Träger?

Rostasy und Steinle haben Versuche zu abgesetzten Auflagern durchgeführt:

Betonwerk  
Fertigteil-  
technik  
1975



.... und das Tragverhalten mit Stabwerkmodellen beschrieben:



Die gemessenen Kräfte in der vertikalen Aufhängebewehrung waren stets kleiner als die Auflagerkräfte, Rostasy/Steinle erklären dies mit einer zusätzlichen direkten Abstützung der Druckstrebe.

Die Verallgemeinerung, dass die Vertikalkraft stets kleiner als die Auflagerkraft ist, scheint aufgrund der wenigen Versuche (6) unzulässig, zumal alle Träger nur eine sehr kurze Nase hatten, wodurch der direkte Lastabtrag begünstigt wird.

Unbefriedigend: die Verankerungskräfte aus dem Konsolband werden nicht verfolgt.

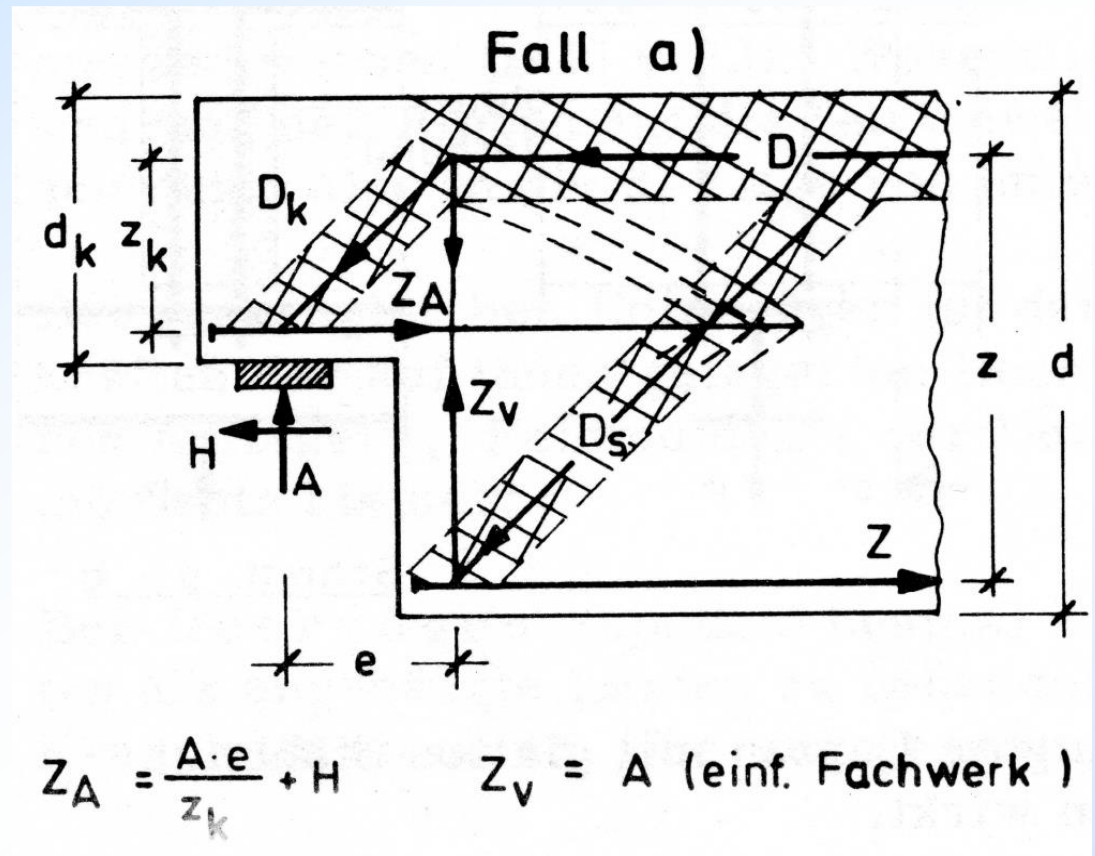
BFT 1975



Aufbauend auf den Stuttgarter Versuchen von Rostasy und Steinle formulieren Leonhardt und Mönning 1977 in der 3. Auflage der „Vorlesung über Massivbau“, Dritter Teil:

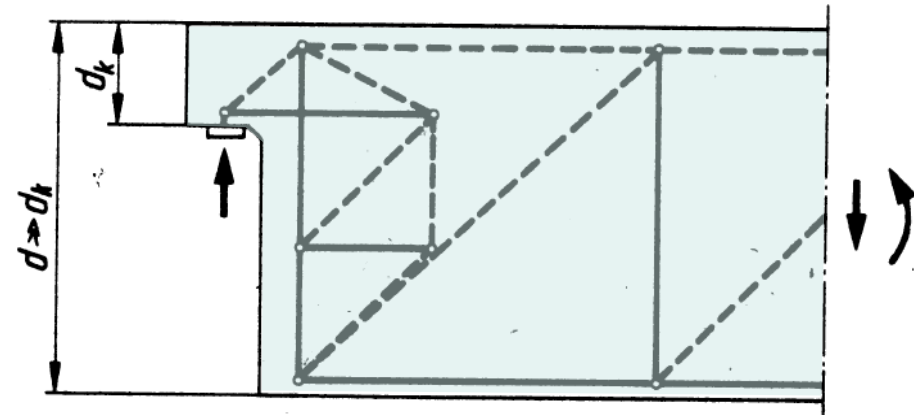
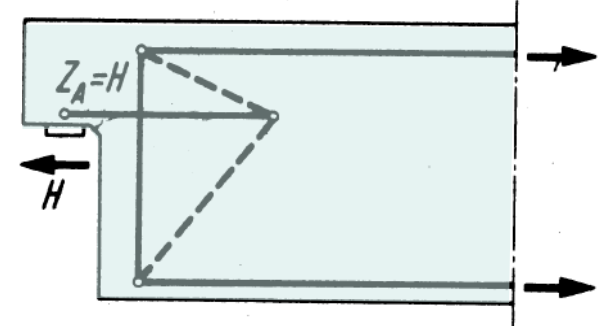
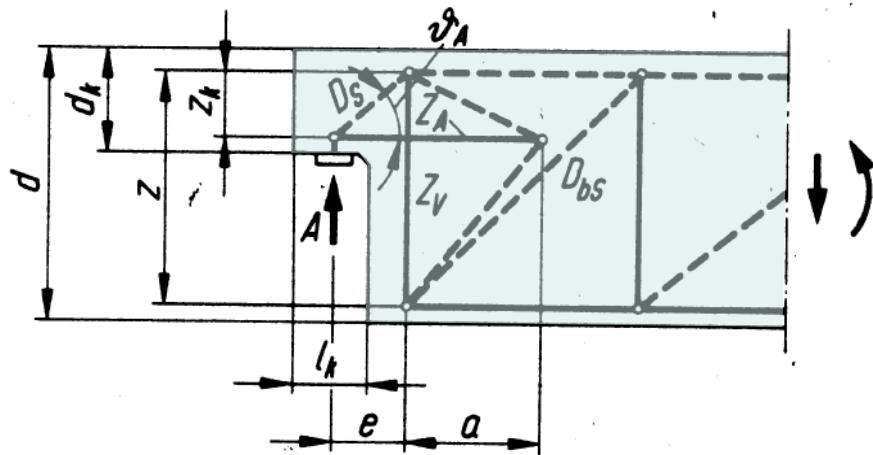
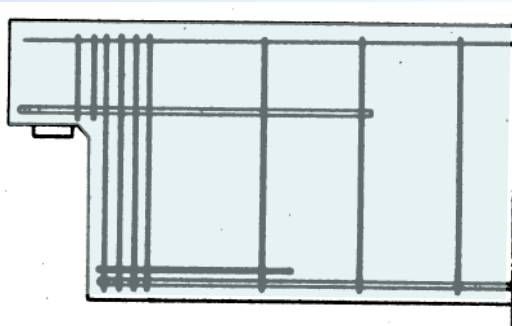
Unbefriedigend:  
Die vertikale Kraft  $Z_v$  braucht allerdings nicht größer als die Auflagerkraft angesetzt werden.

(Hier findet sich ein grafischer Hinweis zur rechten Verankerung der Konsolbew., allerdings ist der Kraftfluss nicht zu Ende gedacht)

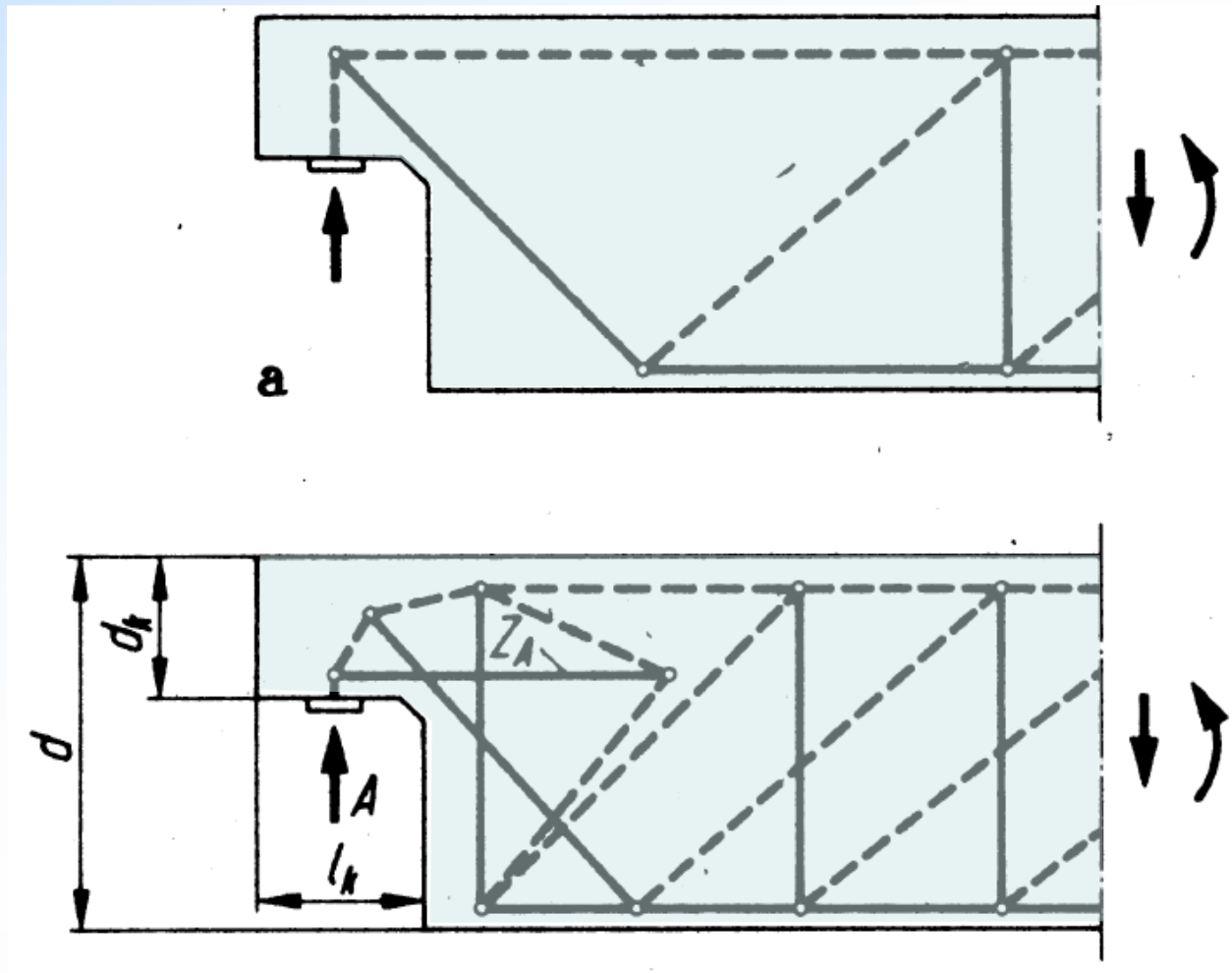


$$Z_v = A \cdot 0,35 \cdot \frac{d}{d_k} \leq A$$

Schlaich verwendet in seinem ersten Betonkalender-Aufsatz „Konstruieren im Stahlbetonbau“ von 1984 zur Bemessung mit Stabwerkmodellen folgendes Modell bei ausschließlich vertikaler Bewehrung:

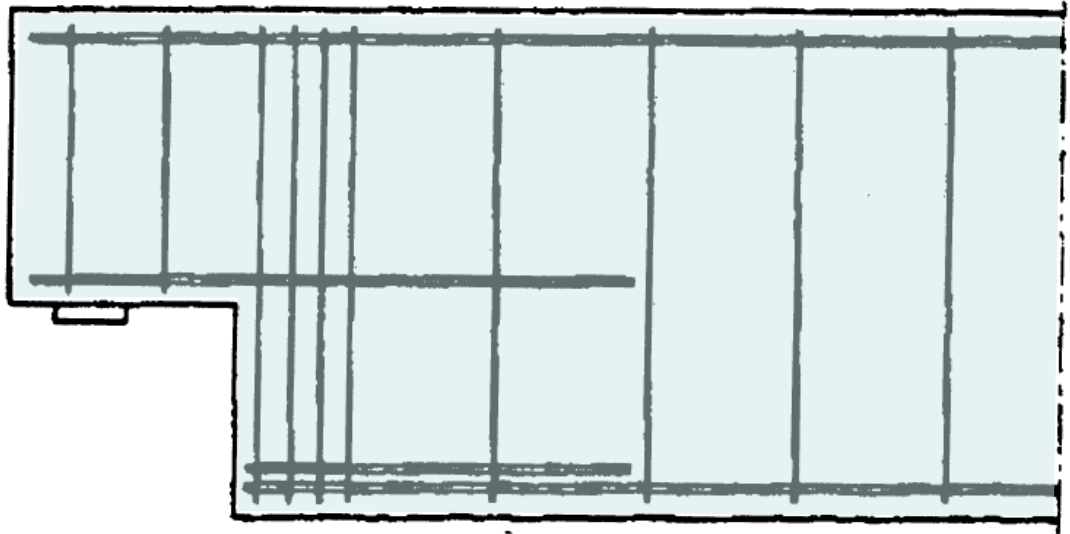
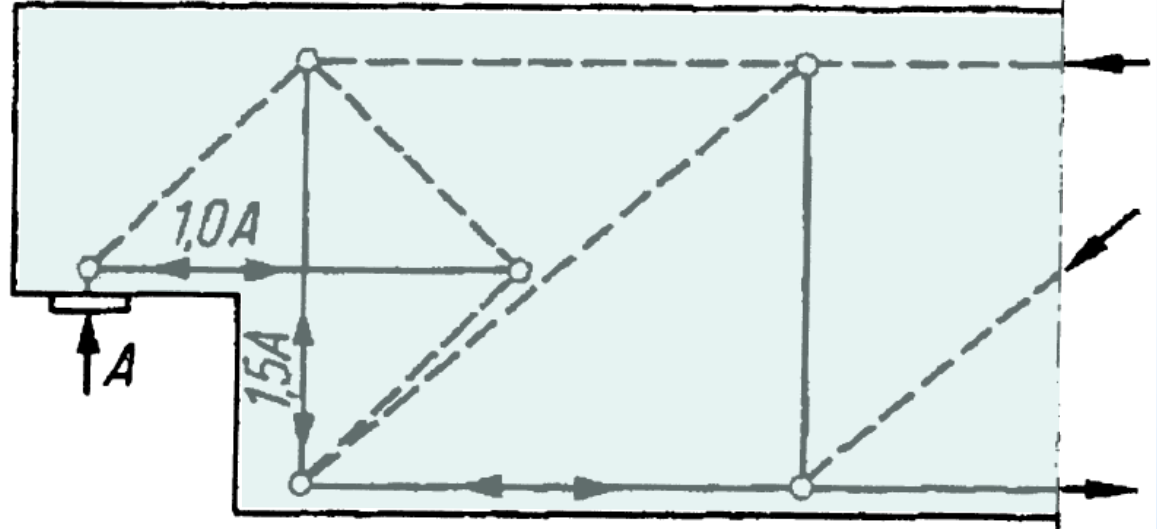


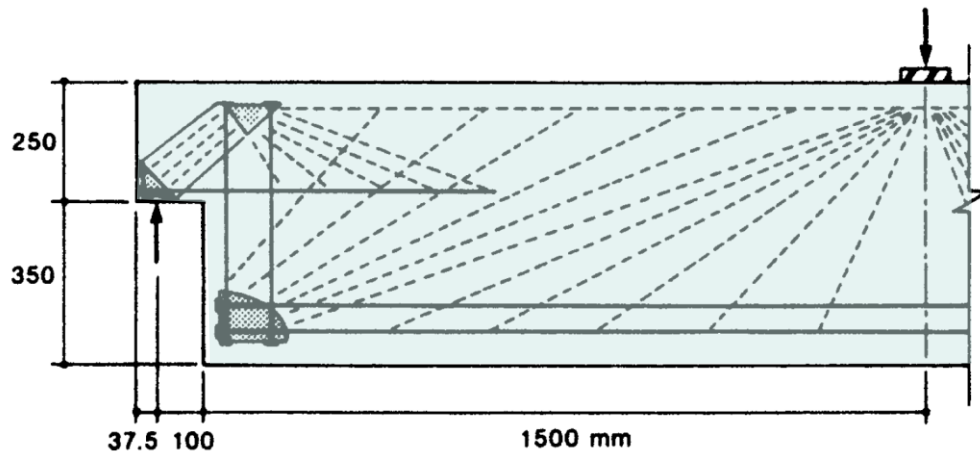
... und für ausschließlich schräge Bewehrung sowie für gemischte Bewehrung:



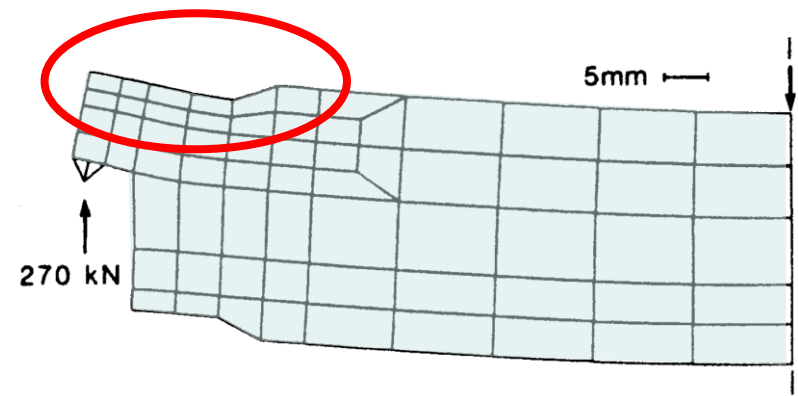
Aufsatz Schlaich:  
„Zum einheitlichen  
Bemessen von  
Stahlbetontragwerken“,  
Beton und  
Stahlbetonbau, 4/1984

vgl. auch Schlaich:  
„Konstruieren im  
Stahlbetonbau“  
Betonkalender-Aufsatz  
von 1984

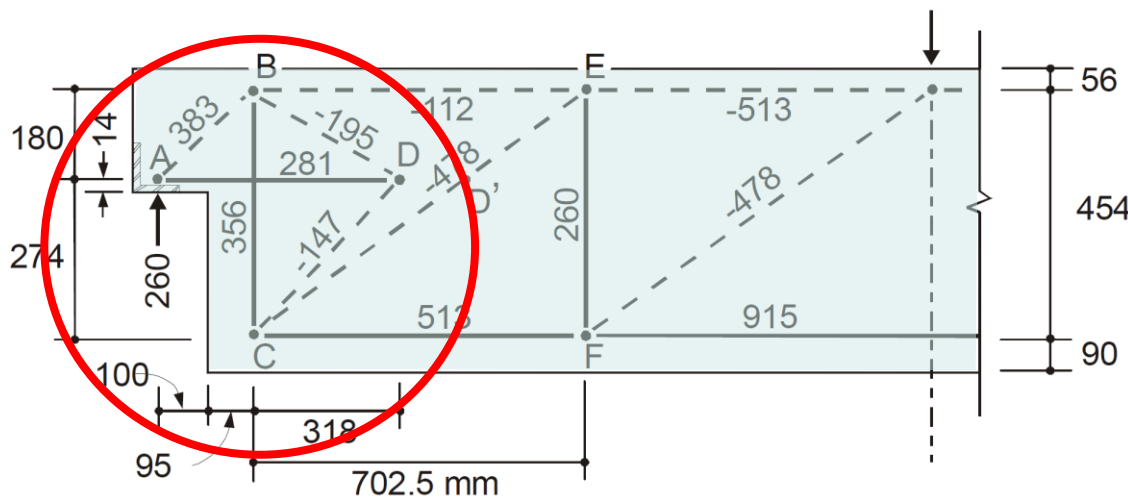




Strut and tie model



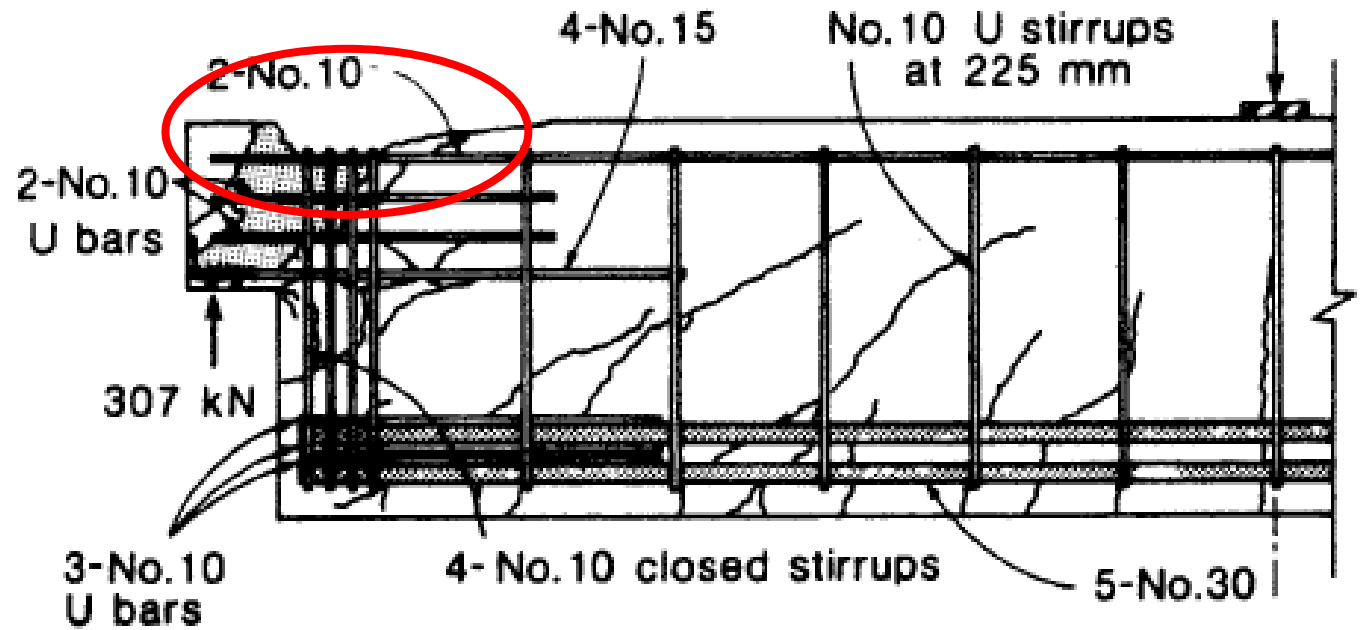
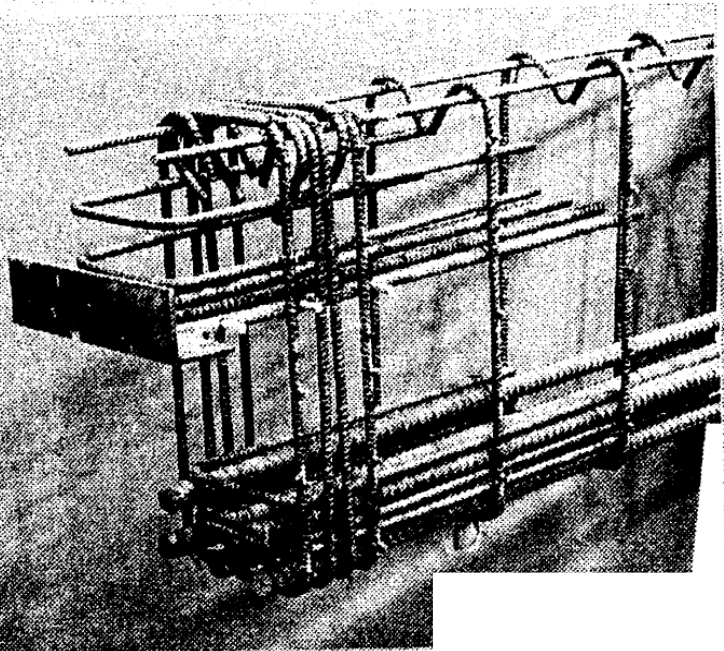
Finite element mesh and deflected shape at failure



Truss idealization and member forces in kN

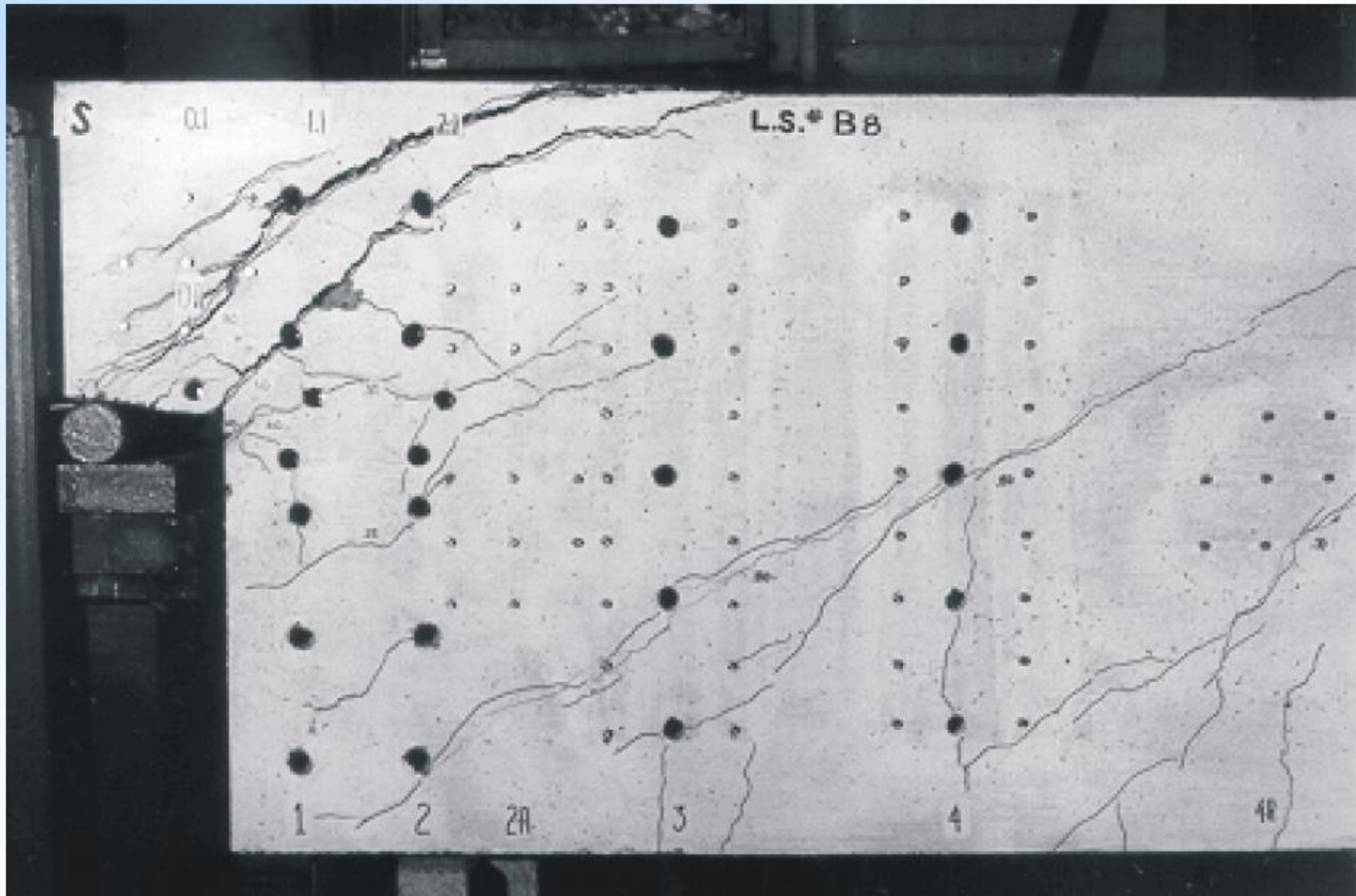
W. Cook und D. Mitchell (ACI Structural Journal, 1988, pp. 206-216) verwenden das gleiche Modell und finden gute Übereinstimmung mit den von ihnen durchgeführten Versuchen.





(c) Reinforcement details and failure conditions

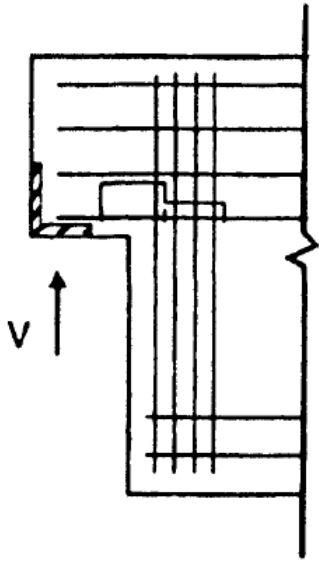




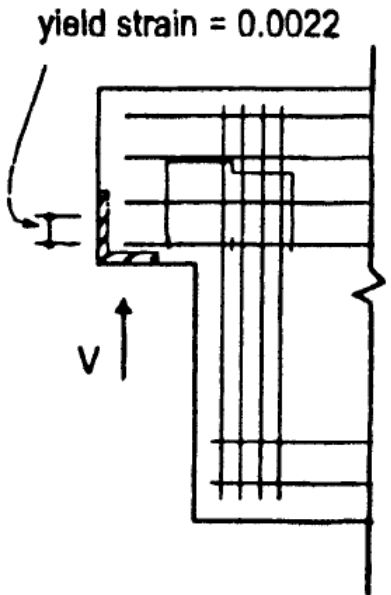
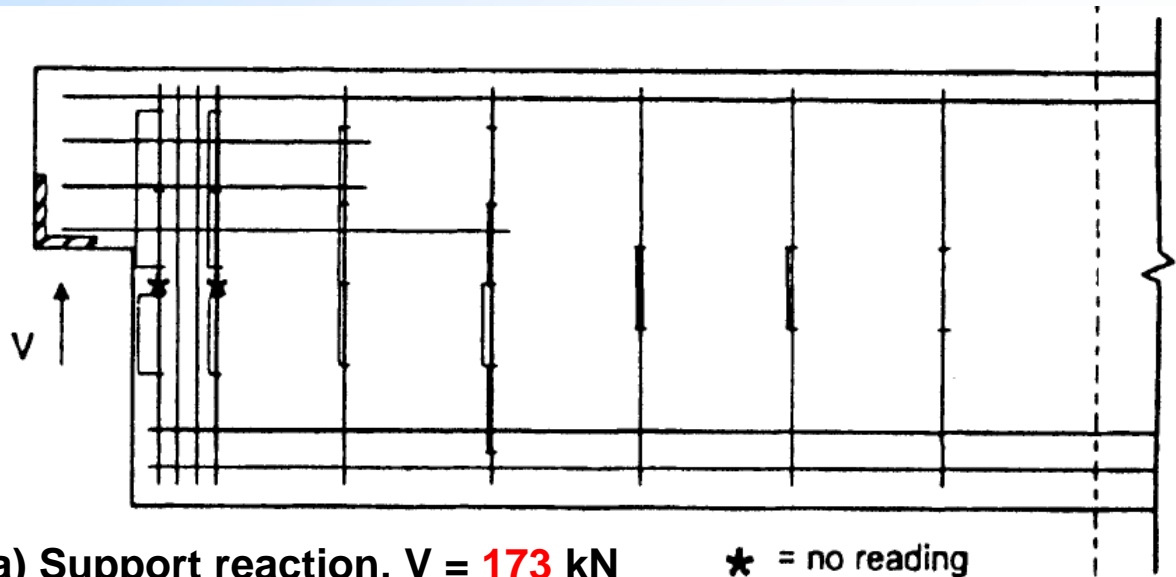
[http://onlinepubs.trb.org/onlinepubs/nchrp/docs/NCHRP20-07\(306\)\\_FR.pdf](http://onlinepubs.trb.org/onlinepubs/nchrp/docs/NCHRP20-07(306)_FR.pdf)

Mitchell, D.; Cook, W.D.; Uribe, C.M.; Alcocer, S.: Experimental verification of strut-and-tie-models In: Reineck, K.-H. (Ed.): Examples for the Design of Structural Concrete with Strut-and-Tie- Models, ACI Special Publication-208 (2002), pp. 41-62

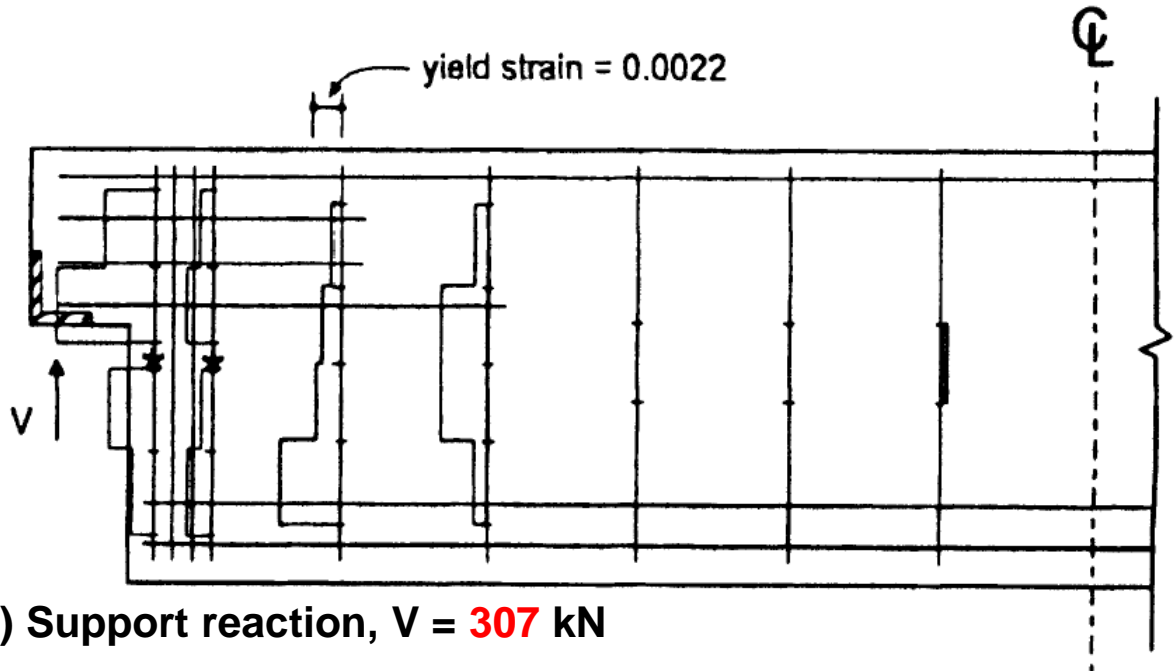
# Stabwerkmodelle



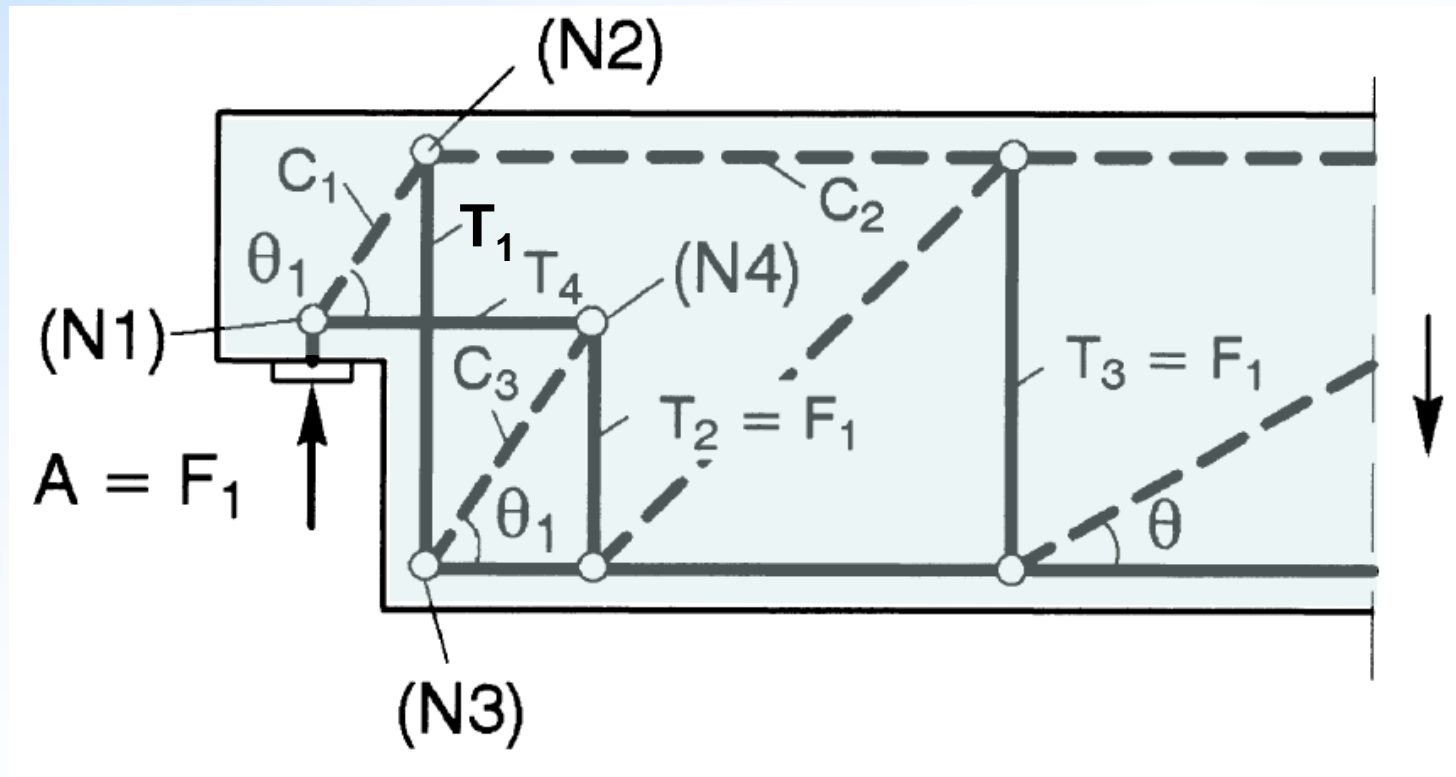
(a) Support reaction,  $V = 173$  kN      \* = no reading



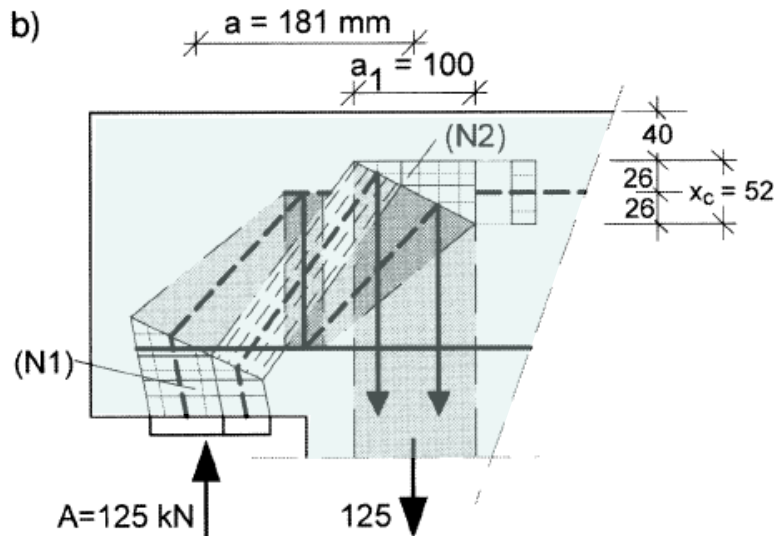
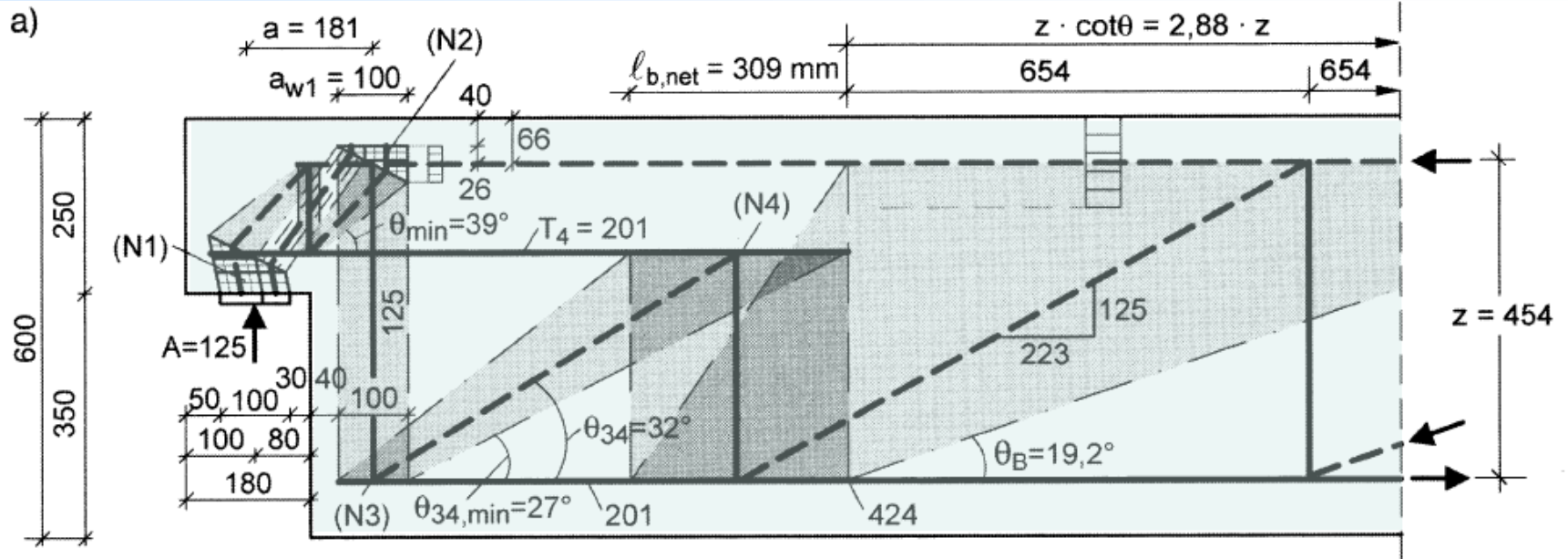
(b) Support reaction,  $V = 307$  kN



Schlaich schlägt seit der Neuauflage seines Betonkalender-Aufsatzes „Konstruieren im Stahlbetonbau“ von 1989, letztmalig erschienen 2001 ein geändertes Modell vor:



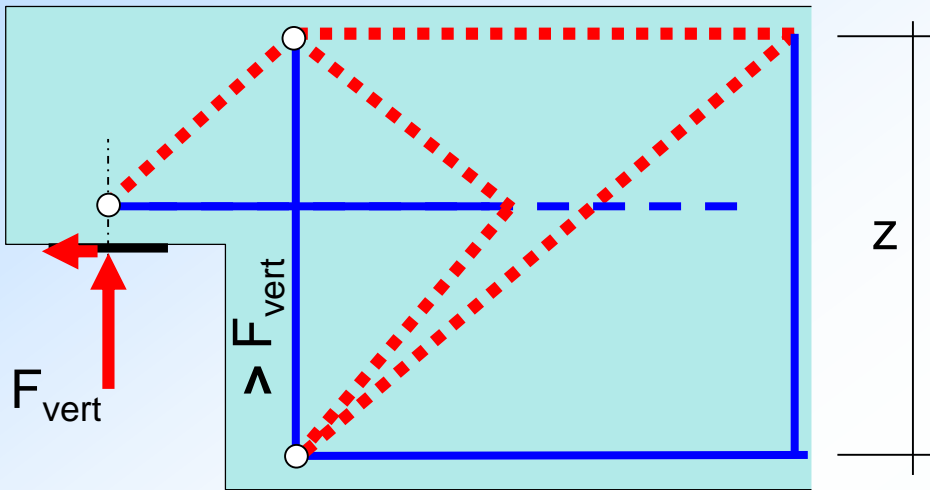
Bei diesem Modell ist die Kraft  $T_1$  identisch mit der Auflagerkraft  $A$



Im Betonkalender 2005 befasst sich Reineck recht ausführlich mit der „Modellierung der D-Bereiche von Fertigteilen“. Das Stuttgarter Modell von Schlaich erfährt hier eine strengere Behandlung.

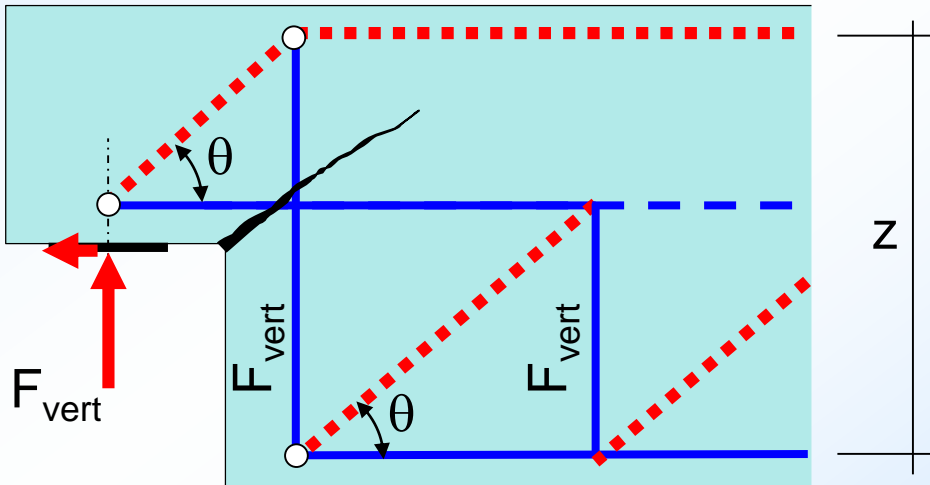
Der Beton oberhalb der „Aufhängebügel“ bleibt konsequenterweise unberücksichtigt!

# Überlegungen zur Verankerung der Horizontalbewehrung



Modell  
Mitchell / Cook

Im Gebrauchszustand sind kleinere Verformungen und Rissbreiten zu erwarten

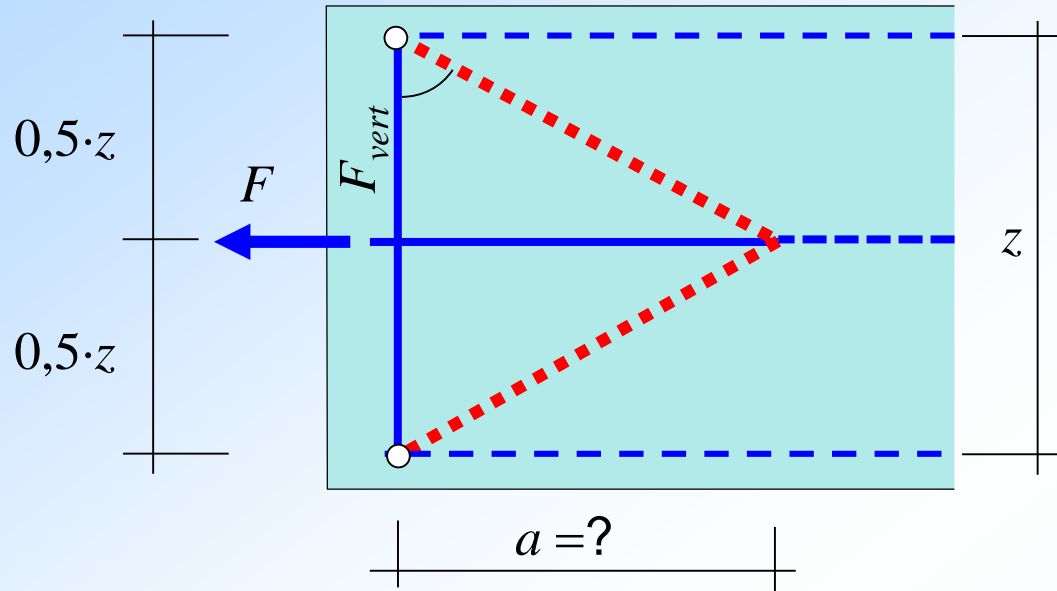


Modell  
Schlaich / Schäfer / Reineck

Größere Risstiefe möglich, dadurch auch größere Rissbreite und Rotation im oberen Knoten.



## Minimum der Formänderungsarbeit?



Annahmen:

Formänderungsarbeit in den Druckstäben zunächst vernachlässigt.

Die Zugstäbe erreichen die Fließdehnung gleichzeitig

Stabkräfte sind konstant über die Stablänge

Formänderungsarbeit:

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon \cdot N \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{Fl} \cdot F \cdot \left( 0,5 \cdot z \cdot \tan \alpha \right) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{Fl} \cdot \left( \frac{0,5 \cdot F}{\tan \alpha} \right) \cdot z$$

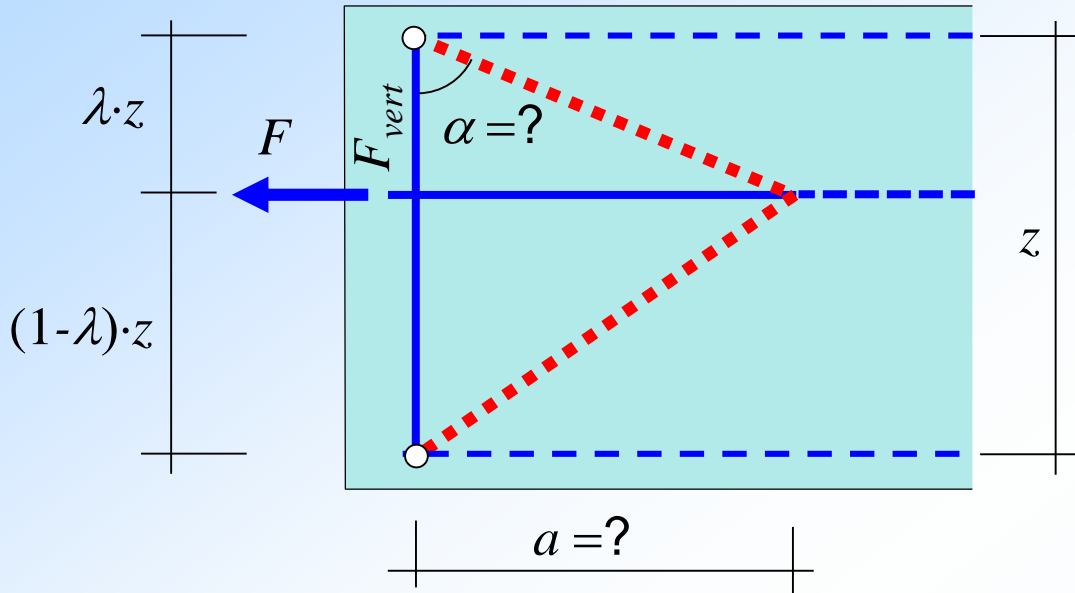
$$= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{Fl} \cdot F \cdot z \cdot \left( 0,5 \cdot \tan \alpha + \frac{0,5}{\tan \alpha} \right)$$

z. B. durch Probieren ergibt sich für den Klammerausdruck ein Minimum bei  $\alpha = 45^\circ$   $\Rightarrow a = 0,5 \cdot z$  und  $F_{vert} = 0,5 \cdot F$

Hinweis: auch für die Druckstäbe ergibt sich bei  $\alpha = 45^\circ$  ein Min. der Form.änd.arb.!



# Minimum der Formänderungsarbeit?



Annahmen:

Formänderungsarbeit in den Druckstäben zunächst vernachlässigt.

Die Zugstäbe erreichen die Fließdehnung gleichzeitig

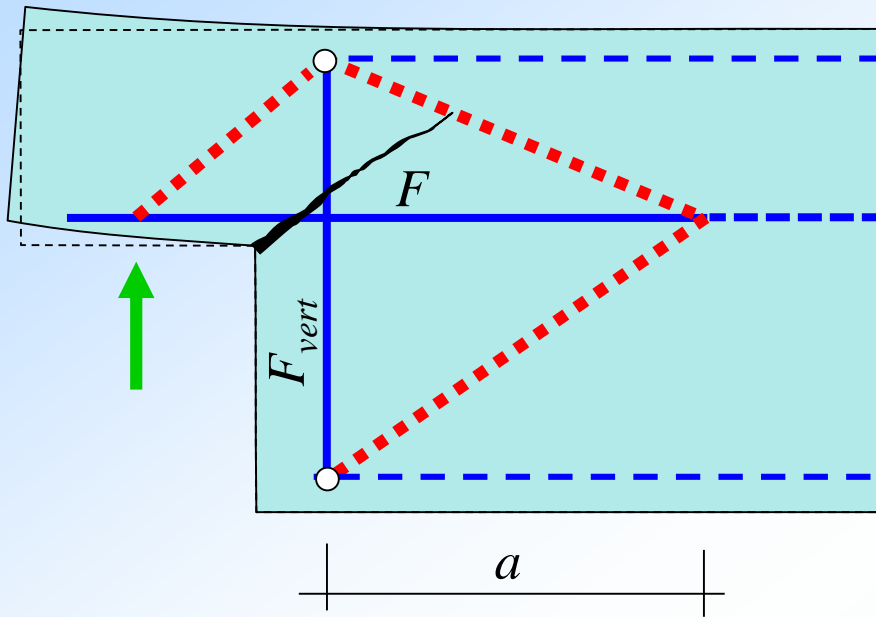
Stabkräfte sind konstant über die Stablänge

Formänderungsarbeit:

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon \cdot N \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{Fl} \cdot F \cdot \lambda \cdot z \cdot \tan \alpha + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{Fl} \cdot \frac{(1-\lambda) \cdot F \cdot F_{vert}}{\tan \alpha} \cdot z$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{Fl} \cdot F \cdot z \cdot \left( \lambda \cdot \tan \alpha + \frac{1-\lambda}{\tan \alpha} \right)$$

z. B. durch Probieren ergibt sich für den Klammerausdruck für  $\lambda = 0,25$  ein Minimum bei  $\alpha = 60^\circ \Rightarrow a = 0,433 \cdot z \approx 0,5 \cdot z$  und  $F_{vert} = 0,433 \cdot F \approx 0,5 \cdot F$

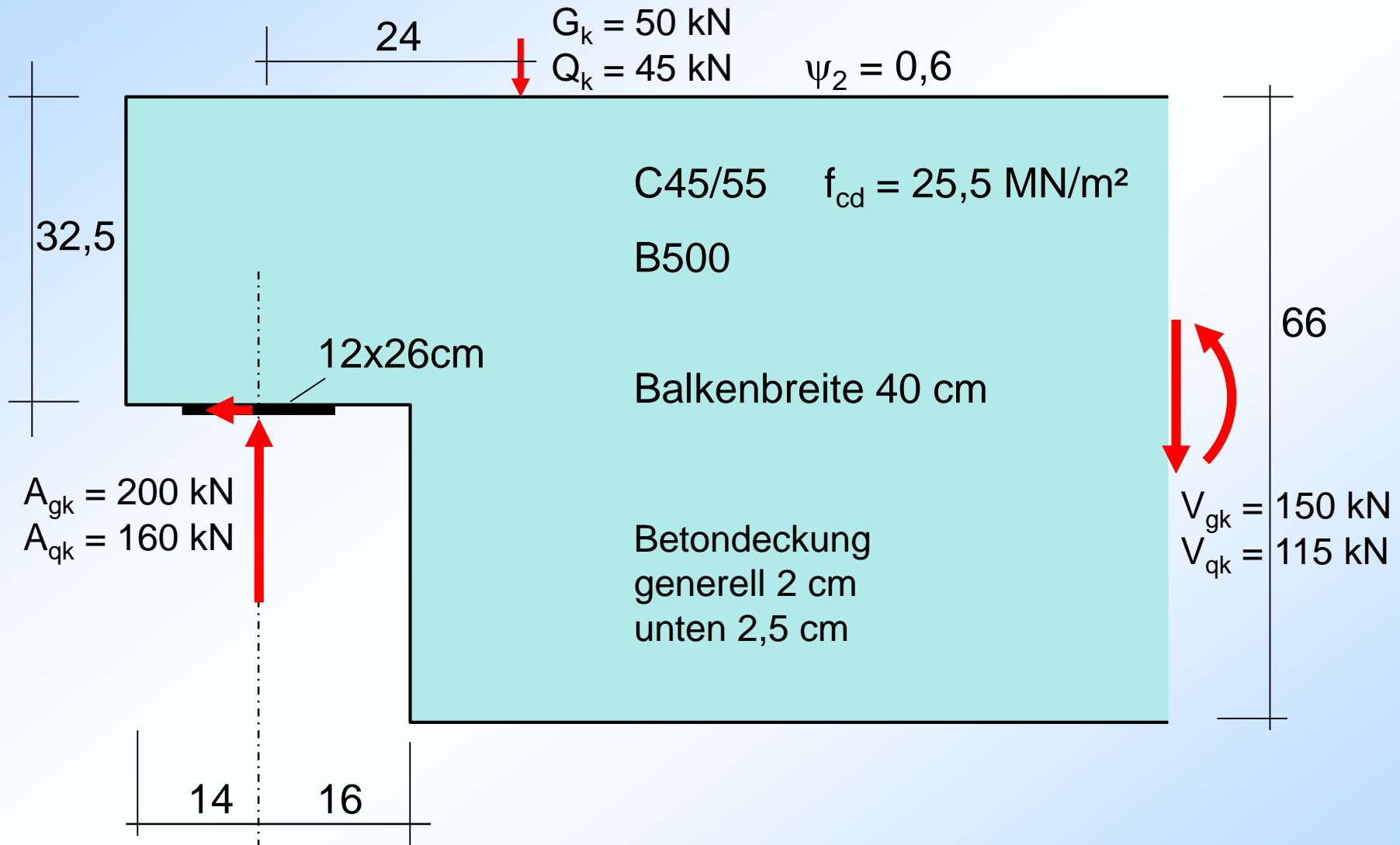


Wenn die vertikale Bewehrung infolge einer zu geringen Dimensionierung frühzeitig fließt, vergrößert sich  $a$  automatisch. Dadurch wird die gedehnte Länge der horizontalen Bewehrung größer und damit auch die Rotation der Trägernase um den oberen Knoten. Letzteres führt dort zu einem früheren Druckversagen.

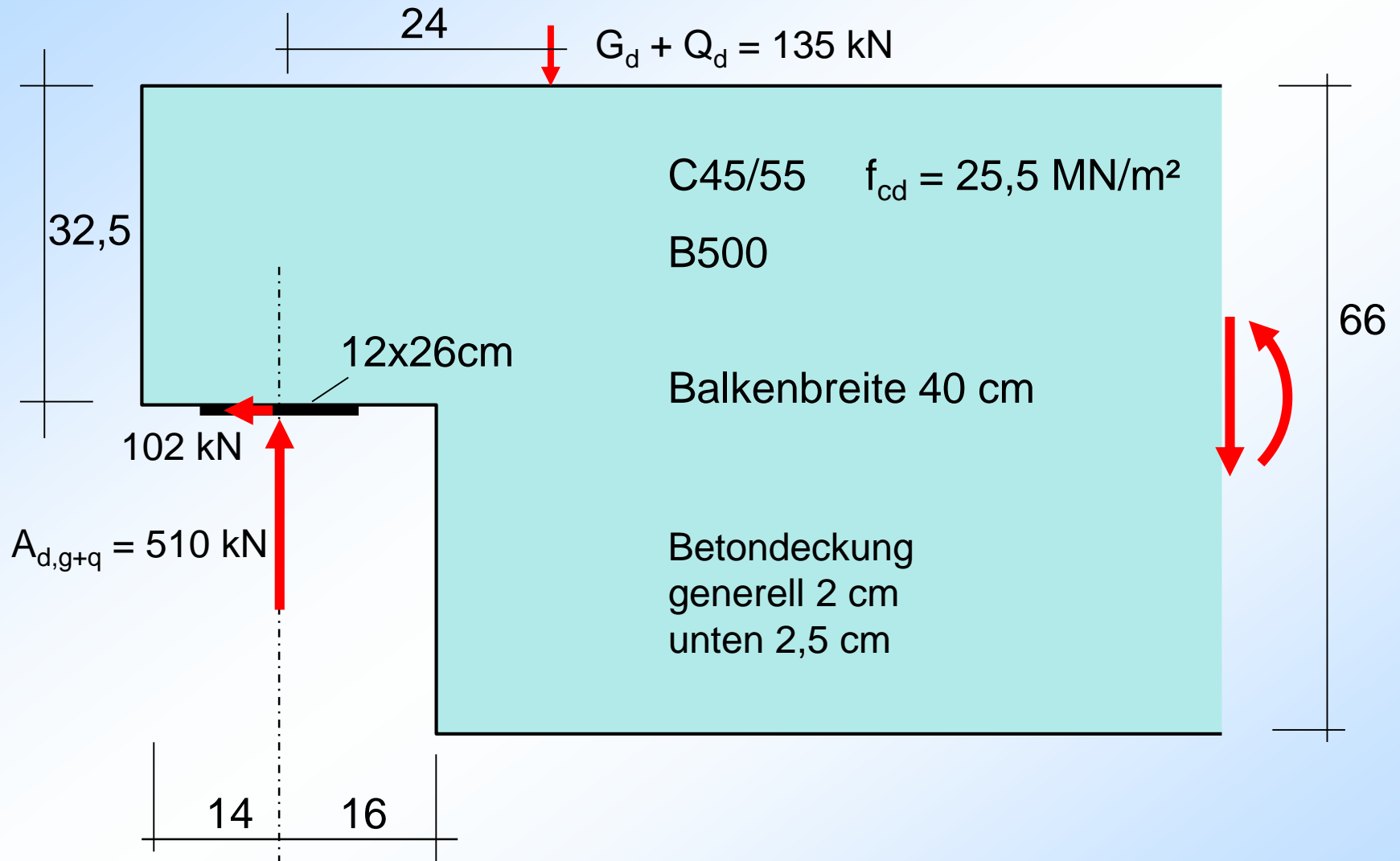
## Zusammenfassung:

- Das Modell mit ausschließlich aufgebogener Bewehrung lässt sich nur mit Ankerplatten realisieren.
- Das Modell mit ausschließlich vertikaler Bewehrung nutzt die Betondruckzone nicht aus und führt zum frühzeitigen Abplatzen der Betondeckung.
- Die Verankerung des Konsolbandes bei dem aktuellen Modell von Schlaich / Schäfer und Reineck führt insbesondere bei längeren Auflagernasen zu erheblichen Verformungen bereits im Gebrauchszustand.
- Die Verankerung des Konsolbandes sollte mit Hilfe des Sprengwerkes, also durch Verstärkung der sog. „Aufhängebewehrung“ realisiert werden.
- Am sinnvollsten ist eine rechnerische Kombination beider Grundmodelle

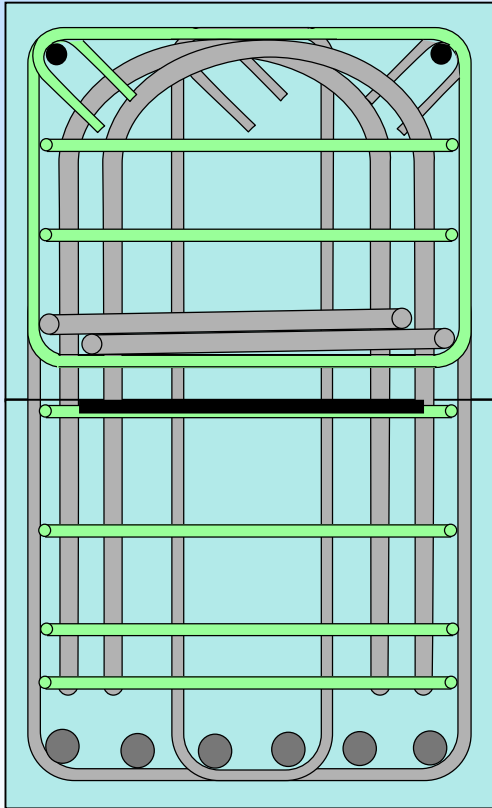
## Beispiel:



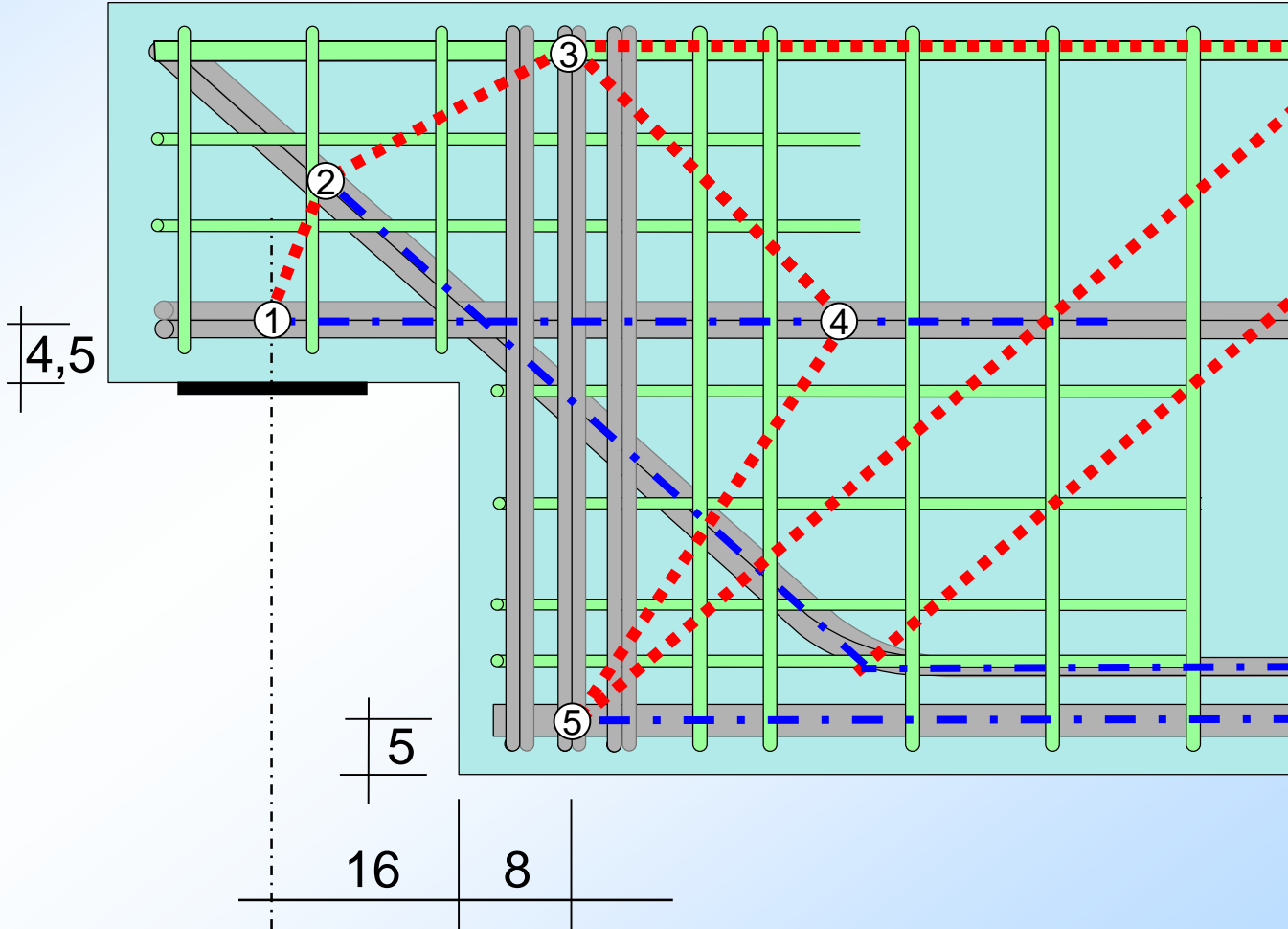
## Beispiel:



Eine Vorbemessung ergab die nachfolgenden Randabstände:

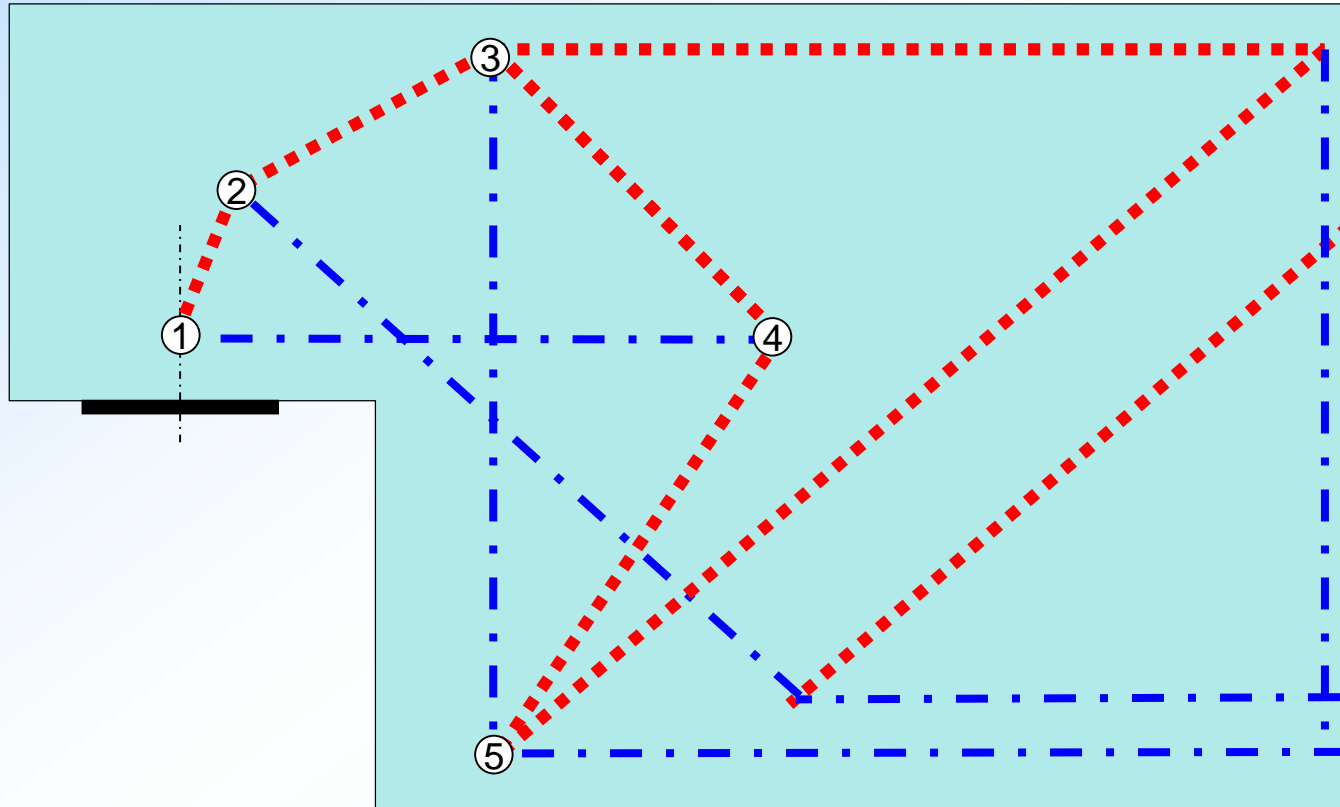


6  $\varnothing$  28  
am Auflager

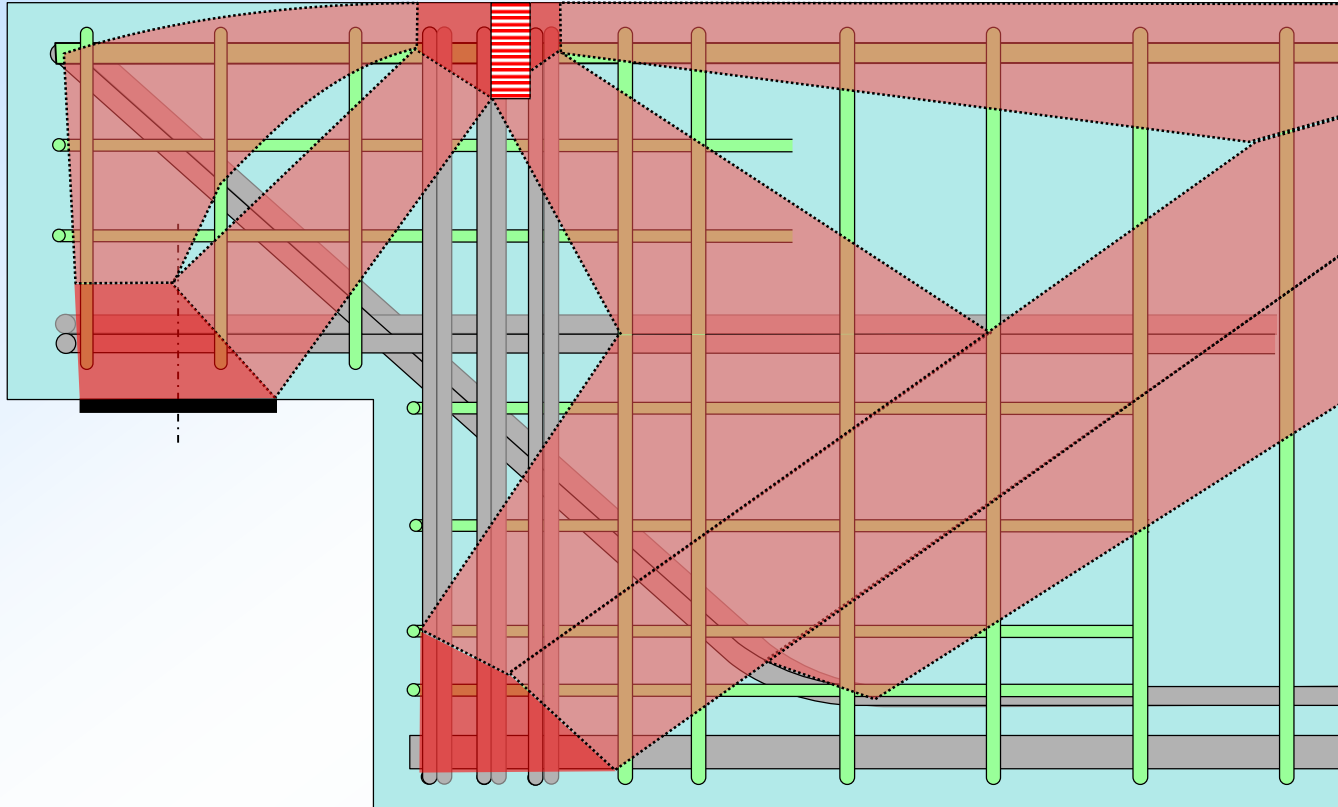




## idealisiertes Stabwerkmodell

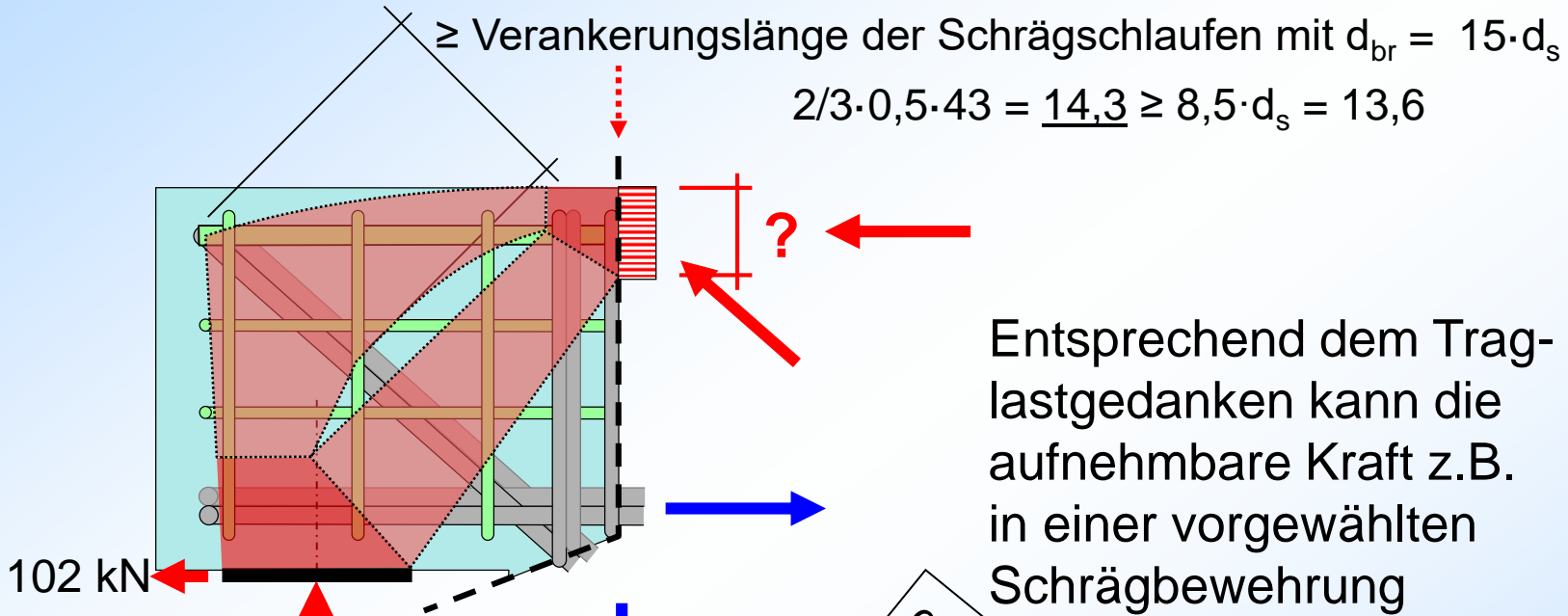


Nur mit einer Schrägbewehrung in der Auflagernase ist es möglich, die Druckzone oberhalb der „Aufhängebügel“ zu aktivieren und ein vorzeitiges Abplatzen der Betondeckung zu verhindern.



Damit kann der innere Hebelarm am Anschnitt der Nase optimal genutzt werden. Mit schlaufenförmiger Bewehrung aus dünneren Stäben muss eine kurze Verankerungslänge sichergestellt werden.

# Stabwerkmodelle



Entsprechend dem Traglastgedanken kann die aufnehmbare Kraft z.B. in einer vorgewählten Schrägbewehrung ermittelt werden.

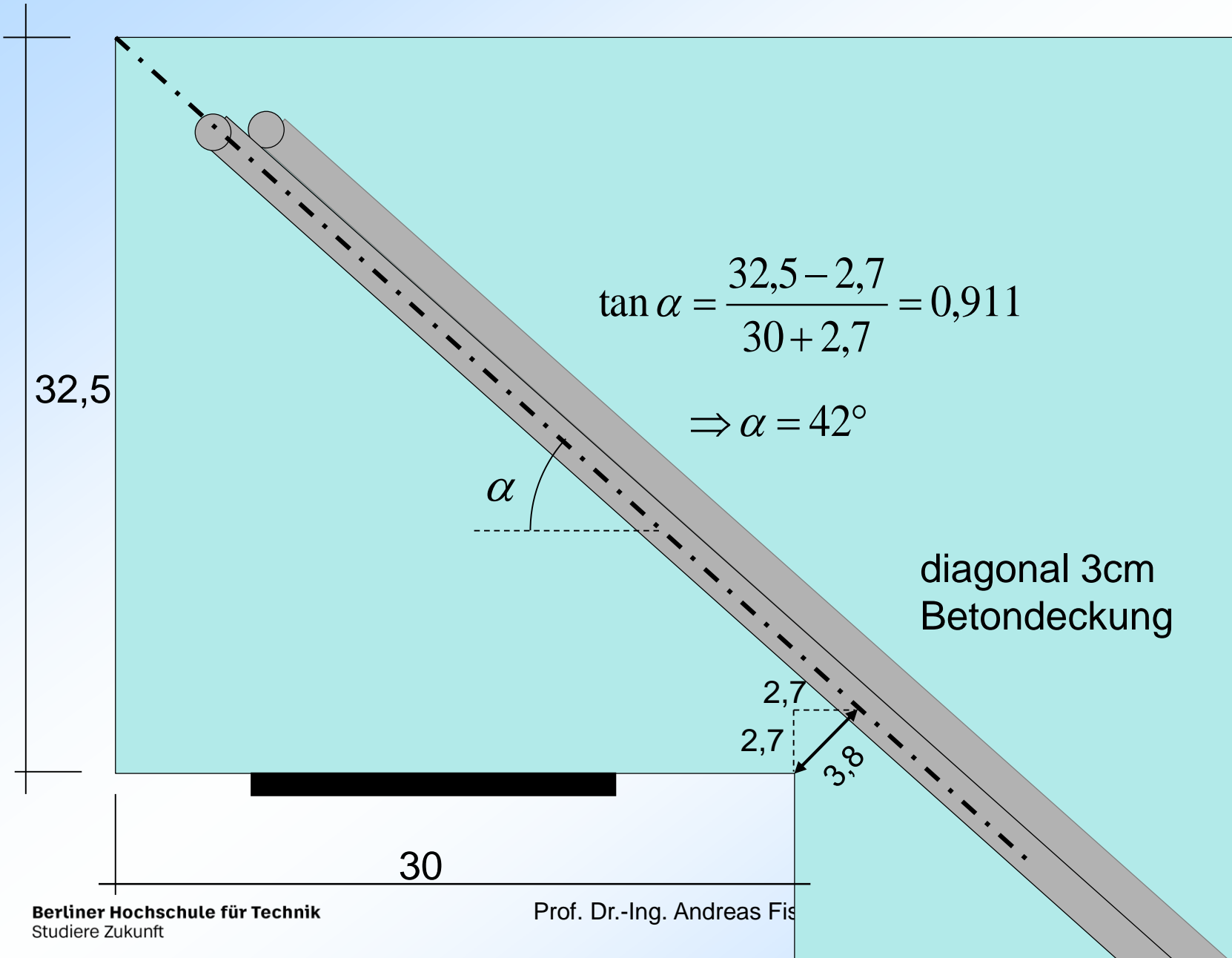
Lagerpressung:

$$\sigma_{cd} = \frac{0,510}{0,12 \cdot 0,26} = 16,3 \text{ MN/m}^2$$

$$\leq 0,75 \cdot 1,0 \cdot 25,5 = 19,1$$

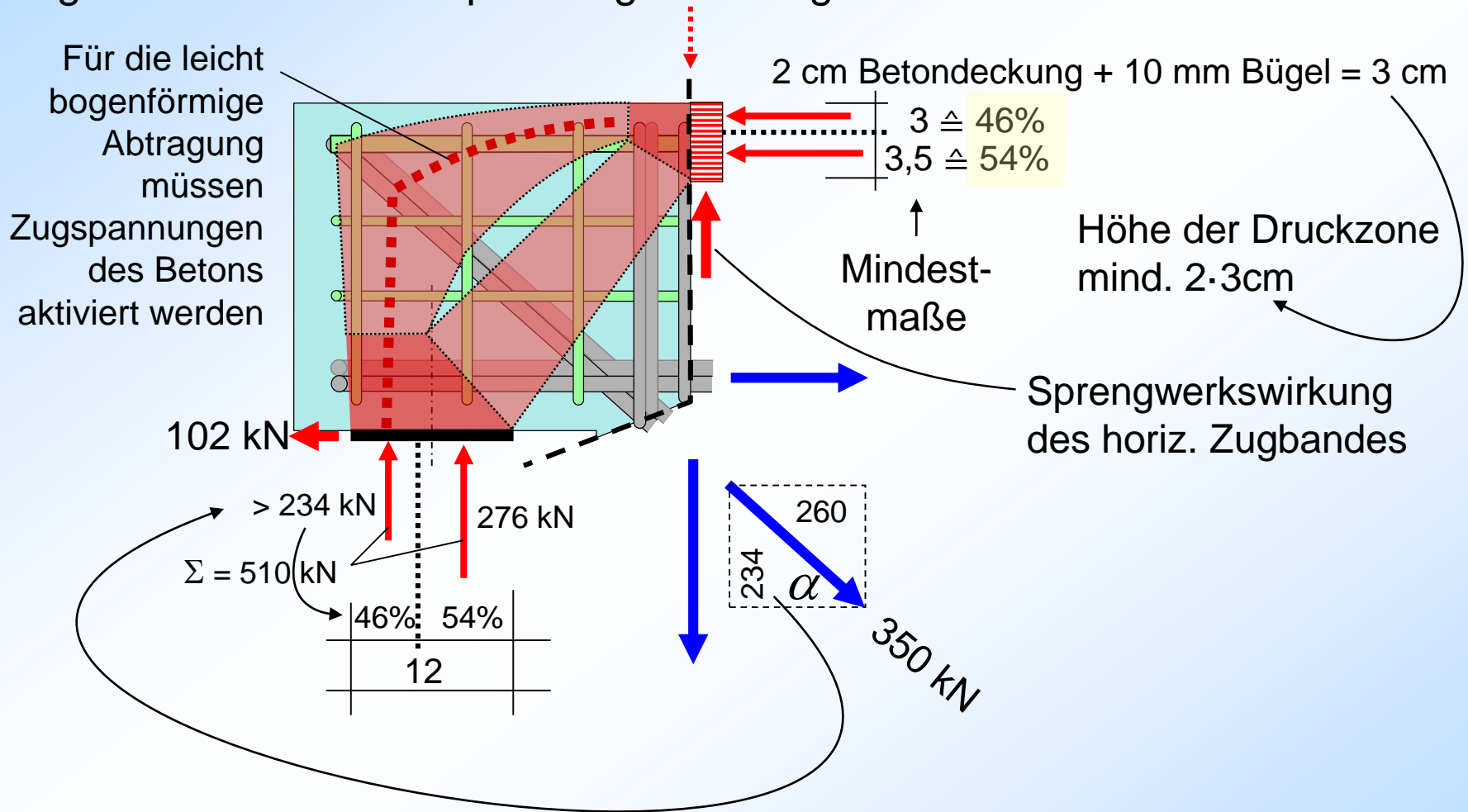
gew.: 2 Schlaufen  $\varnothing 16 \triangleq 8,04 \text{ cm}^2$   
 $F_{sd} = 8,04 \cdot 43,5 = 350 \text{ kN}$

# Stabwerkmodelle



# Stabwerkmodelle

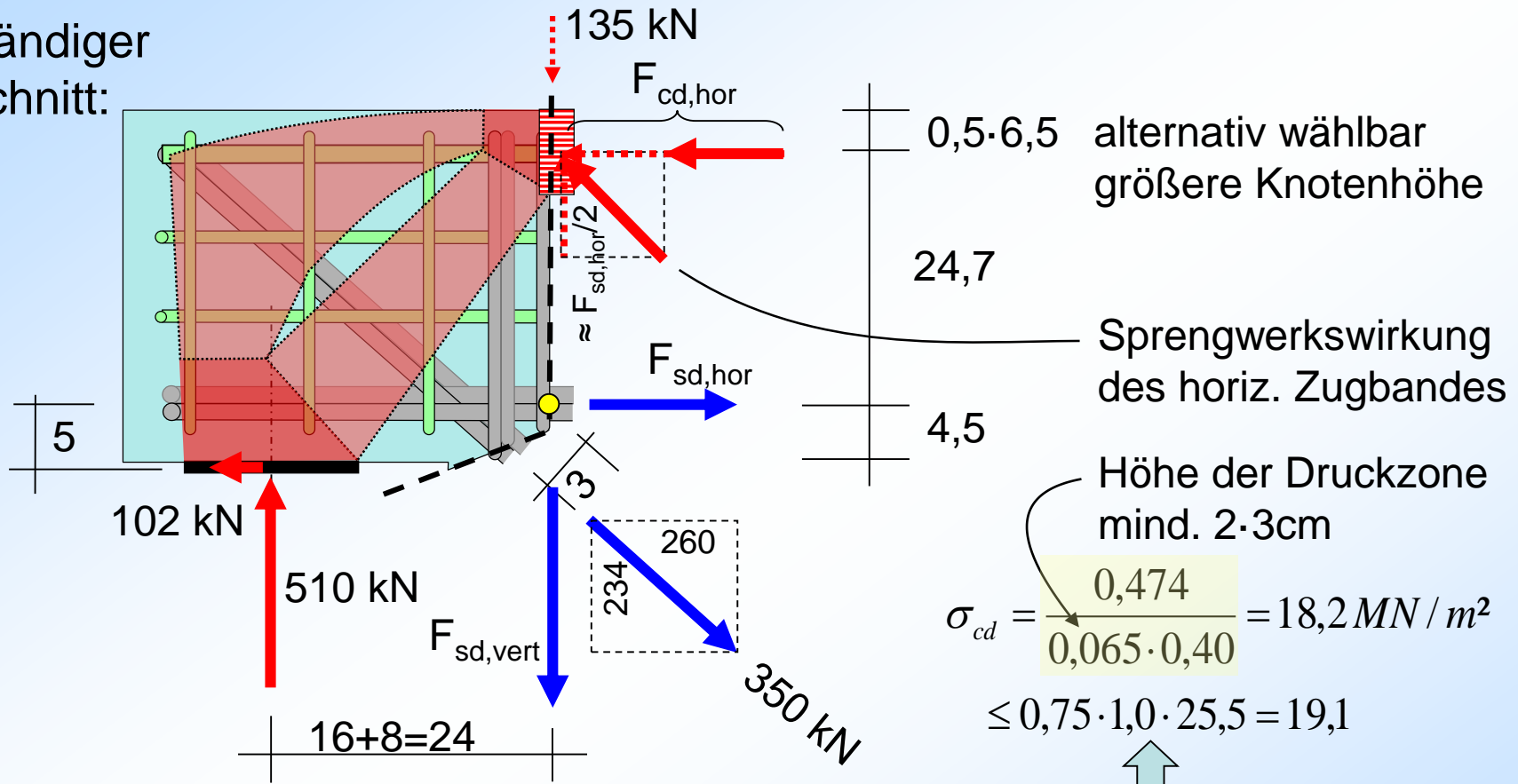
Nur die H-Komponente der Schrägbewehrung kann oberhalb der Bügelinnenseite Druckspannungen erzeugen:





# Stabwerkmodelle

Vollständiger Freischnitt:



$$\Sigma M_o = 0 = 510 \cdot 0,24 + 102 \cdot 0,05 - 350 \cdot 0,03 - F_{cd,hor} \cdot 0,247 \Rightarrow F_{cd,hor} = 474 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow F_{sd,hor} = 474 + 102 - 260 = 316 \text{ kN}$$

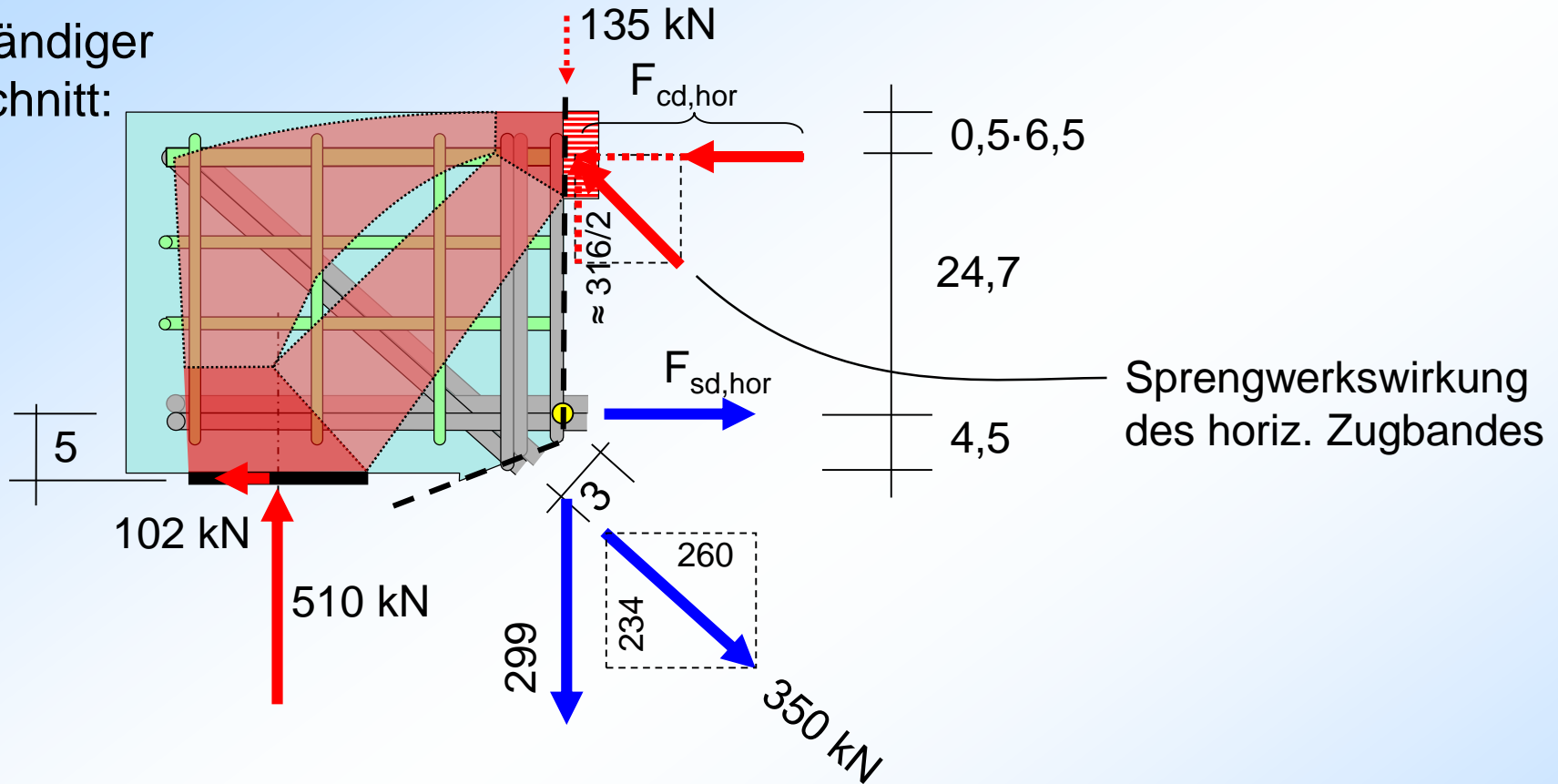
$$\Rightarrow F_{sd,vert} = 510 - 135 - 234 + 316/2 = 299 \text{ kN}$$

gew.: 2 Schlaufen  $\varnothing 16 \hat{=} 8,04 \text{ cm}^2$

gew.: 3 Bügel  $\varnothing 10$  vierschnittig,  
e = 4 cm  $\hat{=} 9,42 \text{ cm}^2$

# Stabwerkmodelle

Vollständiger Freischnitt:



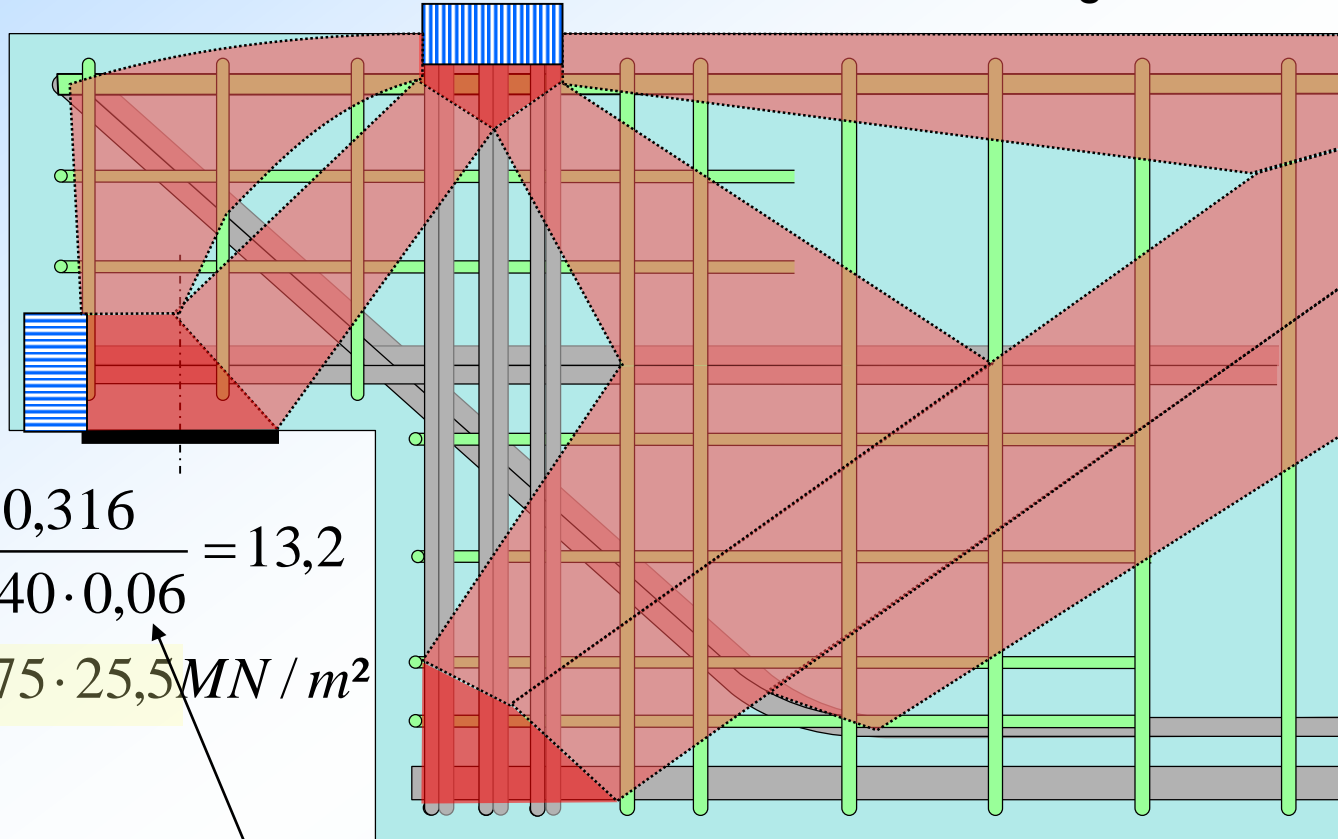
Summe der Vertikalkraftanteile in der „Aufhängebewehrung“:

$$299 + 234 = 533 \text{ kN} > 510 - 135 = 375 \text{ kN}$$

Nachweise an den fiktiven Lastplatten:

$$\sigma_{cd} = \frac{0,299}{0,40 \cdot 0,10} = 7,5 \leq 0,75 \cdot 25,5 \text{ MN} / \text{m}^2$$

unbedingt mehrschnittige Bügel!



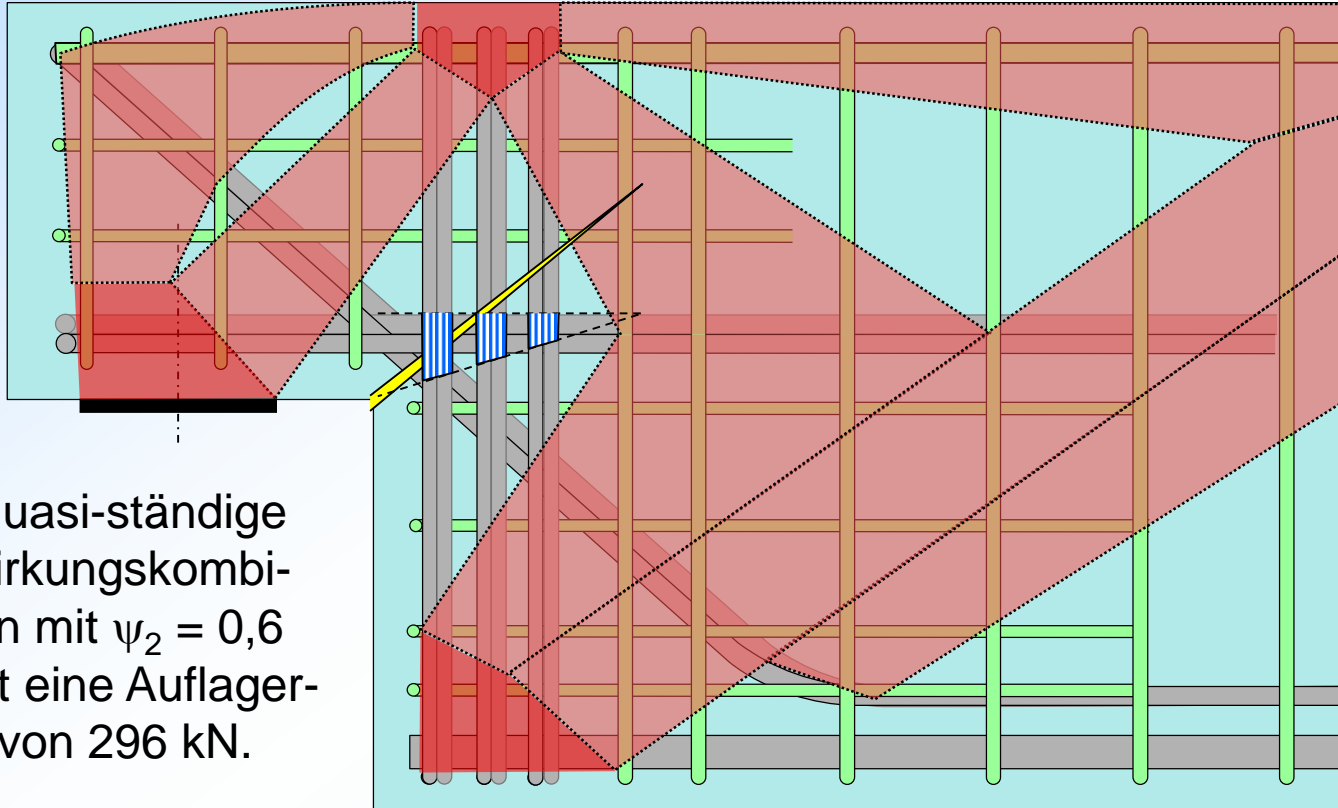
$$\sigma_{cd} = \frac{0,316}{0,40 \cdot 0,06} = 13,2$$

$$\leq 0,75 \cdot 25,5 \text{ MN} / \text{m}^2$$

Längsüberstand der Bewehrung über die Lagerkante =  $8 - 2 = 6 \text{ cm}$

→ red u =  $2 \cdot 6 / 2 = 6 \text{ cm}$

Entsprechend der Rissgeometrie erhält der äußere Bügel hier eine um etwa 30% vergrößerte Stahlspannung gegenüber dem Mittelwert



Die quasi-ständige Einwirkungskombination mit  $\psi_2 = 0,6$  ergibt eine Auflagerkraft von 296 kN.

Bei etwa gleichen Hebelarmen im GZG erhält man für den äußeren Bügel als Stahlspannung:

$$\sigma_{s,Bü} = 1,3 \cdot \frac{296}{510} \cdot \frac{299kN}{9,42cm^2} \cdot [10] = 239MN / m^2$$

Als maximalen Rissabstand erhält man:

$$F_{s,cr} = 0,076 \text{ MN}$$

$$s_{r,max} = \frac{F_{s,cr} \cdot d_s}{3,6 \cdot f_{cteff} \cdot A_s} = \frac{0,05 \text{ m} \cdot 0,40 \text{ m} \cdot 3,8 \text{ MN} / \text{m}^2 \cdot 10 \text{ mm}}{3,6 \cdot 3,8 \text{ MN} / \text{m}^2 \cdot 4 \cdot 0,0000785 \text{ m}^2} = 177 \text{ mm}$$

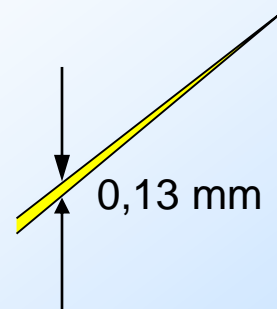
Stahlkraft im Riss:

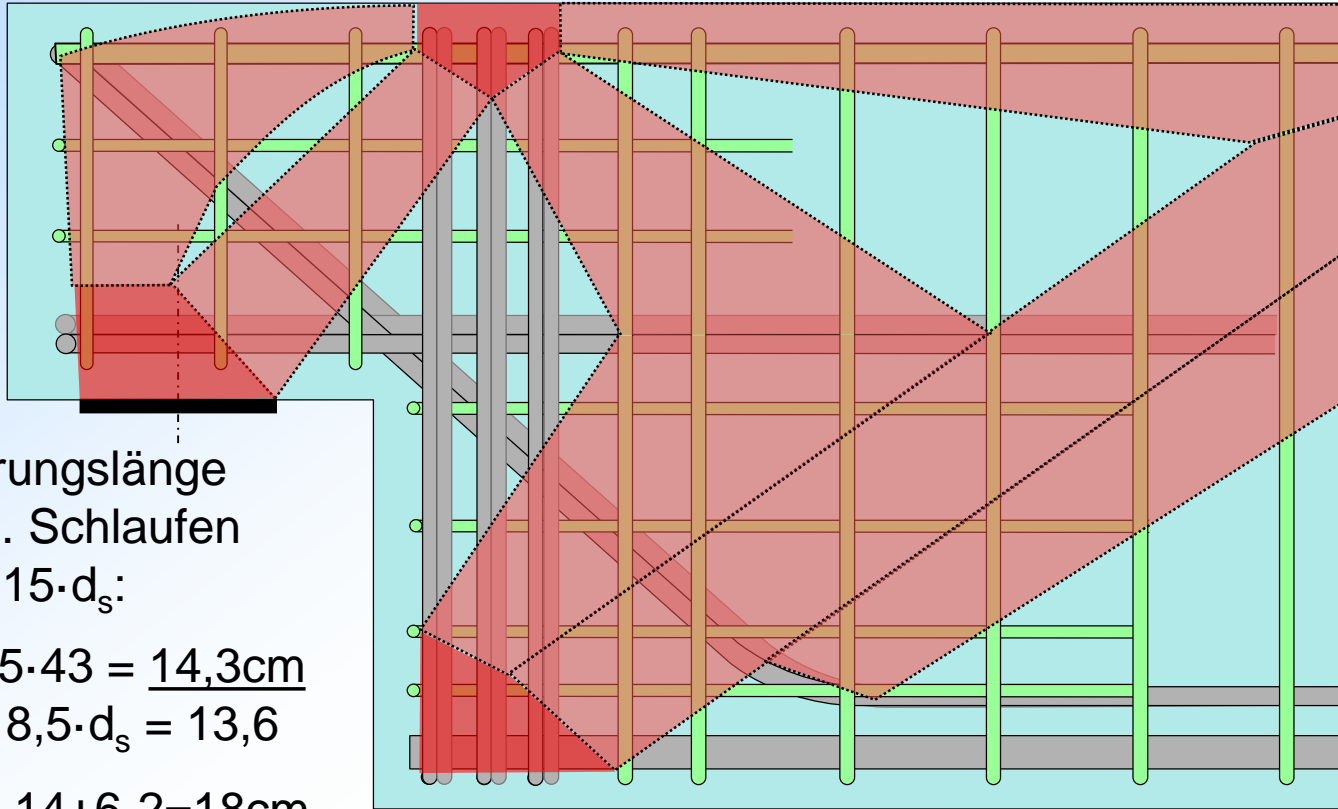
$$F_s = 4 \cdot 0,0000785 \text{ m}^2 \cdot 239 \text{ MN} / \text{m}^2 = 0,075 \text{ MN}$$

Rissbreite grob überschläglich:

$$w_k = s_{r,max} \cdot \frac{F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr}}{E_s \cdot A_s} = 177 \text{ mm} \cdot \frac{0,075 \text{ MN} - 0,4 \cdot 0,075 \text{ MN}}{200000 \text{ MN} / \text{m}^2 \cdot 4 \cdot 0,0000785 \text{ m}^2} = 0,13 \text{ mm}$$

**Die tatsächliche Rissbreite des schrägen Risses bleibt noch unterhalb des berechneten Wertes:**





Verankerungslänge  
der horiz. Schlaufen  
mit  $d_{br} = 15 \cdot d_s$ :

$$\frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 43 = \underline{14,3\text{cm}}$$

mind.  $8,5 \cdot d_s = 13,6$

Vorh.:  $14+6-2=18\text{cm}$

Für den unteren Knoten 5 ist die vorhandene Verankerungslänge der unteren Feldbewehrung meistens zu kurz, es sollte aber auf keinen Fall ein größerer Abstand der Aufhängebügel gewählt werden.



Um die horizontale Verankerungskraft am Knoten 5 klein zu halten, sollte bei der Querkraftbemessung ein steilerer Druckstrebenwinkel gewählt werden, rechnerisch jedoch nicht steiler als  $40^\circ$  ( $\cot\theta = 1,2$  bzw.  $\tan\theta = 0,84$ ).

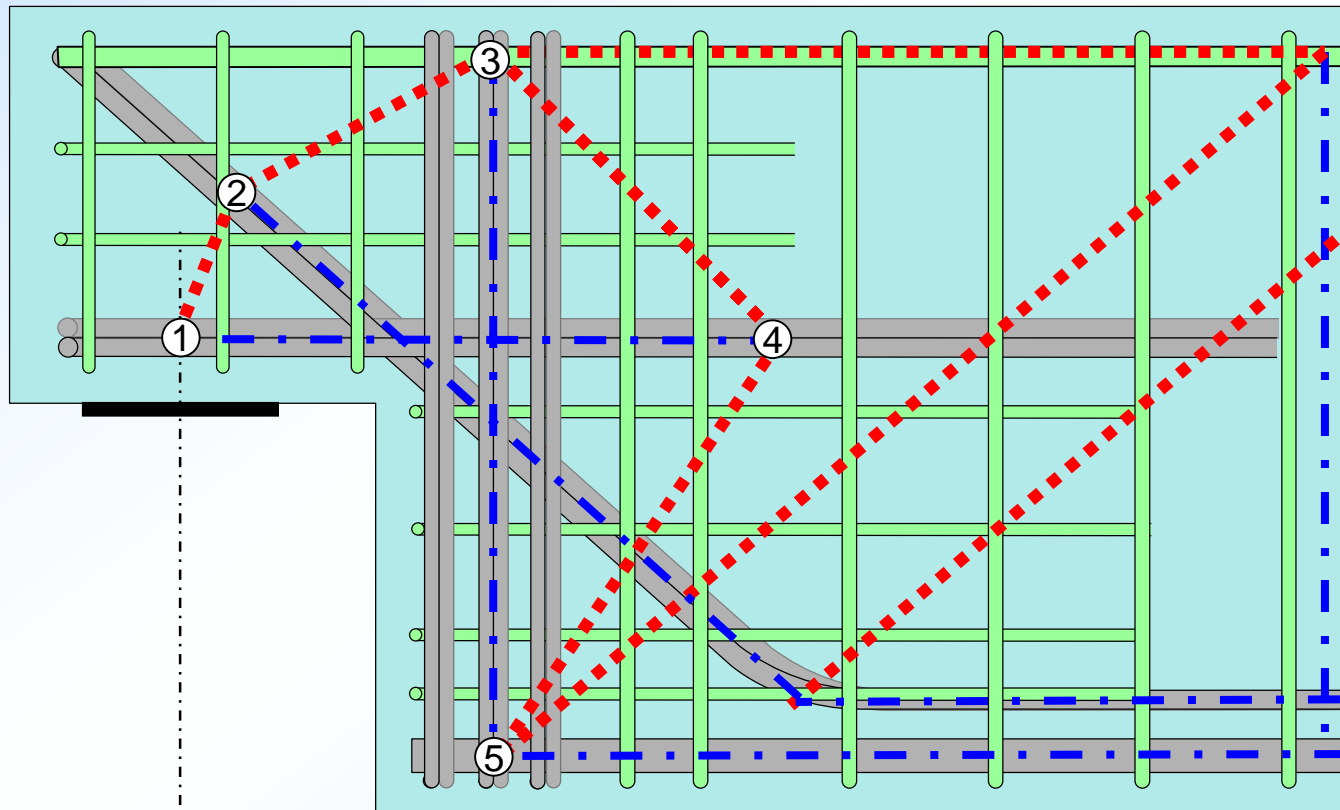
Damit ergibt sich hier für eine Querkraft von  $510 - 135 = 375$  kN

$$erfa_{s,w} = \frac{375 \text{ kN}}{43,5 \text{ kN} / \text{cm}^2 \cdot (0,9 \cdot 0,6 \text{ m}) \cdot 1,2} = 13,3 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

gew.: Bügel  $\text{Ø}10/10 \hat{=} 15,7 \text{ cm}^2/\text{m}$

## Verankerung am unteren Knoten 5:

Ein Teil der Querkraft wird bereits durch die Schrägschlaufen (234 kN) aufgenommen, damit verbleibt als Horizontalkomponente aus Querkraft  $(375 - 234) \cdot 1,2 = 169$  kN; H-Komp. aus dem Konsolband über Knoten 4:  $316 \cdot 24,7 / 57,7 = 135$  kN, insgesamt zu verankern:  $169 + 135 = 304$  kN



$$erfA_s = \frac{304kN}{43,5kN / cm^2} = 7,0cm^2$$

$$vorhA_s = 37,0cm^2 \quad (6 \text{ } \varnothing \text{ } 28)$$

Verankerungslänge:

$$= 1,0 \cdot \frac{7}{37,0} \cdot 76cm = 14,4cm$$

$$\text{mind } 0,3 \cdot 76cm = 23cm$$

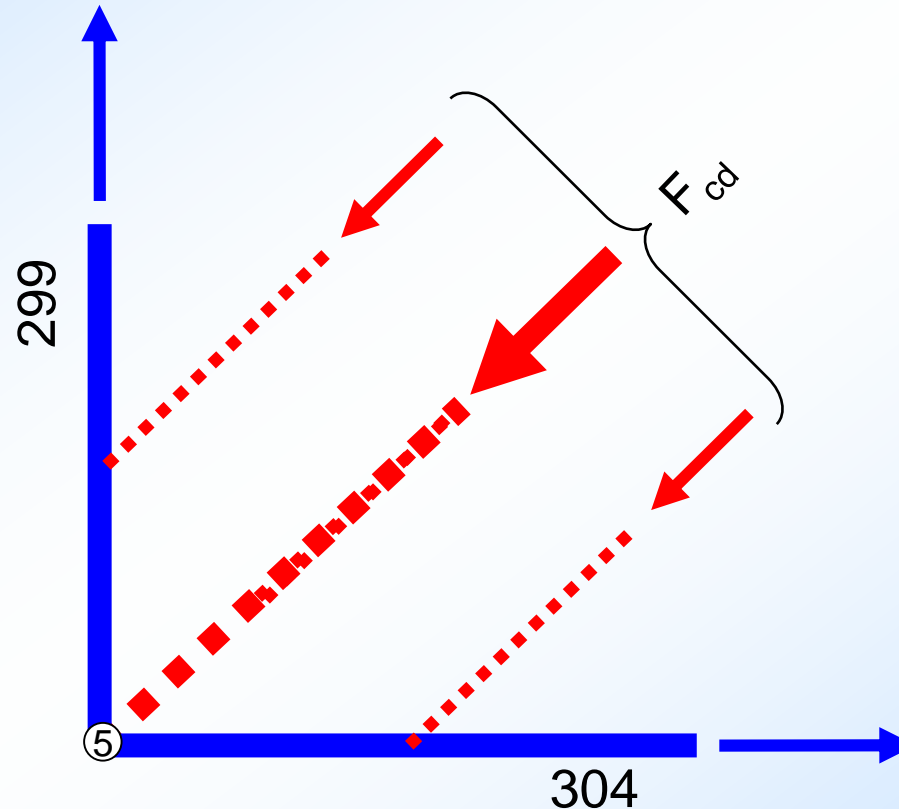
$$\text{mind } 10 \cdot 2,8cm = 28cm$$

Die Forderungen nach einer Mindestverankerungslänge können nach Auffassung des Verfassers **hier** ignoriert werden, da eine sorgfältige Nachverfolgung der Kräfte vorgenommen wird.

$vorh l_{b,net} = 10cm$  **ist trotzdem nicht ausreichend**, da nur eine Kraft von  $304 \cdot 10 / 14,4 = 211$  kN übertragen werden kann. Es fehlen  $304 - 211 = 93$  kN.

Der untere Knoten muss sich nicht auf den Bereich der Aufhängebewehrung beschränken, ähnlich wie bei indirekt gelagerten Wandscheiben oder Trägern kann der Knoten durch Zulagebewehrung vertikal und horizontal vergrößert bzw. die aufnehmbare Kraft gesteigert werden:

Die einzelne Druckstrebe muss nun aufgeweitet werden, um den Knoten 5 zu entlasten

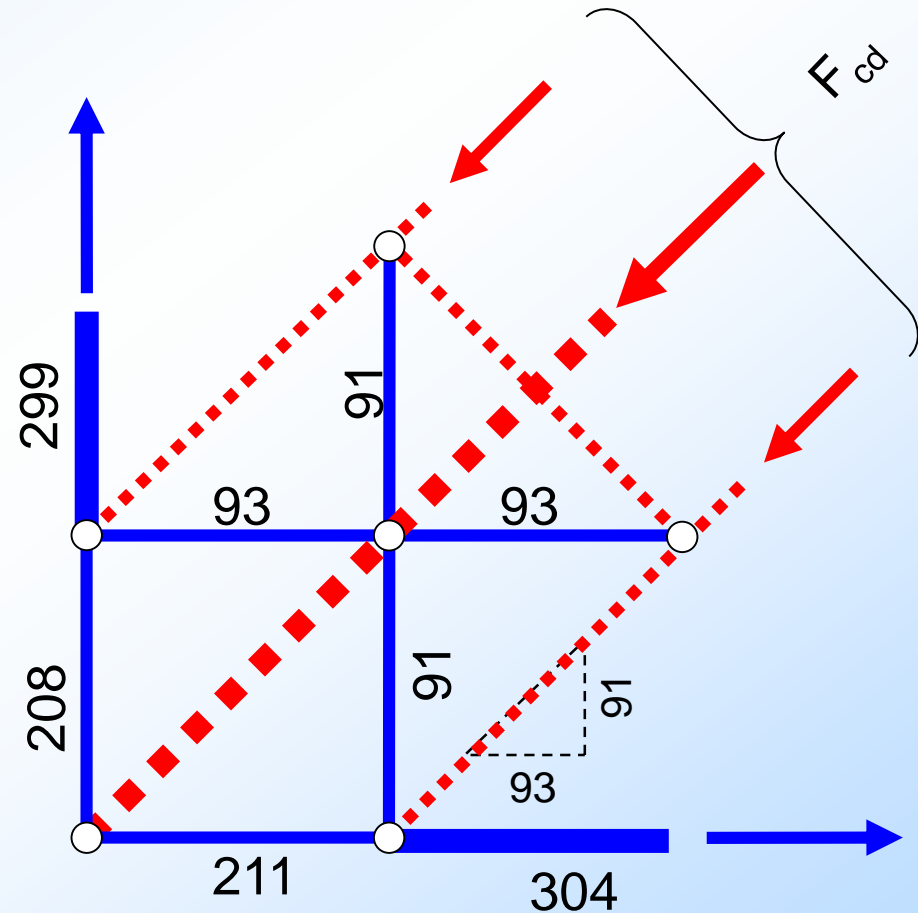
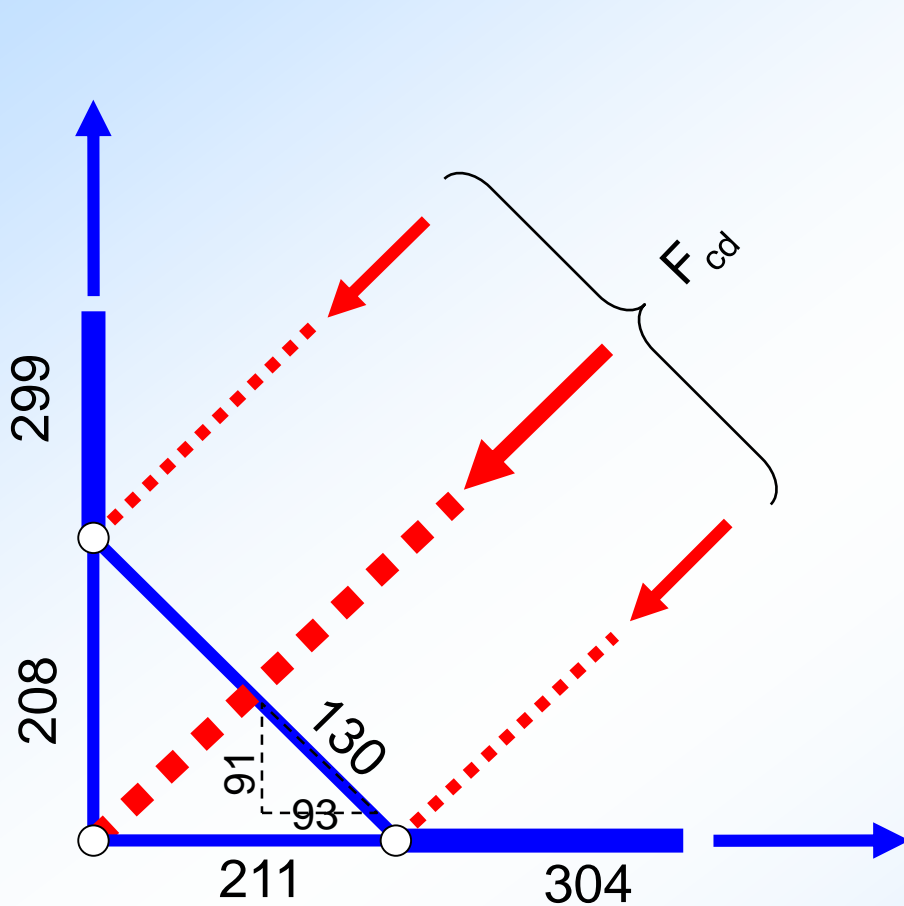


Hierfür muss zusätzlich eine schräge oder eine orthogonale Bewehrung ergänzt werden

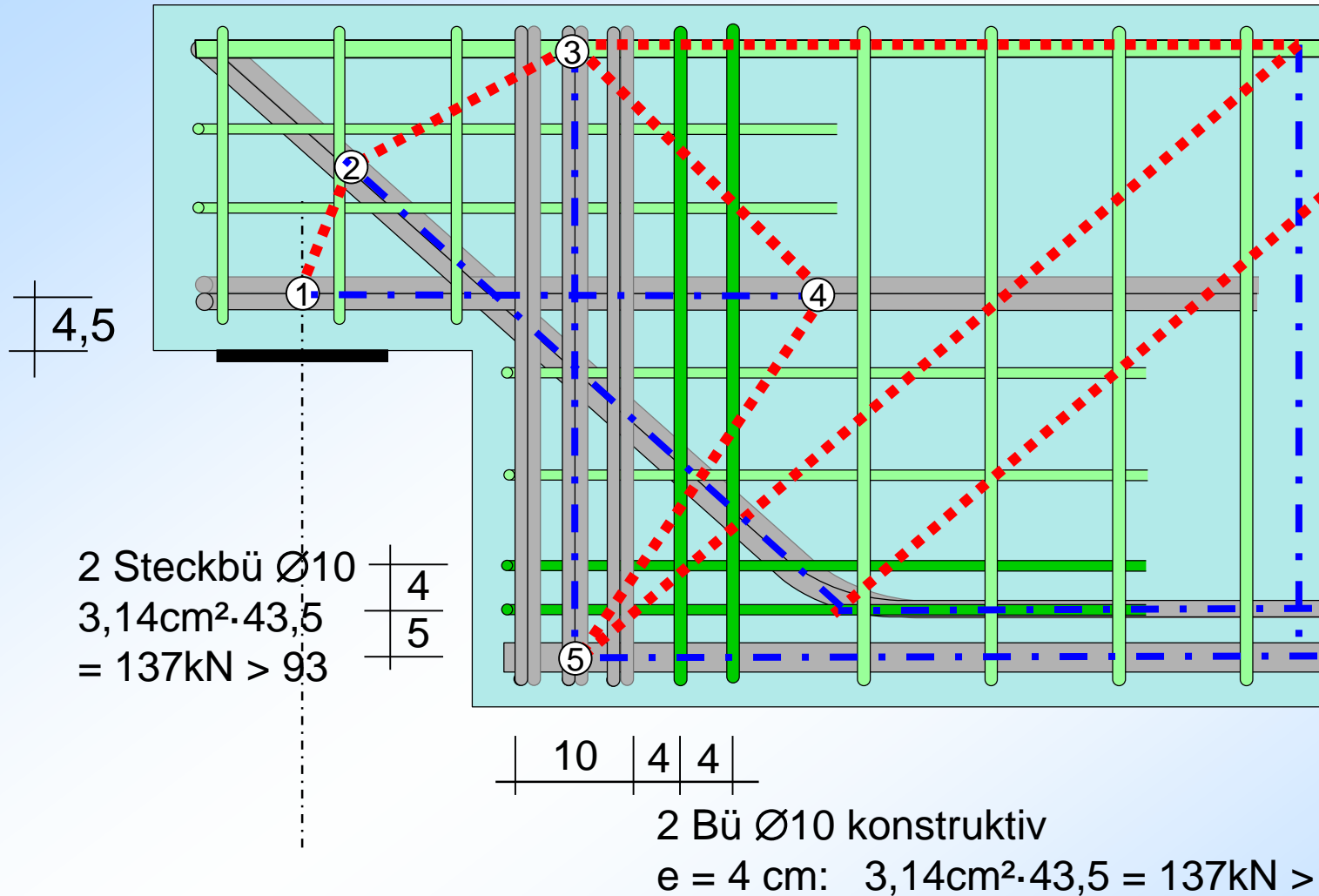
# Stabwerkmodelle

Idealerweise wird ein Umlenkknotten oder eine Schrägbewehrung (hier ca. 45°) ausgebildet.

Alternativ bei zusätzlicher orthogonaler Bewehrung:

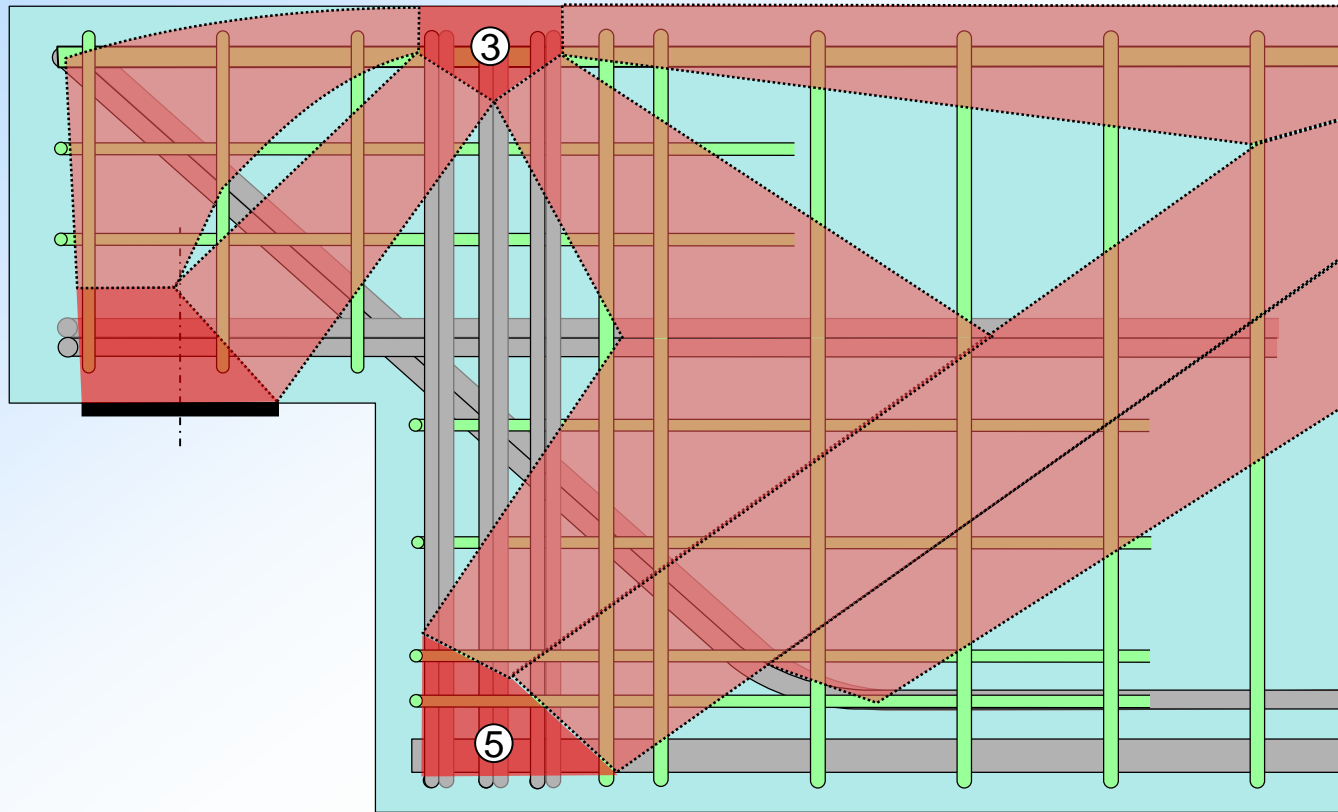


der Knoten 5 ist nun durch zusätzliche Bügel und Steckbügel entlastet

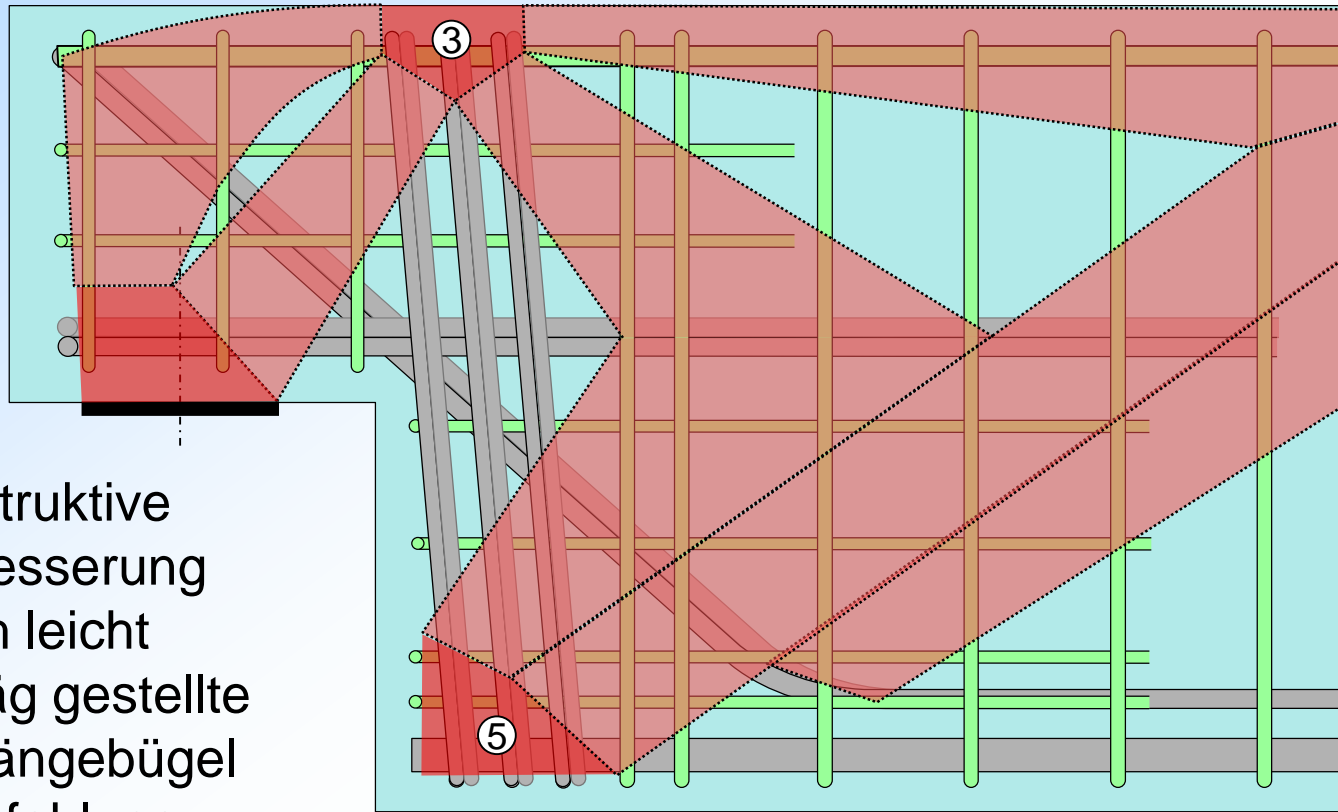


Im Bereich der zusätzlich eingelegten Bügel kann die fehlende Verbundkraft von 93 kN zwischen Längsbewehrung und Beton hier o. w. N. übertragen werden.





Die fiktive **vertikale** Lagerpressung am Knoten 5 ist nun kleiner als am Knoten 3, damit kann der Nachweis hier entfallen



Konstruktive  
Verbesserung  
durch leicht  
schräg gestellte  
Aufhängebügel  
(Empfehlung  
Steinle):

⇒ steilere Druckstrebe zum oberen Knoten 3 ,geringere Kraft in  
Konsolbew., Entlastung des oberen Knotens, Entlastung der  
„Aufhängebügel“, vergrößerte Verankerungslänge am unteren Knoten 5

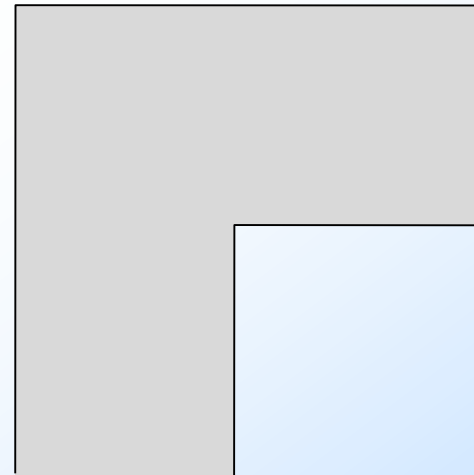
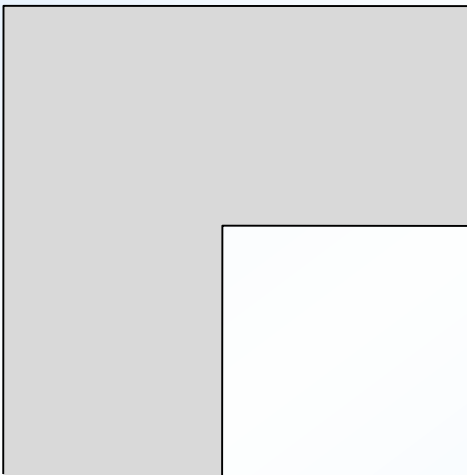
## Zusammenfassung:

- Das Modell mit ausschließlich vertikaler Bewehrung nutzt die Betondruckzone nicht aus und führt zum frühzeitigen Abplatzen der Betondeckung.
- Daher ist eine Bewehrung aus schrägen Schlaufen so zu dimensionieren, dass eine ausreichende Druckkraft in die Betondeckung geleitet werden kann.
- Verankerung der Konsolbewehrung sinnvollerweise über ein „Sprengwerk“, um Verformungen und Rissbreiten im Gebrauchszustand klein zu halten.
- Infolge der Sprengwerkwirkung ist die „Aufhängebewehrung“ für die Zusatzbeanspruchung zu bemessen.

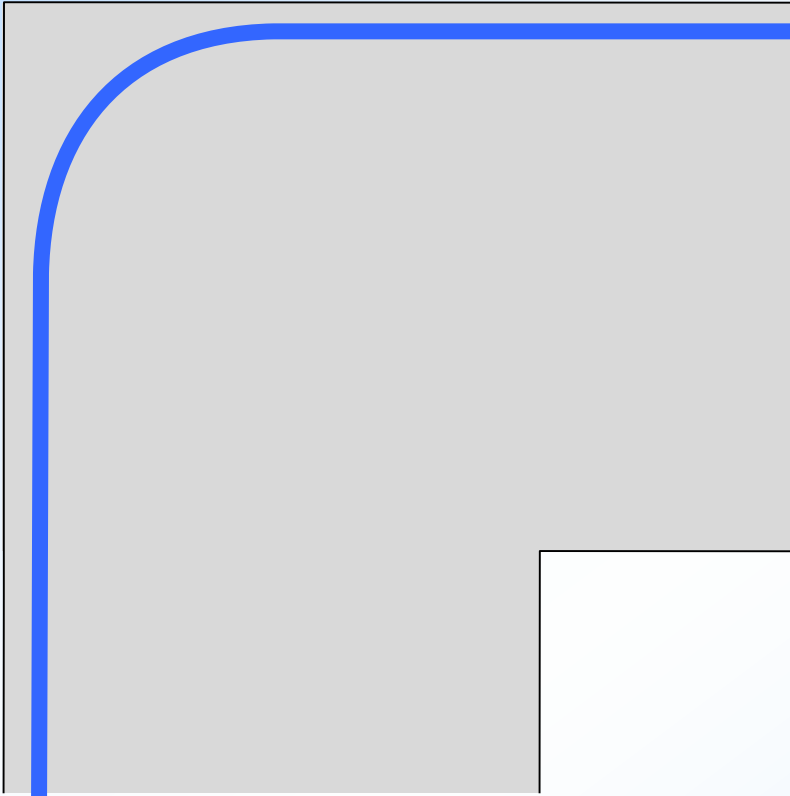
## 4 Rahmenecken

- Rahmenecken mit sich schließendem Moment
- Rahmenecken mit sich öffnendem Moment

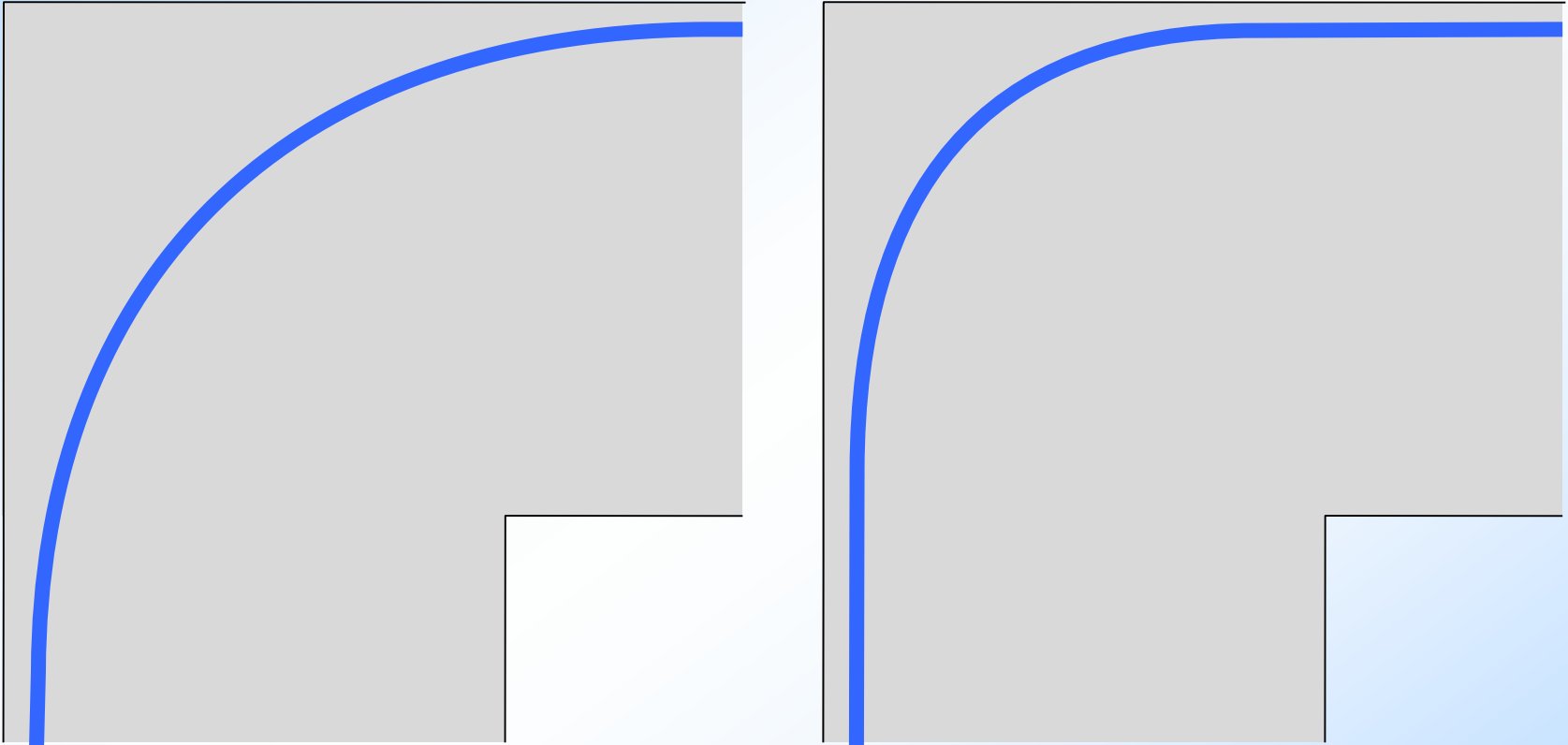
### 4.1 Rahmenecken mit sich schließendem Moment



Hydrostat. Knoten  
auf der Innenseite

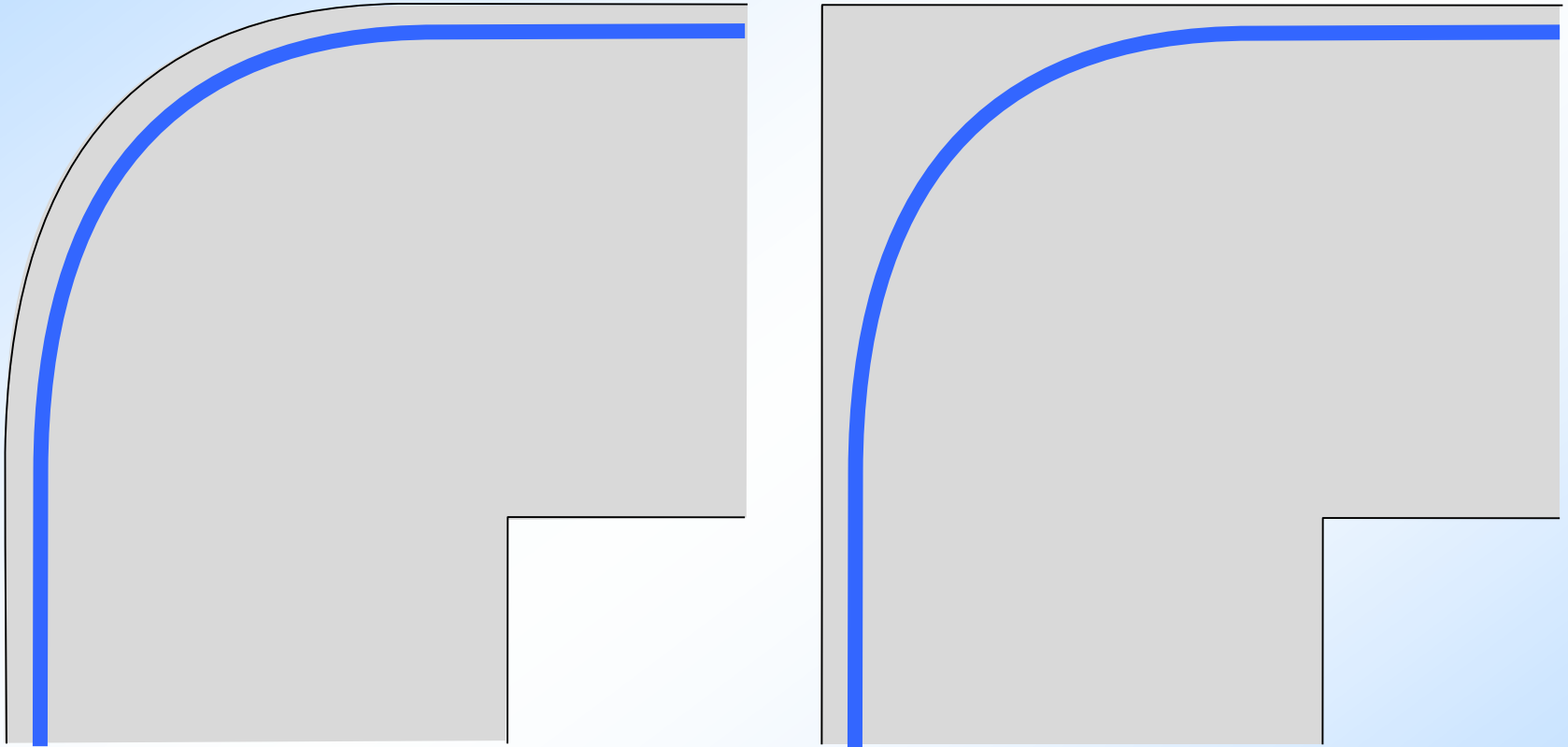


Der Biegerollendurchmesser sollte groß sein, aber nicht zu groß!

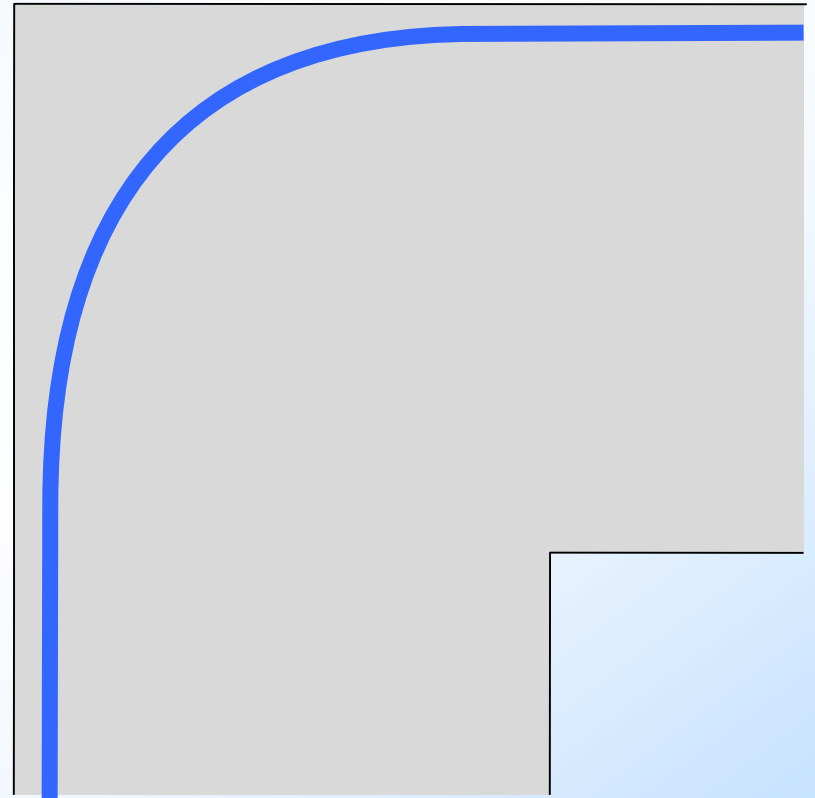




# Stabwerkmodelle



## Spannungen in Querrichtung



## Beispiel

Bewehrungsskizze (sich schließende) Rahmenecke:

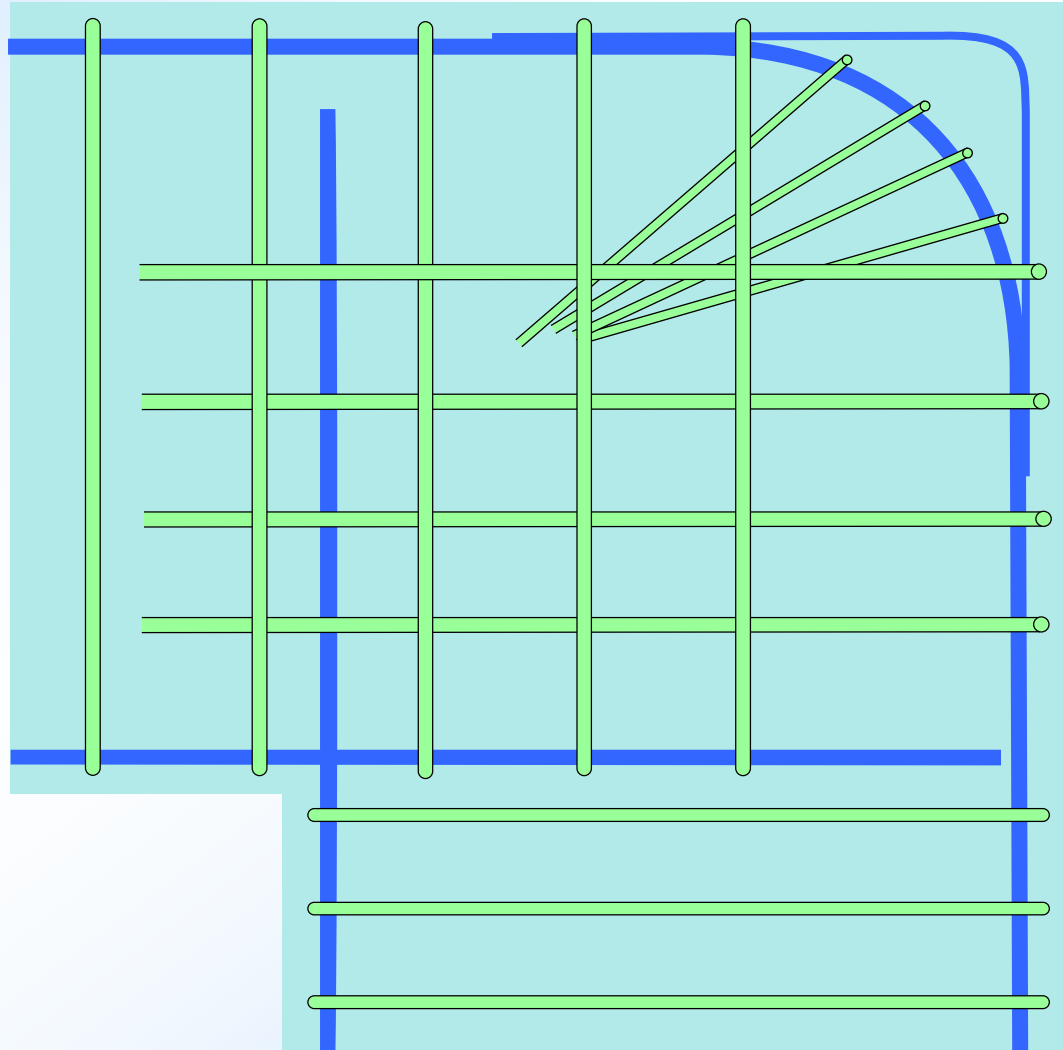
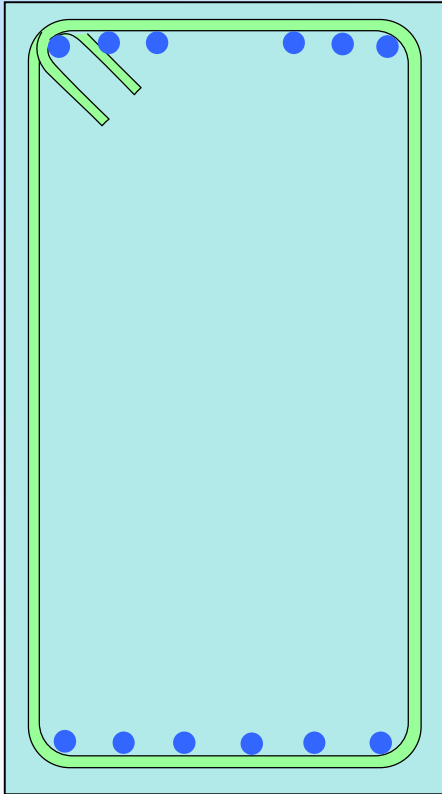


Tabelle NA.8.1 — Mindest-Biegerollendurchmesser  $D_{\min}$

a) für Stäbe

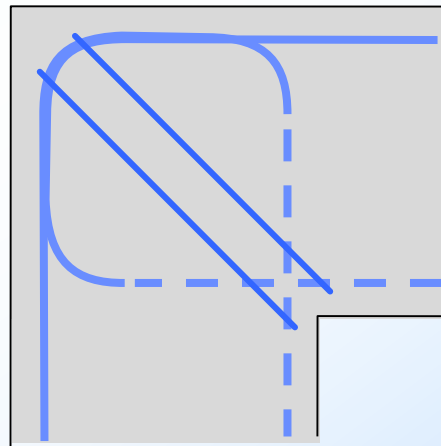
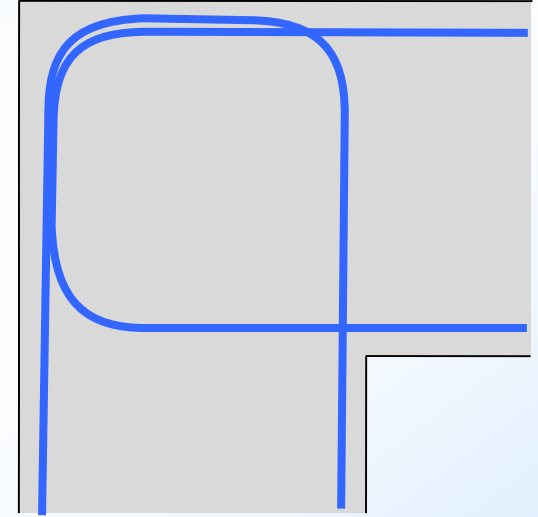
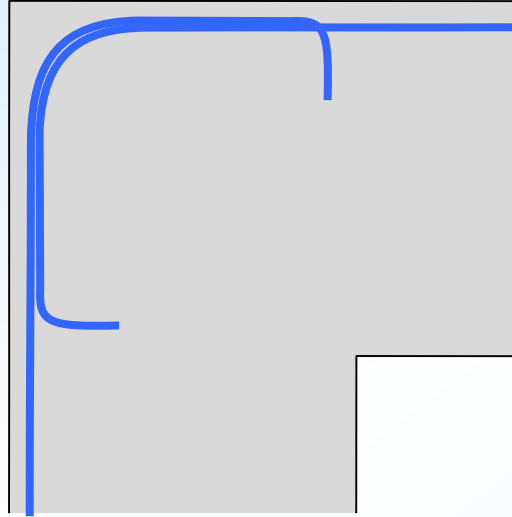
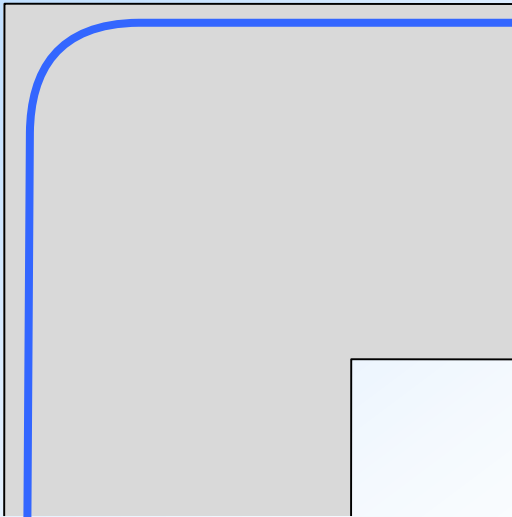
Mindestwerte der Biegerollendurchmesser für Haken, Winkelhaken, Schlaufen, Bügel		Mindestwerte der Biegerollendurchmesser für Schrägstäbe oder andere gebogene Stäbe		
Stabdurchmesser mm		Mindestwerte der Betondeckung rechtwinklig zur Biegeebene		
$\phi < 20$	$\phi \geq 20$	$> 100$ mm und $> 7\phi$	$> 50$ mm und $> 3\phi$	$\leq 50$ mm oder $\leq 3\phi$
$4\phi$	$7\phi$	$10\phi$	$15\phi$	$20\phi$

b) für nach dem Schweißen gebogene Bewehrung (Stäbe und Matten)

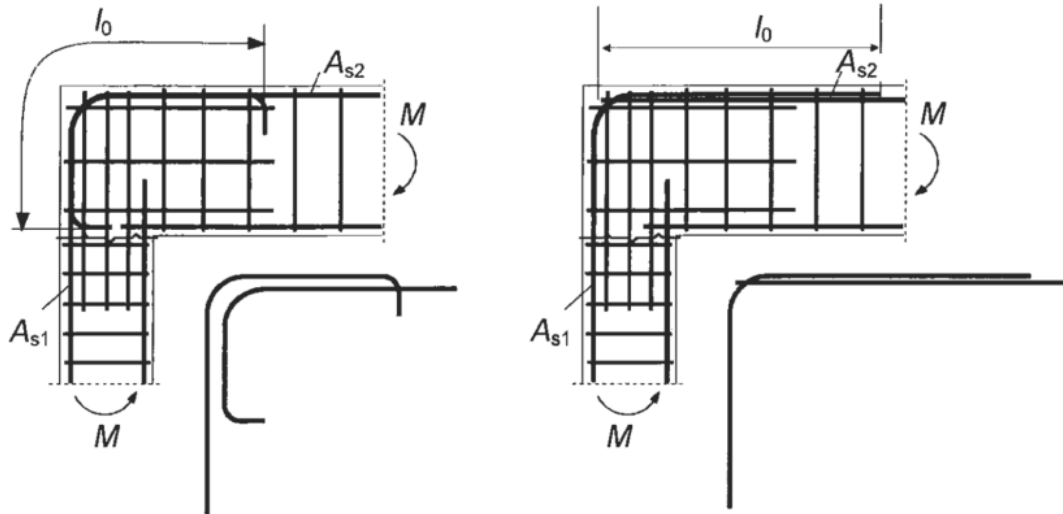
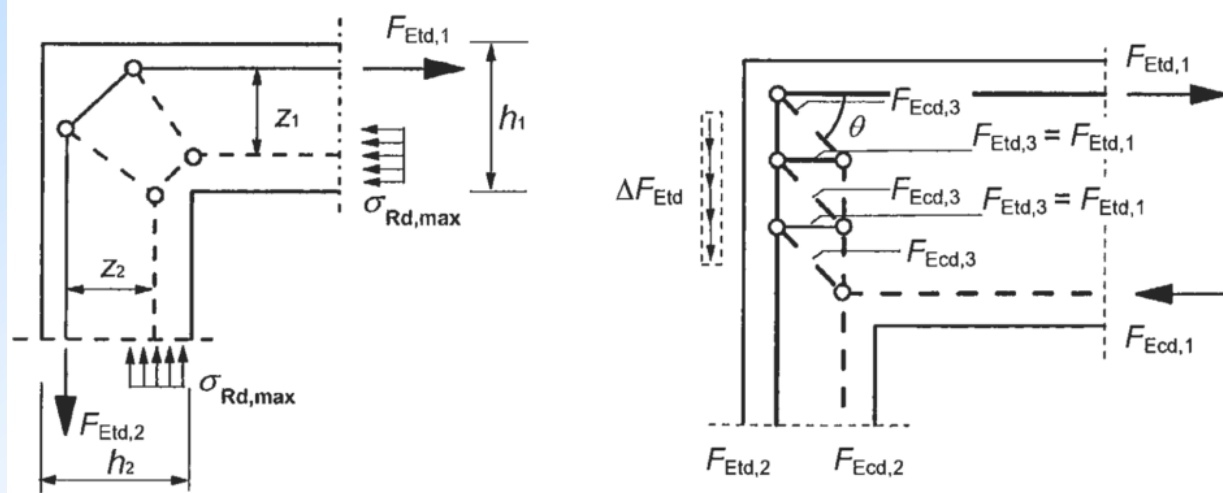
Quelle:

DIN EN 1992-1-1/NA:2011-01

## Bewehrungsführung für Rahmenecken plattenförmiger Bauteile



# Stabwerkmodelle



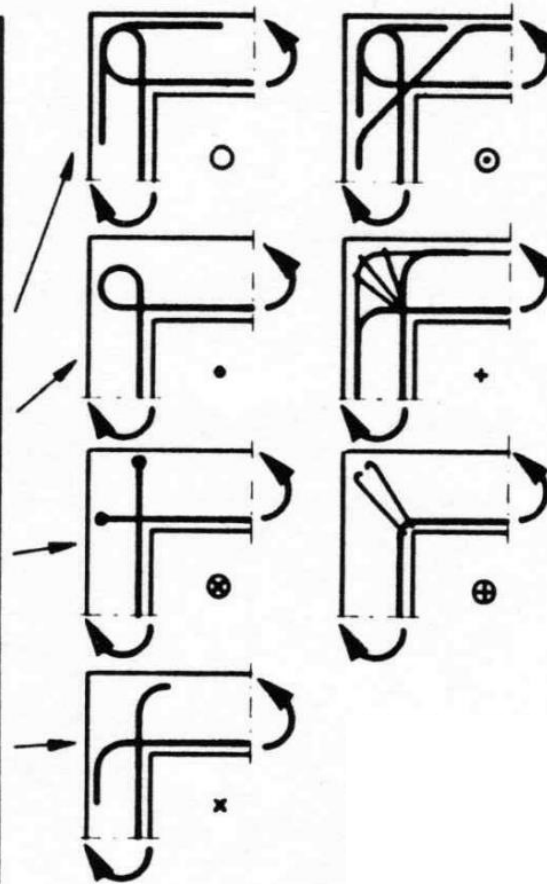
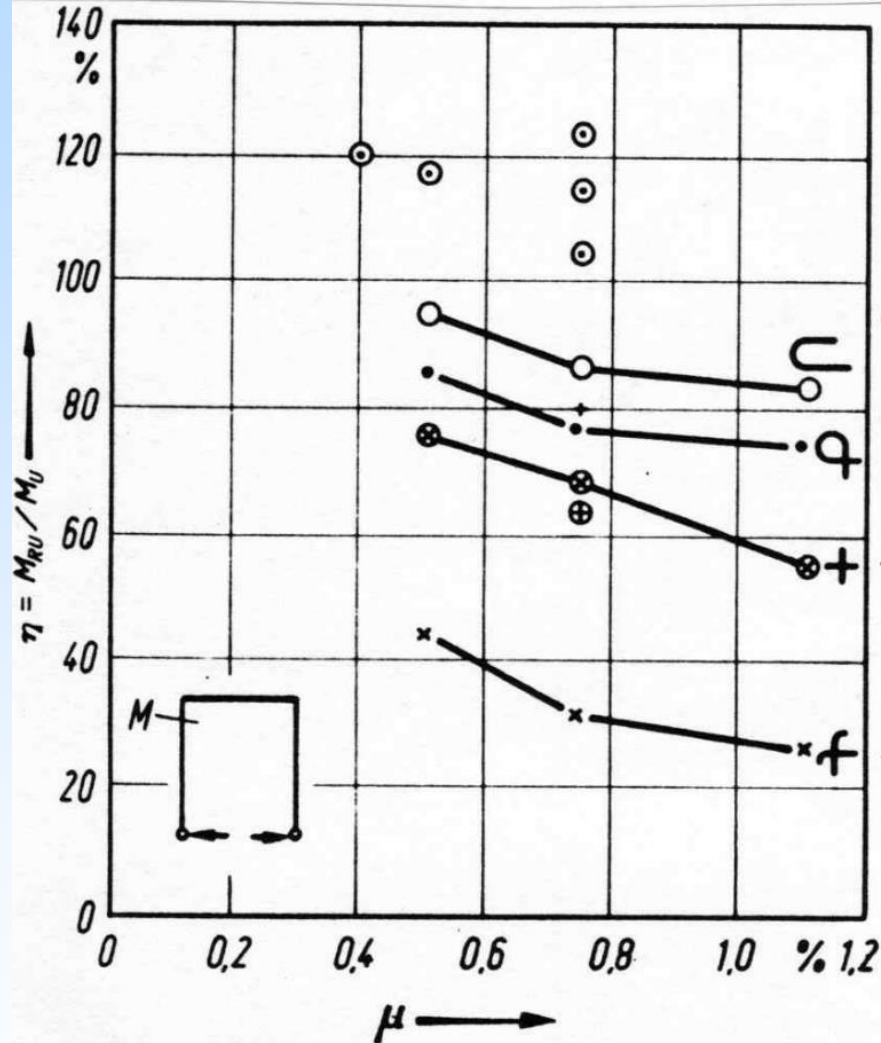
**Bild HJ-1 – Rahmenecken bei negativer Momentenbeanspruchung**  
 oben: Stabwerkmodelle für Rahmenecke mit  $h_1/h_2 < 1,5$  (links) und  $h_1/h_2 > 1,5$  (rechts)  
 unten: Bewehrungsführung

Quelle:  
DAfStb Heft 600

Hinweis: Anhang J.2  
und J.3 von EC2 sind  
in Deutschland nicht  
zugelassen



## 4.2 Rahmenecken mit sich öffnendem Moment



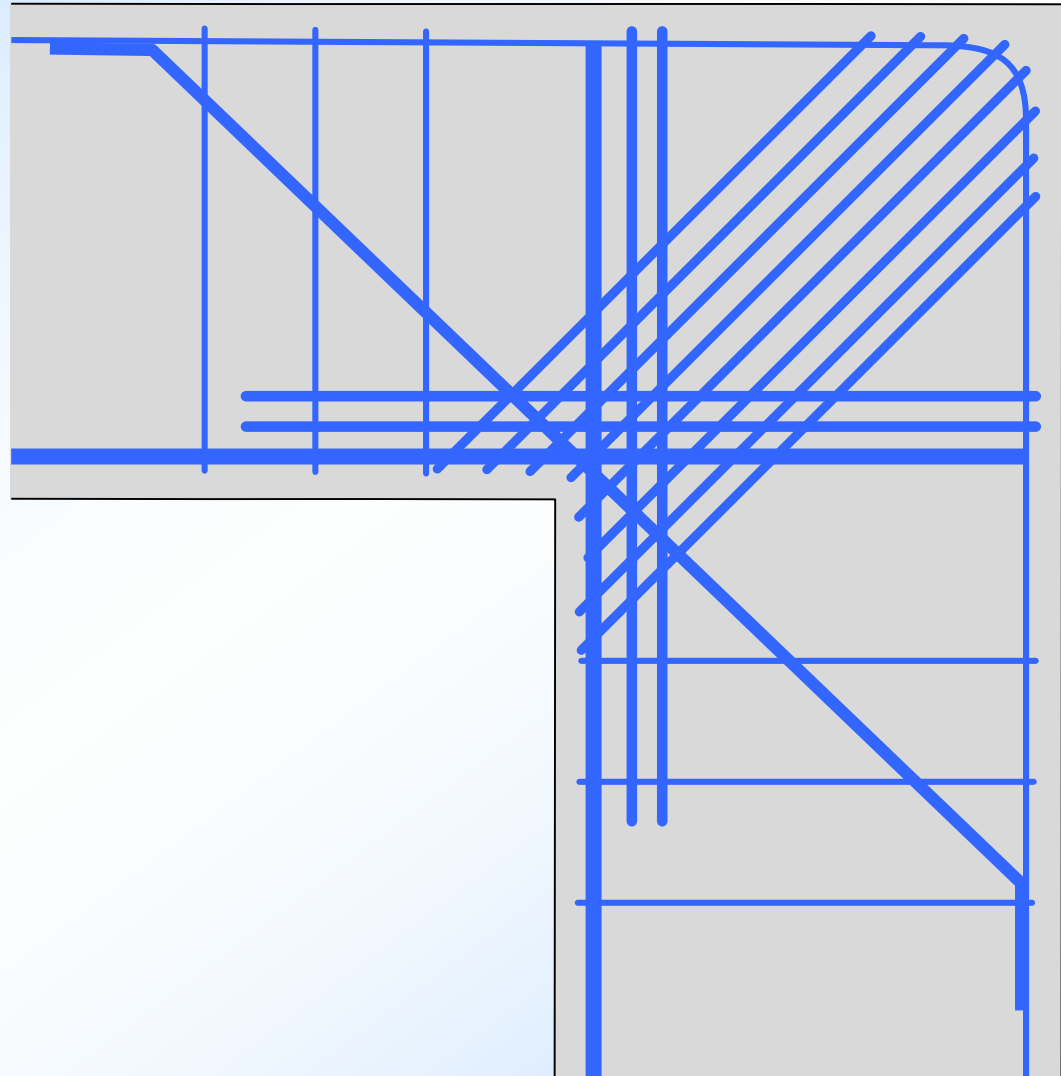
Versuche von  
Ingvar H. E.  
Nilsson

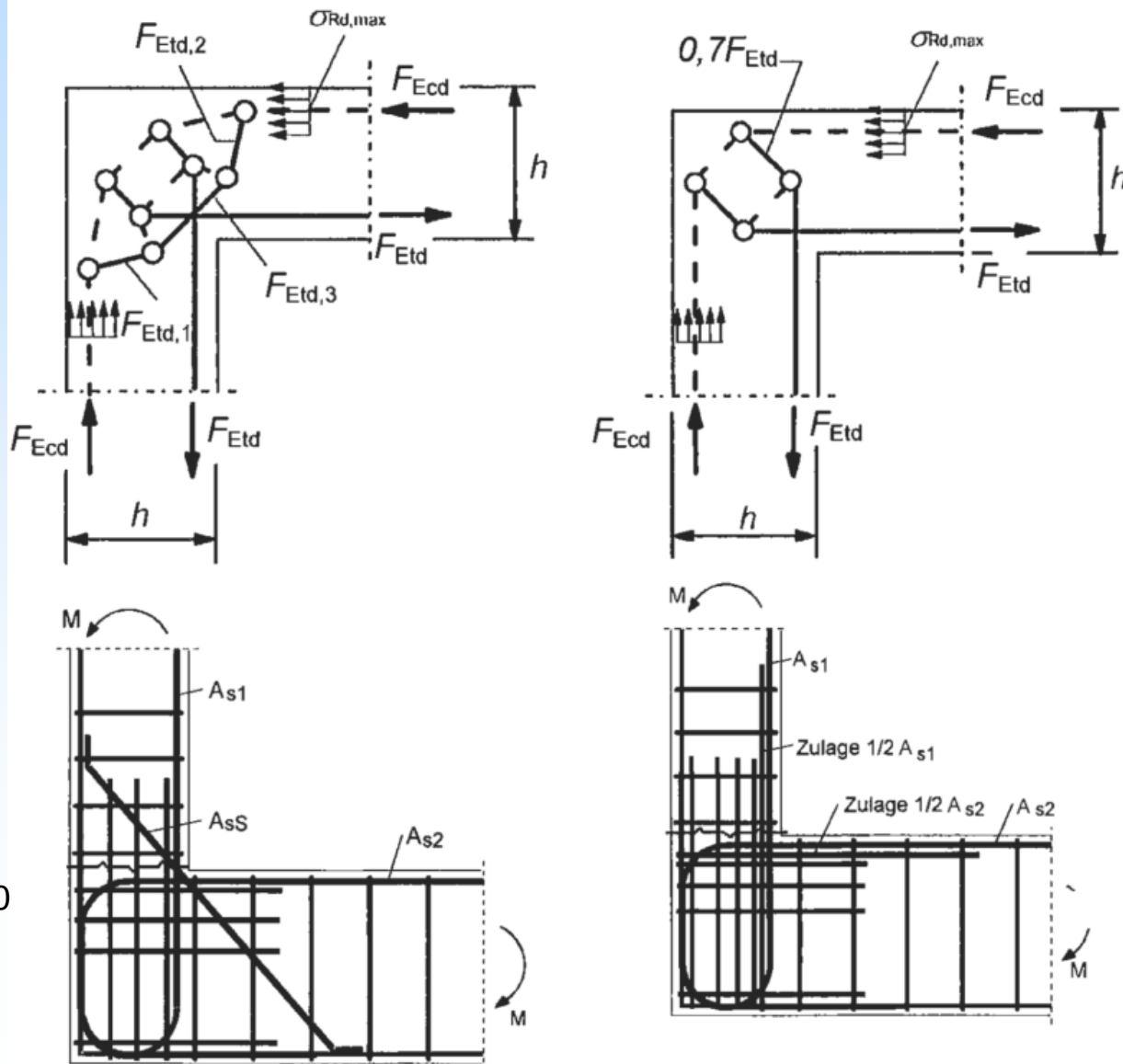
**Bild 4.4-14.** Tragfähigkeit  $M_{RU}$  bezogen auf das rechnerische Bruchmoment  $M_U$  des schwächeren Rahmenschenkels von Rahmenecken mit verschiedenen Bewehrungsarten bei positivem Moment, abhängig vom Bewehrungsprozentsatz bei BSt 420 S und B 25 [4.18]

Schlaich, J.; Schäfer, K.: Konstruieren im Stahlbetonbau in : Betonkalender 1993, Teil II, Ernst und Sohn

## Bewehrungsführung für sich öffnende Rahmenecken

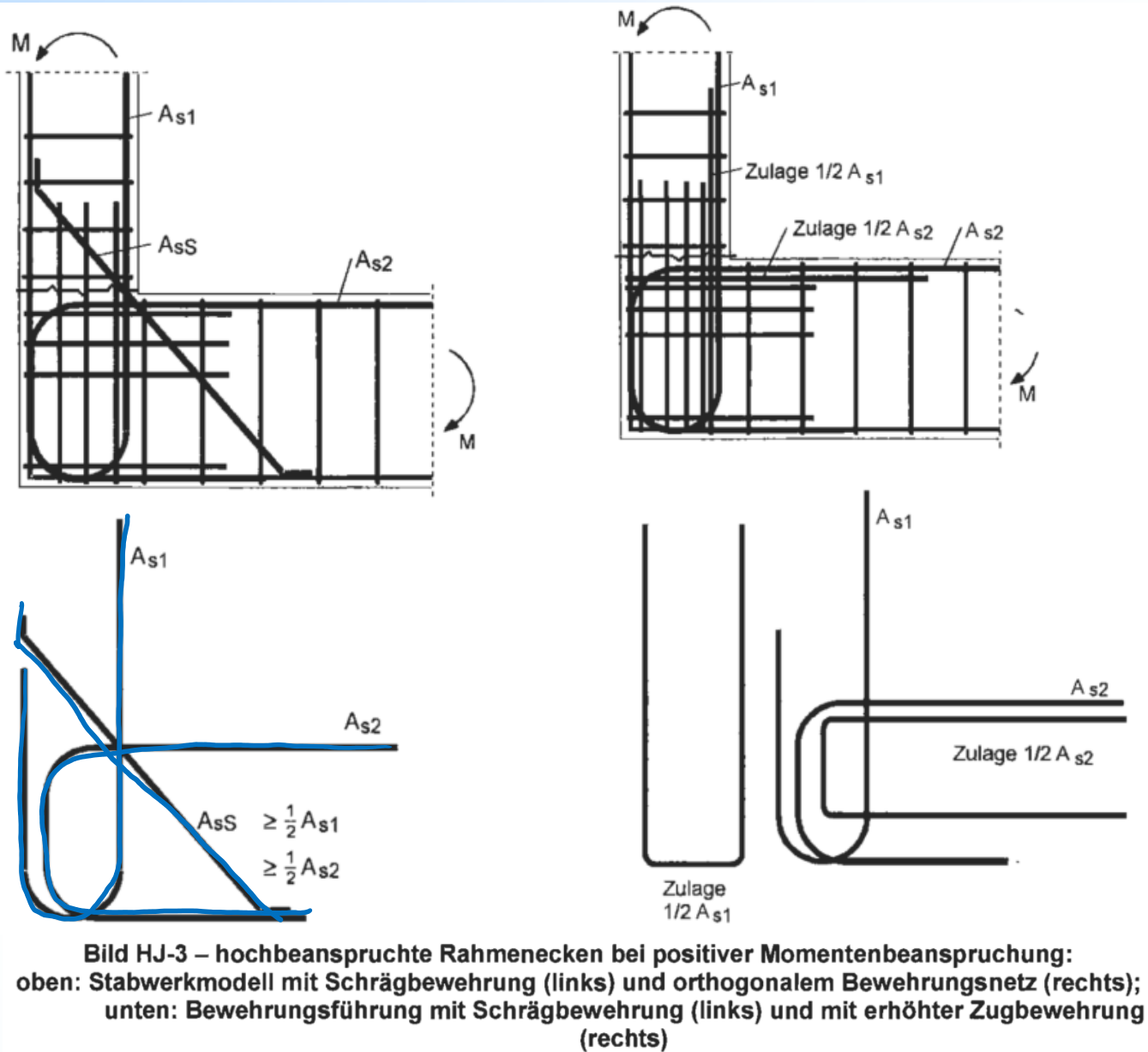
Stabwerkmodell



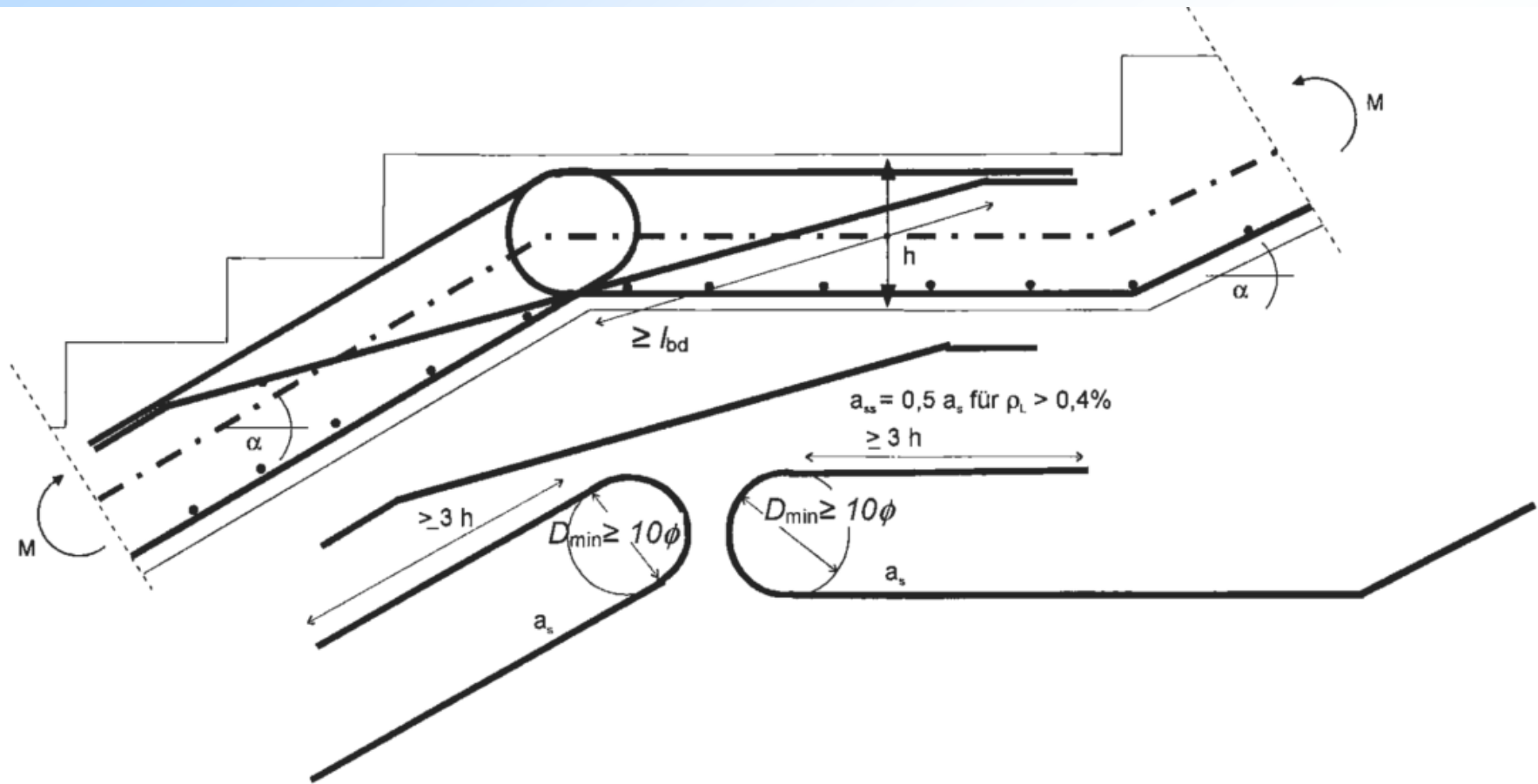


Quelle:  
DAfStb Heft 600

**Bild HJ-3 – hochbeanspruchte Rahmenecken bei positiver Momentenbeanspruchung:  
oben: Stabwerkmodell mit Schrägbewehrung (links) und orthogonalem Bewehrungsnetz (rechts);  
unten: Bewehrungsführung mit Schrägbewehrung (links) und mit erhöhter Zugbewehrung (rechts)**



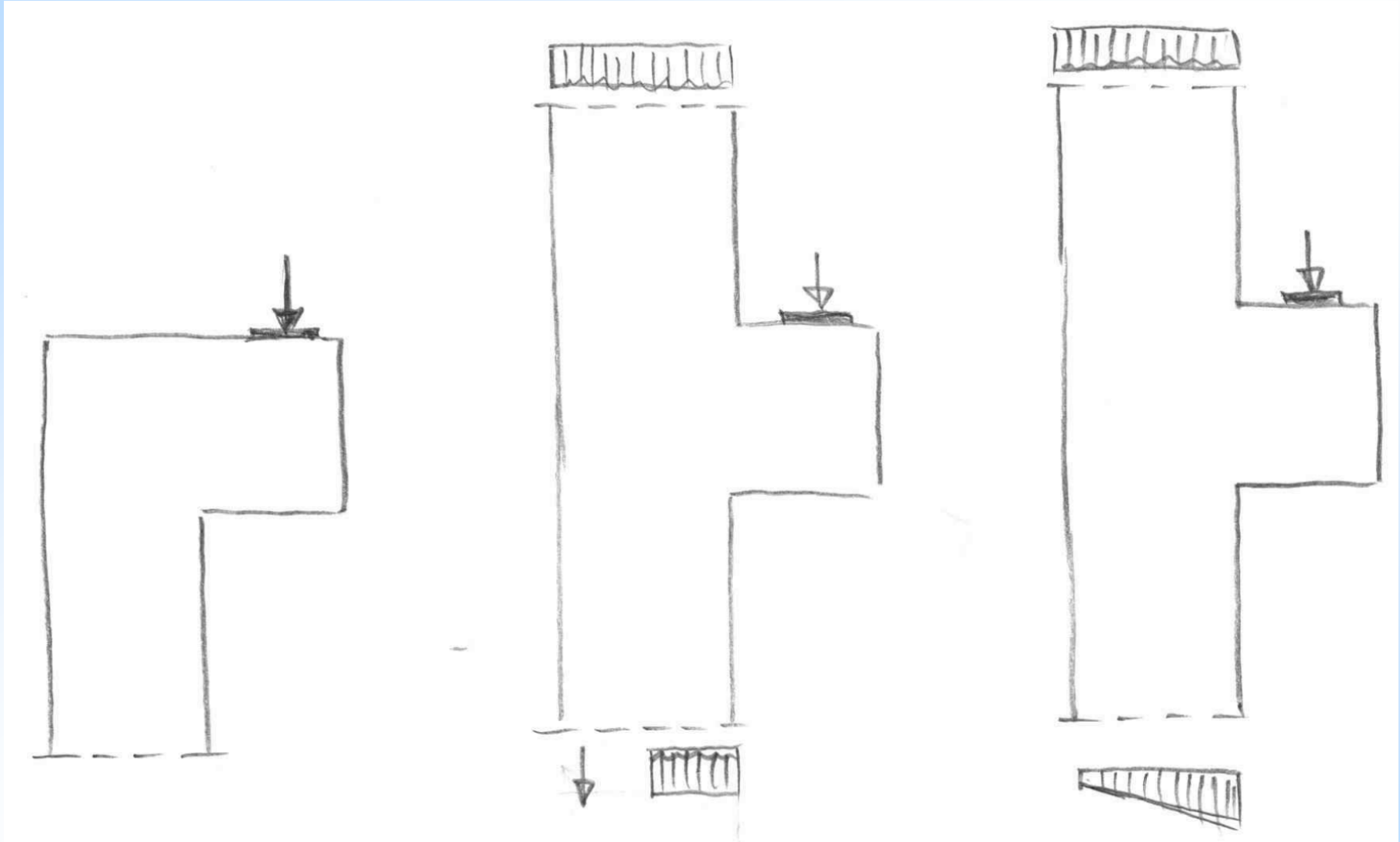
Quelle:  
DAfStb Heft 600



**Bild HJ-4 – Beispiel f\u00fcr die Bewehrungsf\u00fchrung eines Treppenzwischenpodestes**

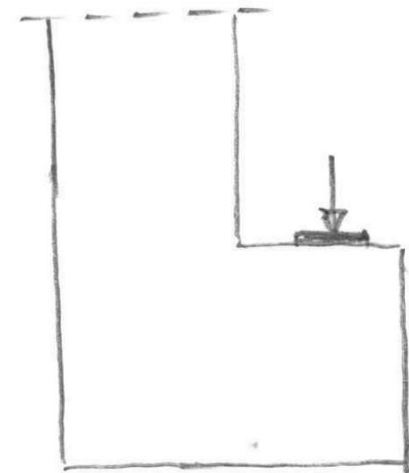
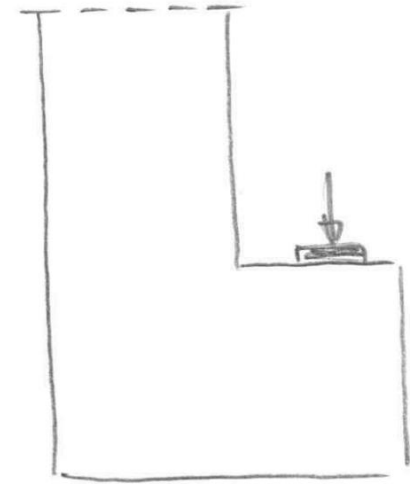
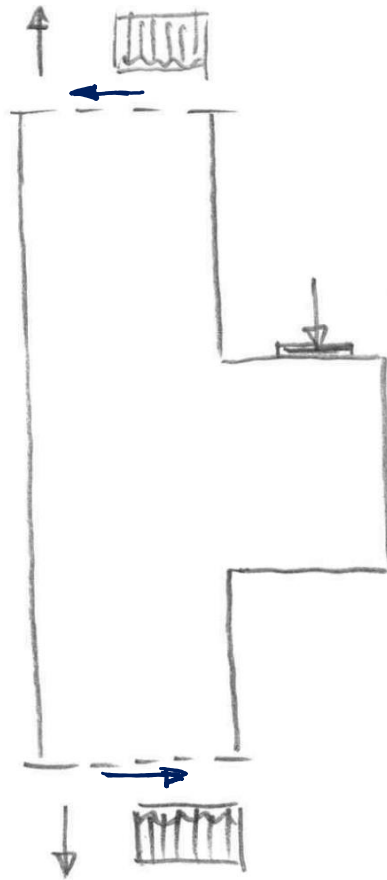
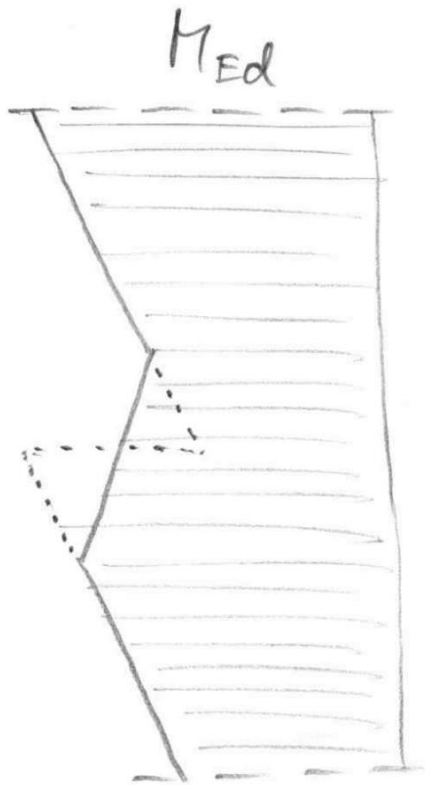
Quelle:  
DAfStb Heft 600

# Stabwerkmodelle

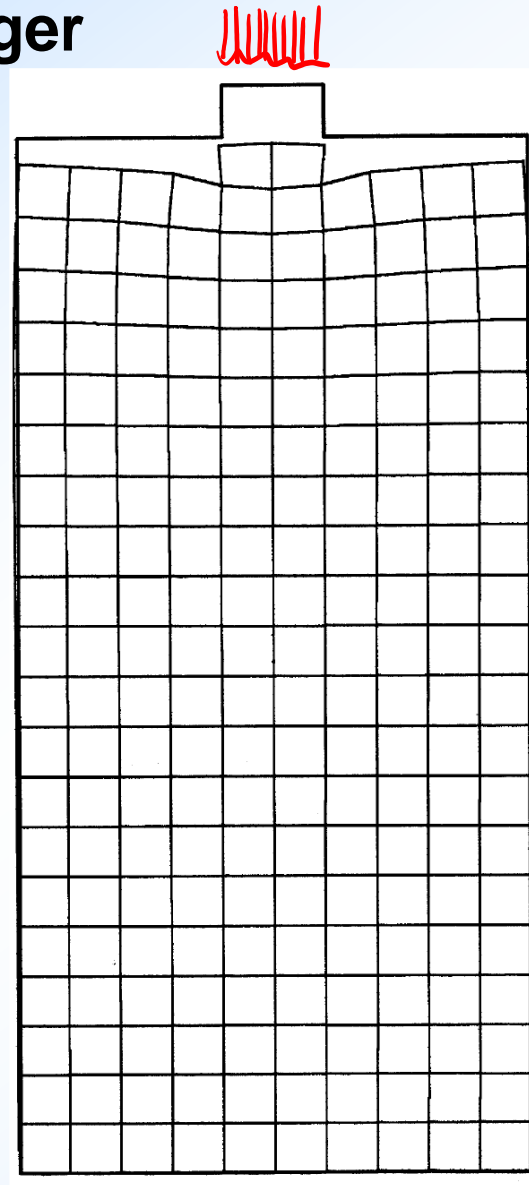




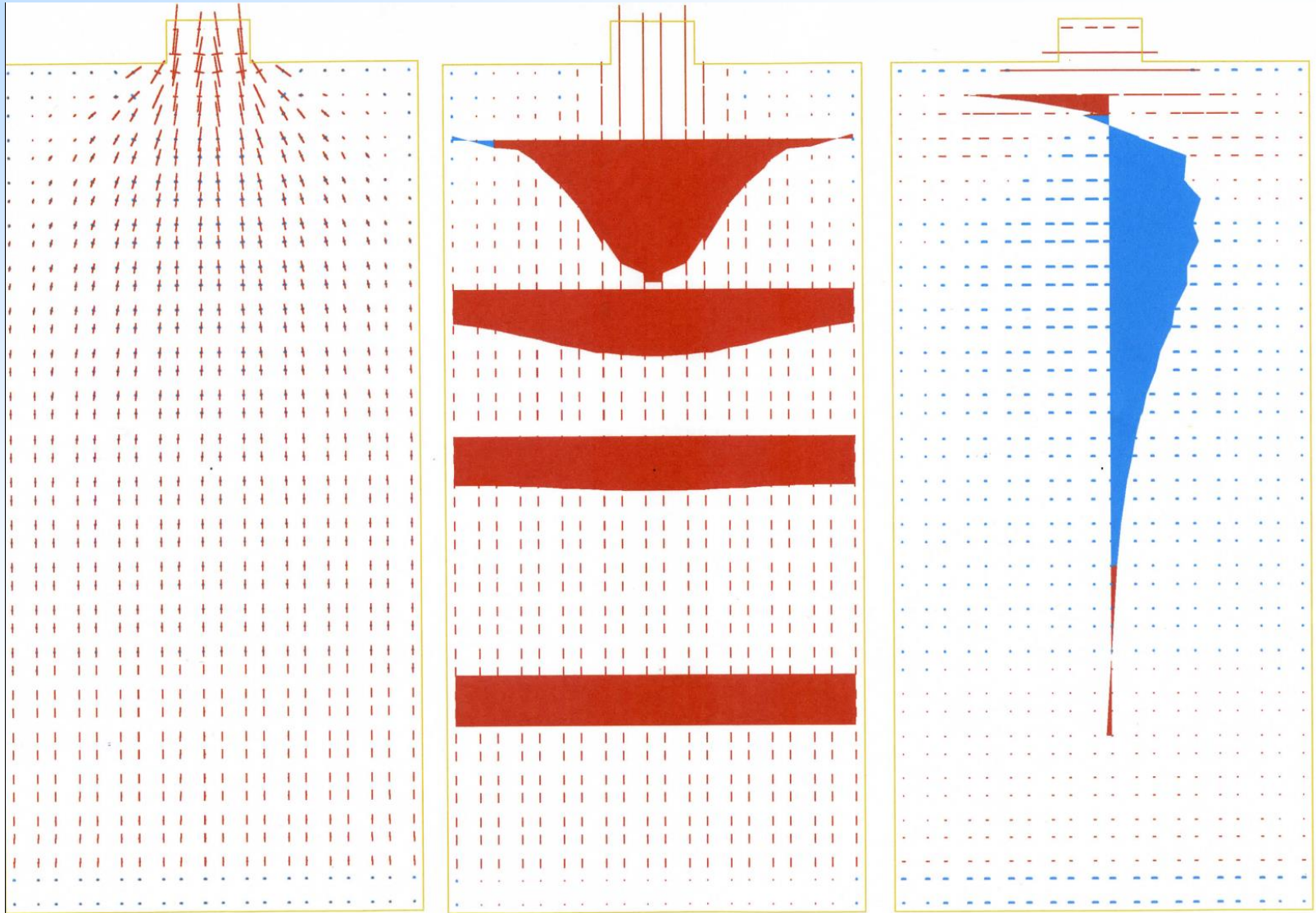
# Stabwerkmodelle



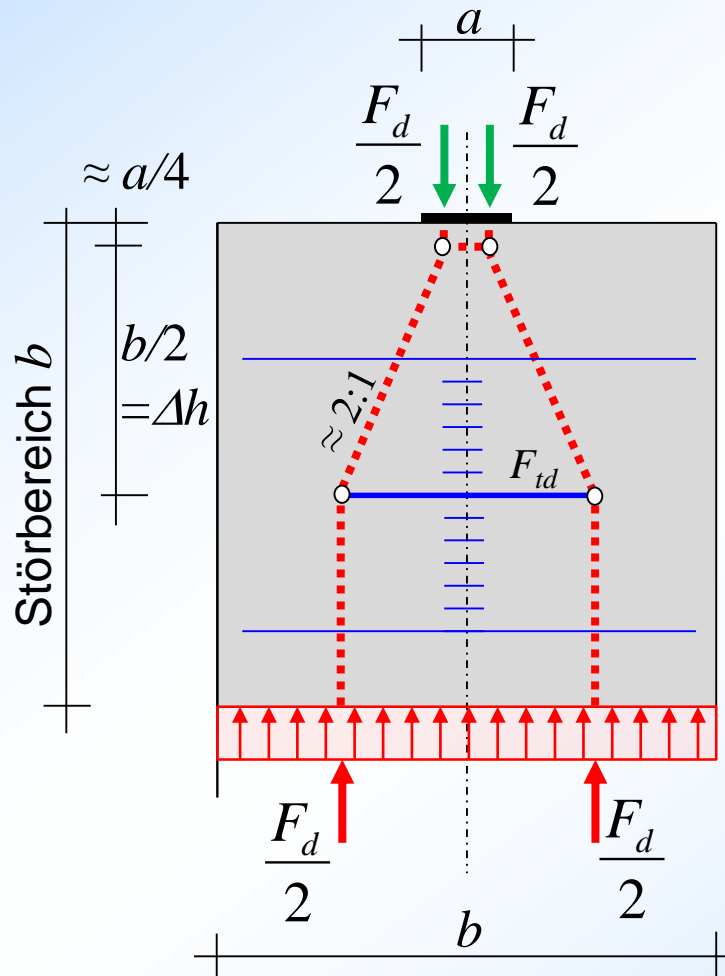
# 5 Stabwerkmodelle für die Einleitung von Einzellasten und für wandartige Träger



# Stabwerkmodelle



# Stabwerkmodelle

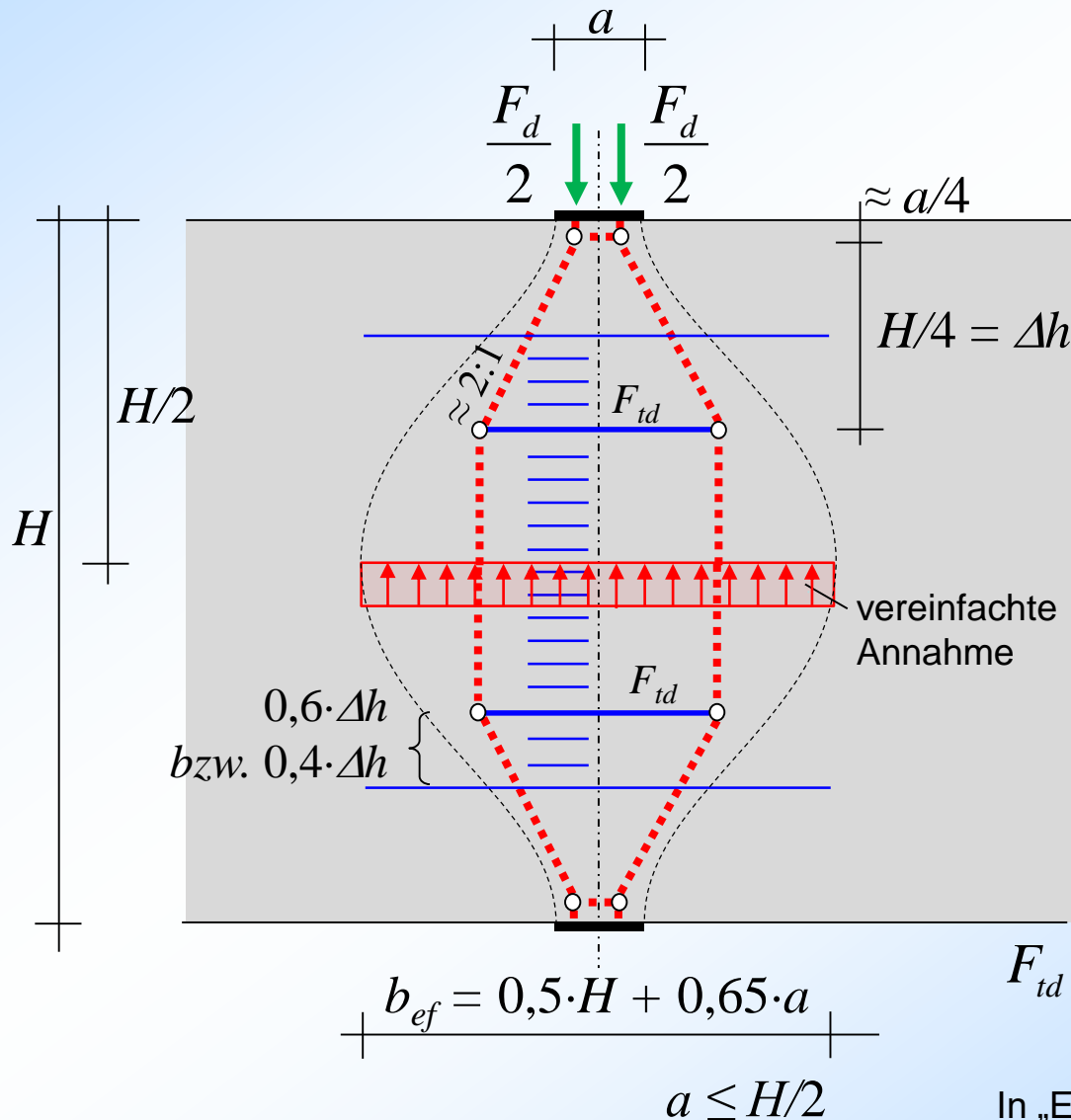


Nach Meinung des Verfassers kann eine ggf. flächig vorhandene Bewehrung auf je  $0,6 \cdot \Delta h$  angerechnet werden. Eine Zulagebew. sollte sich auf je  $0,4 \cdot \Delta h$  konzentrieren.

$$F_{td} = \frac{F_d}{4} \cdot \left( 1 - \frac{a}{b} \right)$$

vgl. EC2, Glg. 6.58

# Stabwerkmodelle

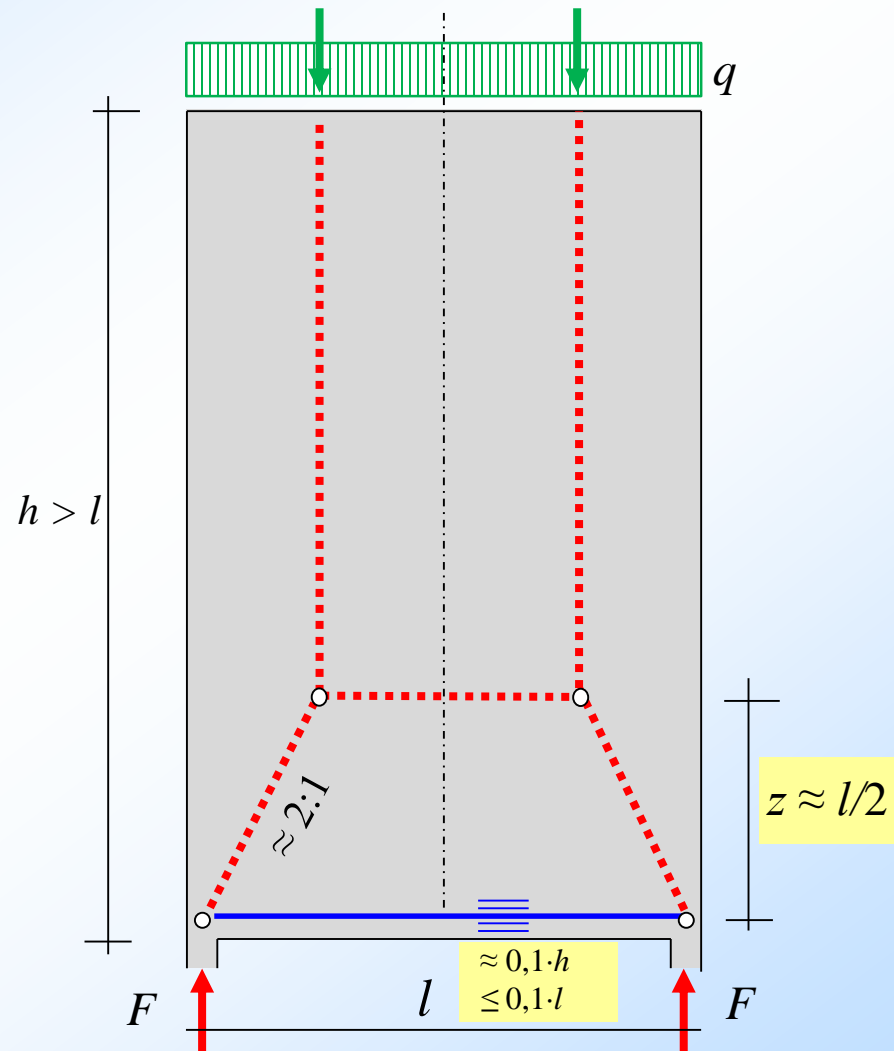
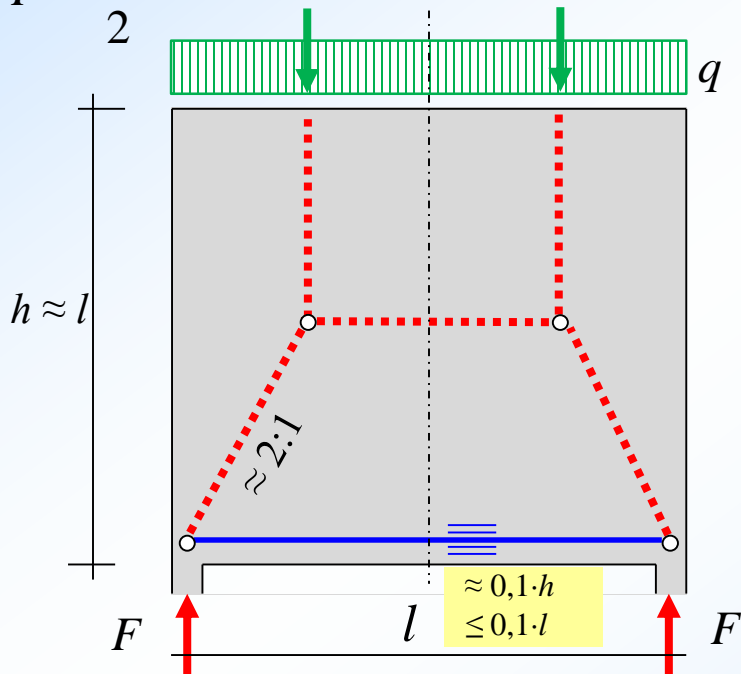
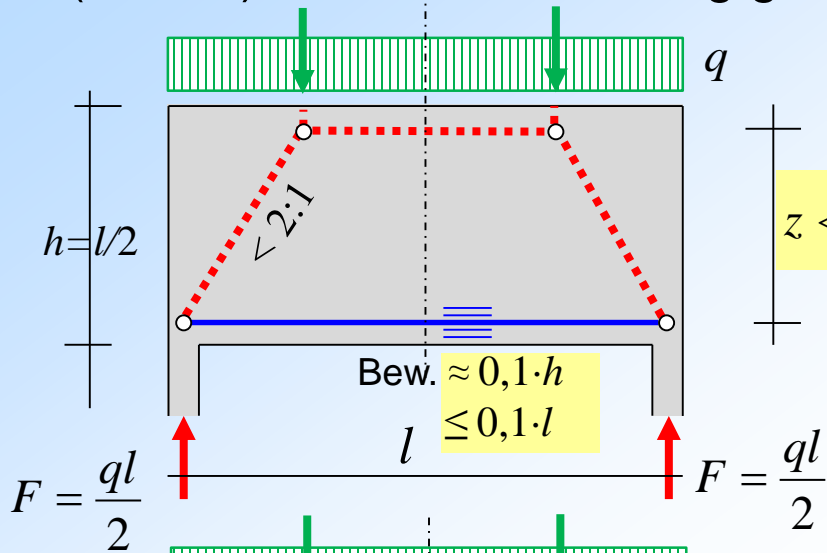


vgl. EC2, Glg. 6.59

$$F_{td} = \frac{F_d}{4} \cdot \left( 1 - 0,7 \cdot \frac{a}{H} \right)$$

In „EC2 digital“ ist das kleine h ein Druckfehler!

(Wand-)Scheiben, beidseitig gelenkig



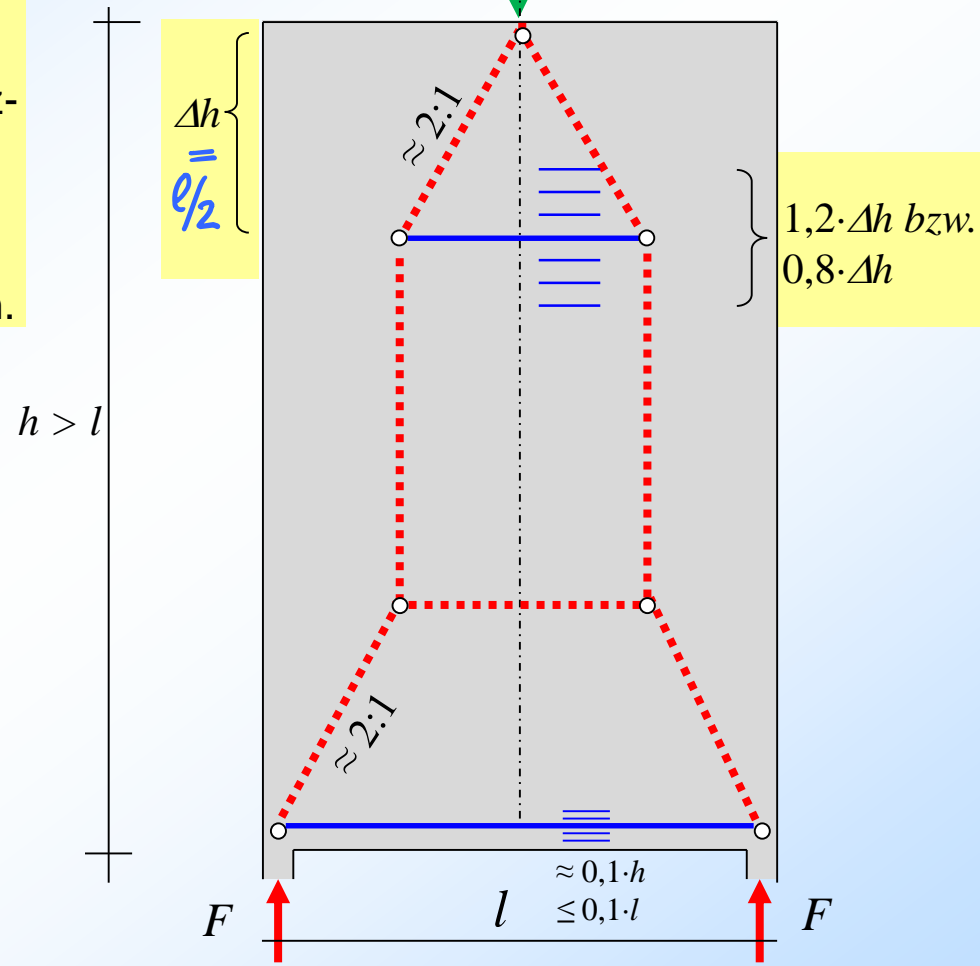
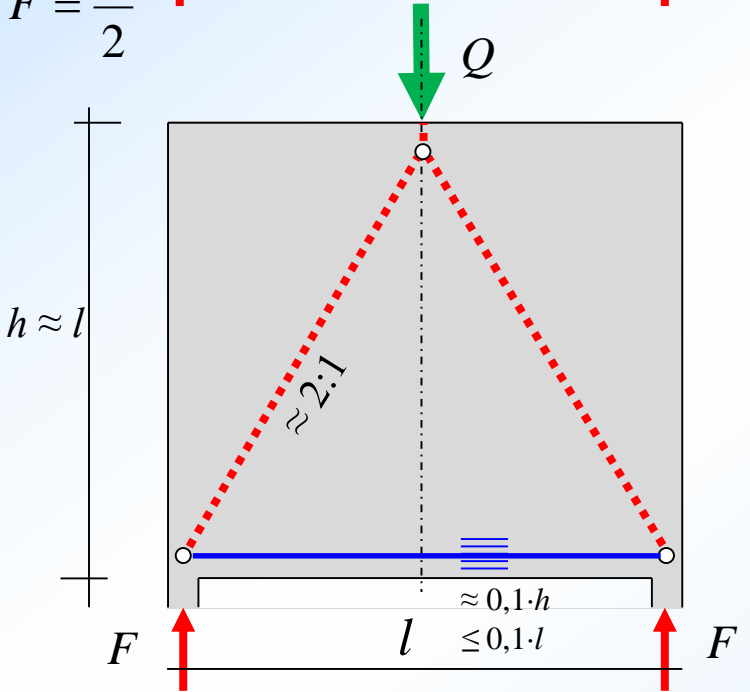
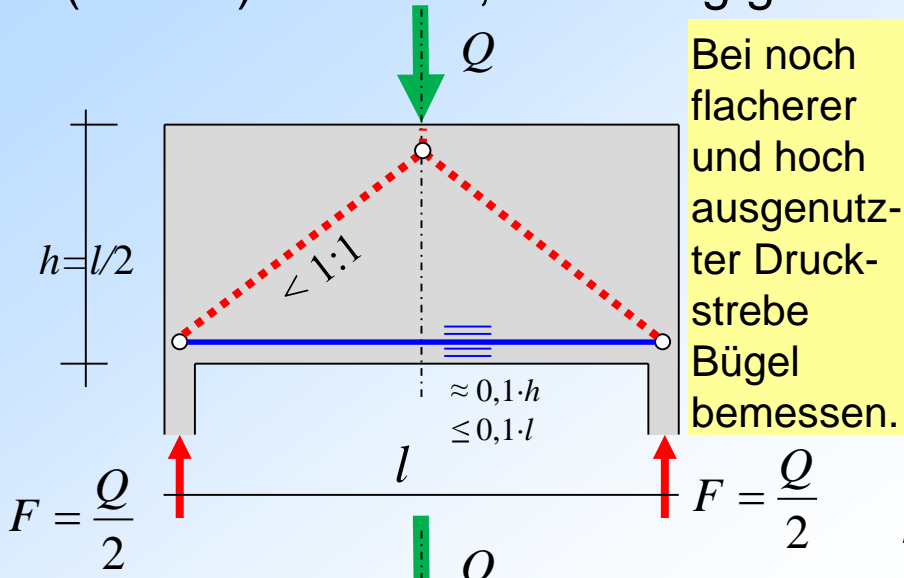
Empfehlung: auf  $0,2 \cdot h \leq 0,2 \cdot l$  mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr})}{3,6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.



(Wand-)Scheiben, beidseitig gelenkig

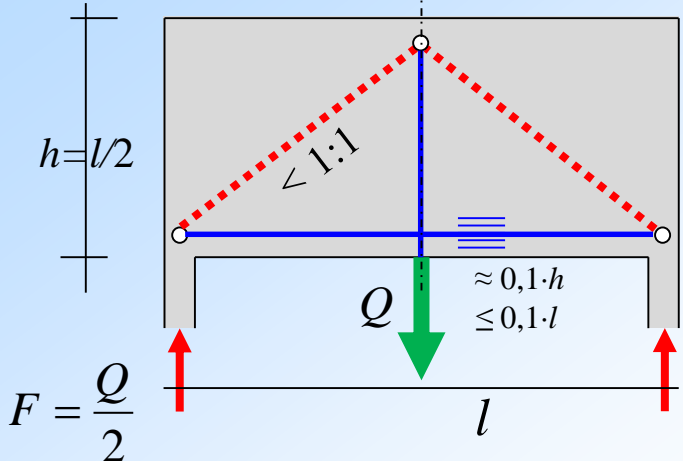


Empfehlung: auf  $0,2 \cdot h \leq 0,2 \cdot l$  mind. Risskraft abdecken mit

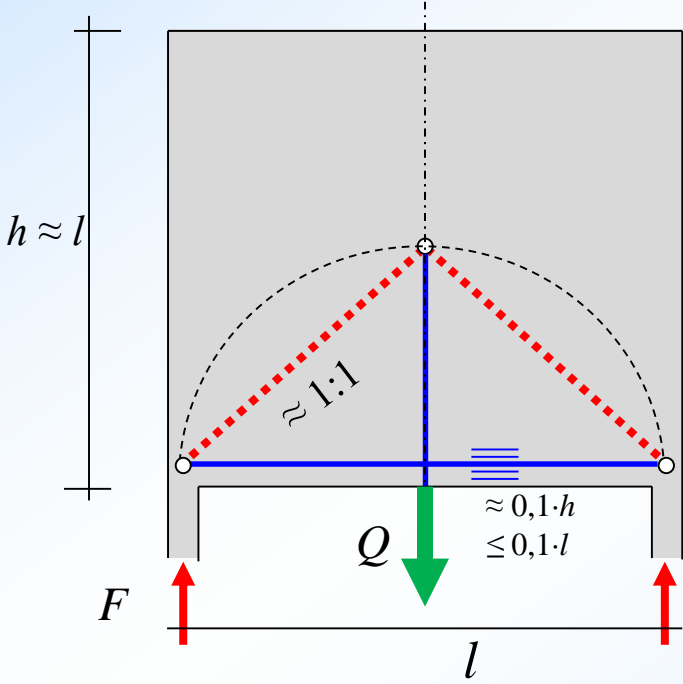
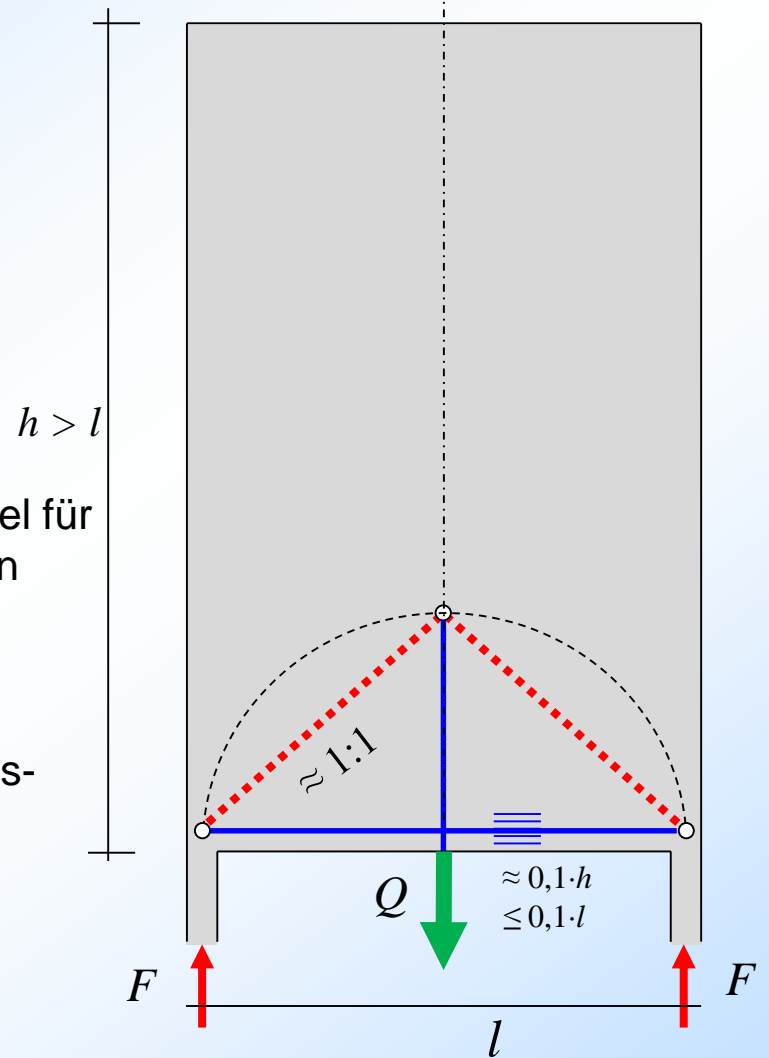
$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr})}{3,6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.

(Wand-)Scheiben, beidseitig gelenkig



ggf. weitere Bügel (s.o.)



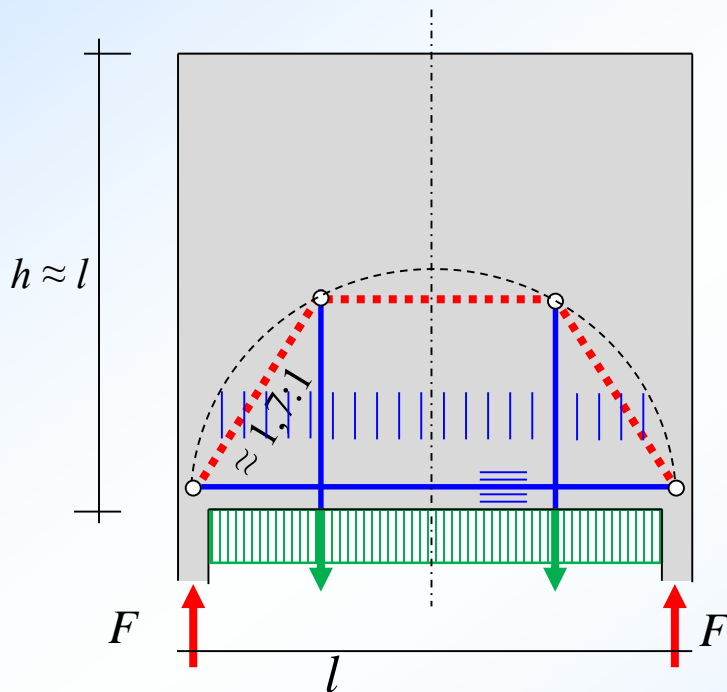
Halbkreisregel für außermittigen Lastangriff beachten, zusätzlich Verankerungslänge

Empfehlung: auf  $0,2 \cdot h \leq 0,2 \cdot l$  mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr})}{3,6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.

## (Wand-)Scheiben, beidseitig gelenkig



Empfehlung: auf  $0,2 \cdot h \leq 0,2 \cdot l$  mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr})}{3,6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}} \quad \text{für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.}$$

Halbkreisregel beachten,  
zusätzlich Verankerungslänge

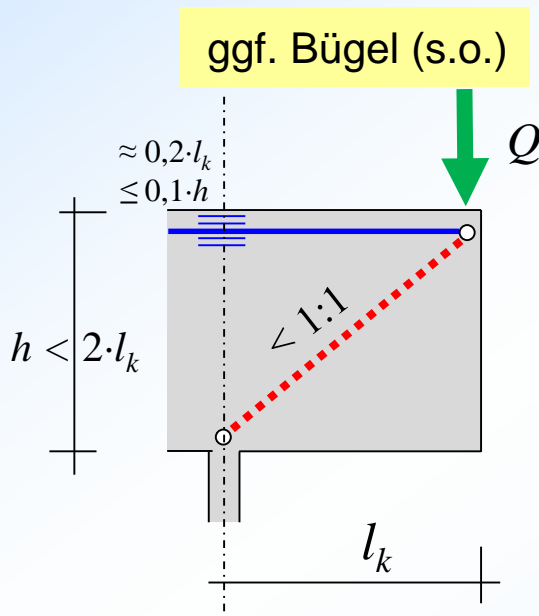
Auch im Halbkreis angeordnete  
Lasten müssen hochgehungen  
und oberhalb des Halbkreises  
verankert werden.

## Auskragende (Wand-)Scheiben

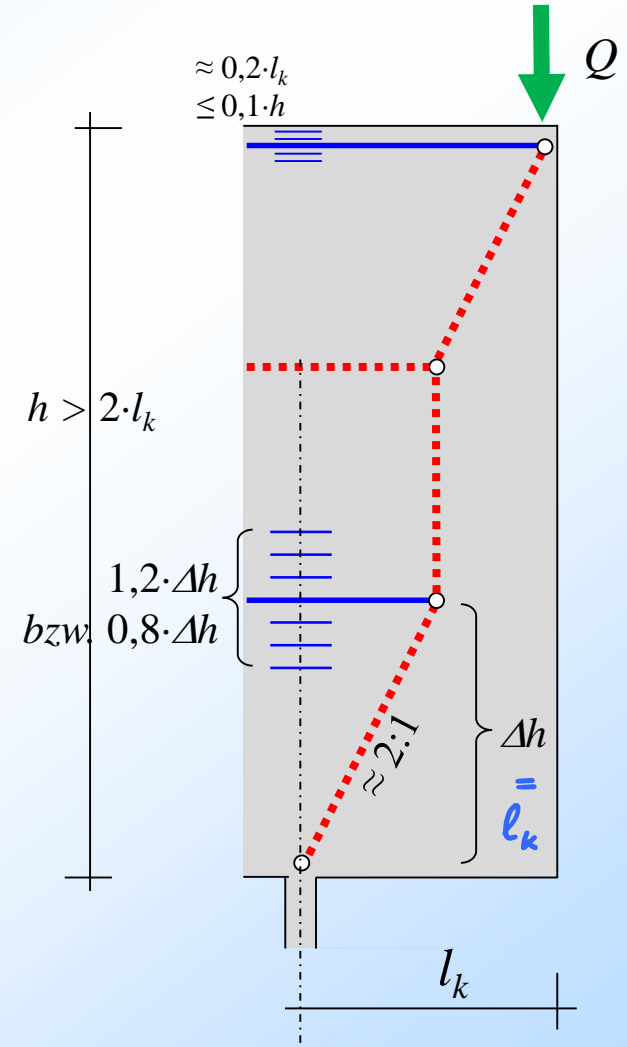
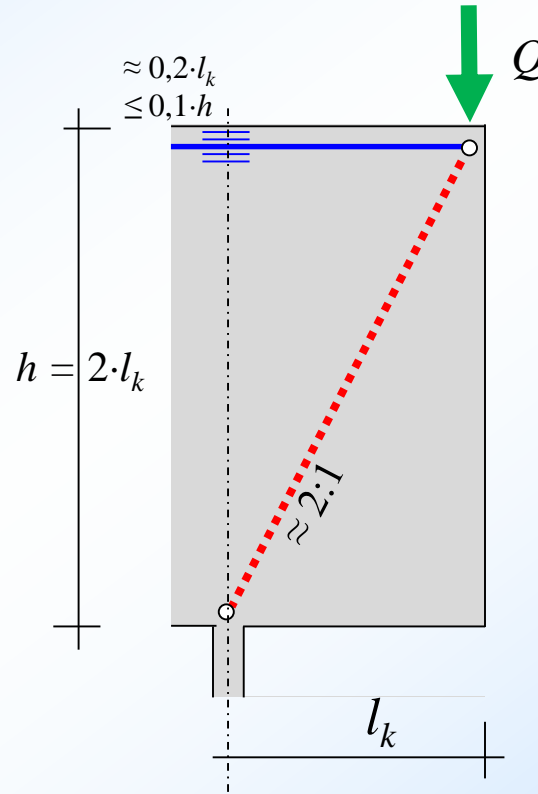
Empfehlung: auf  $0,4 \cdot l_k \leq 0,2 \cdot h$  mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr})}{3,6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.



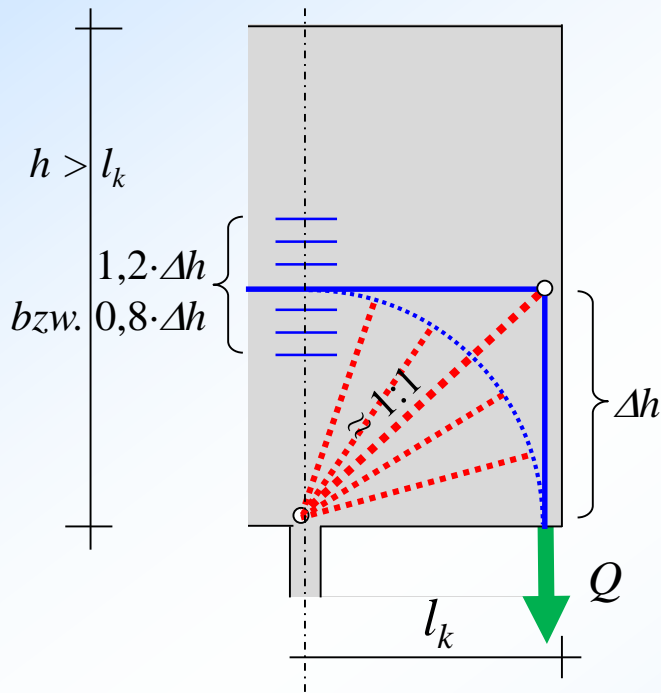
wie Konsole



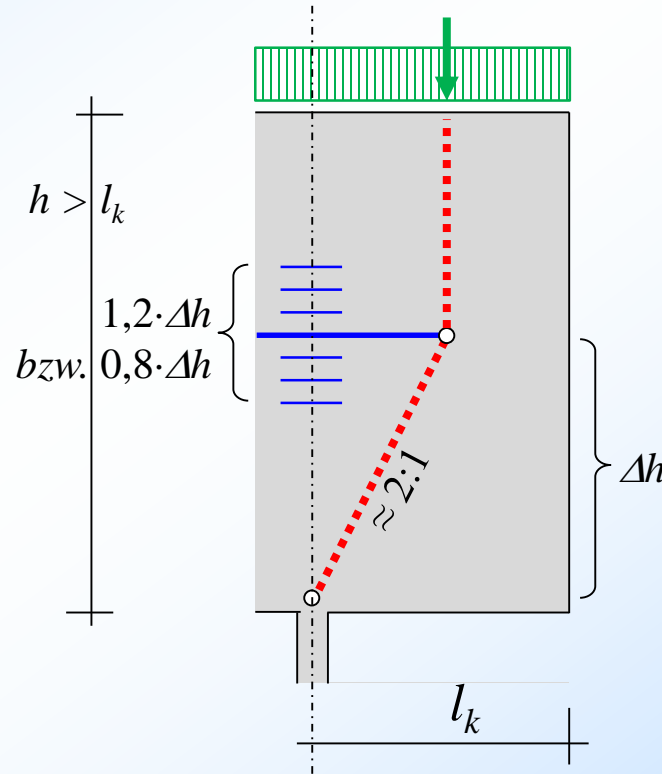
wie hohe Konsole

## Auskragende (Wand-)Scheiben

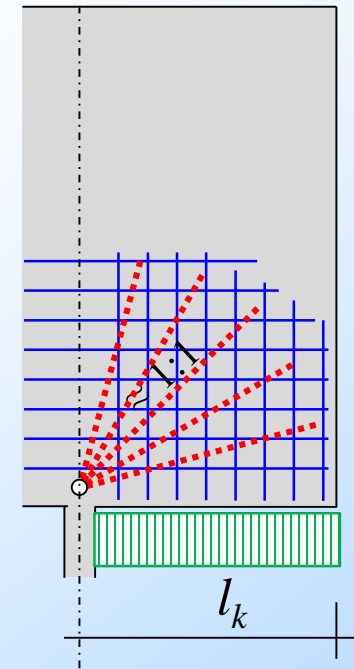
unten angehängte  
Einzellast



unter Gleichlast



unten angehängte  
Gleichlast



optimale Bew.führung:  
viele Viertelkreise

## Bemessung und Konstruktion Wandartiger Träger (Scheiben), EC2, 9.7

- Def. Wandartiger Träger, EC2, 5.3.1 (3):  $l < 3 \cdot h$
- Mindestdicke nach Tab. NA 9.3: <sup>10</sup> *(durchlaufende Bauteile)*  
12 cm für stat. best. Systeme, ~~12~~ cm für stat. unbest. Systeme
- Mindestbew.: 0,075% von  $A_c$  je Richtung und Seite, mind. 1,5 cm<sup>2</sup>/m
- Stababstand  $<$  2fache Wanddicke, höchstens 30 cm

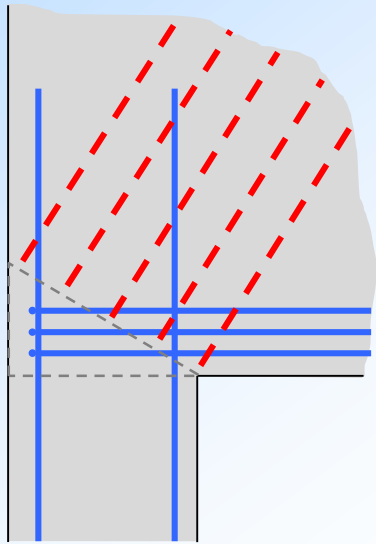
Die Kippgefahr ist zu beachten, wenn Druckränder nicht durch z.B. Decken seitlich gehalten sind.

Nachweise: Knotennachweise an Auflagern oder an Einleitungsstellen konzentrierter Kräfte. Eine Bemessung für Querkräfte ist nicht erforderlich.



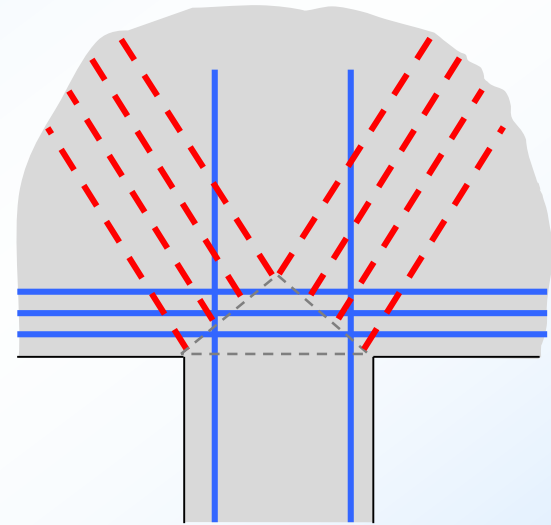
## Auflagerknoten

Druck-Zug-Knoten  $\rightarrow 0,75 \cdot f_{cd}$



$$N_{Ed} \leq A_c \cdot 0,75 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}$$

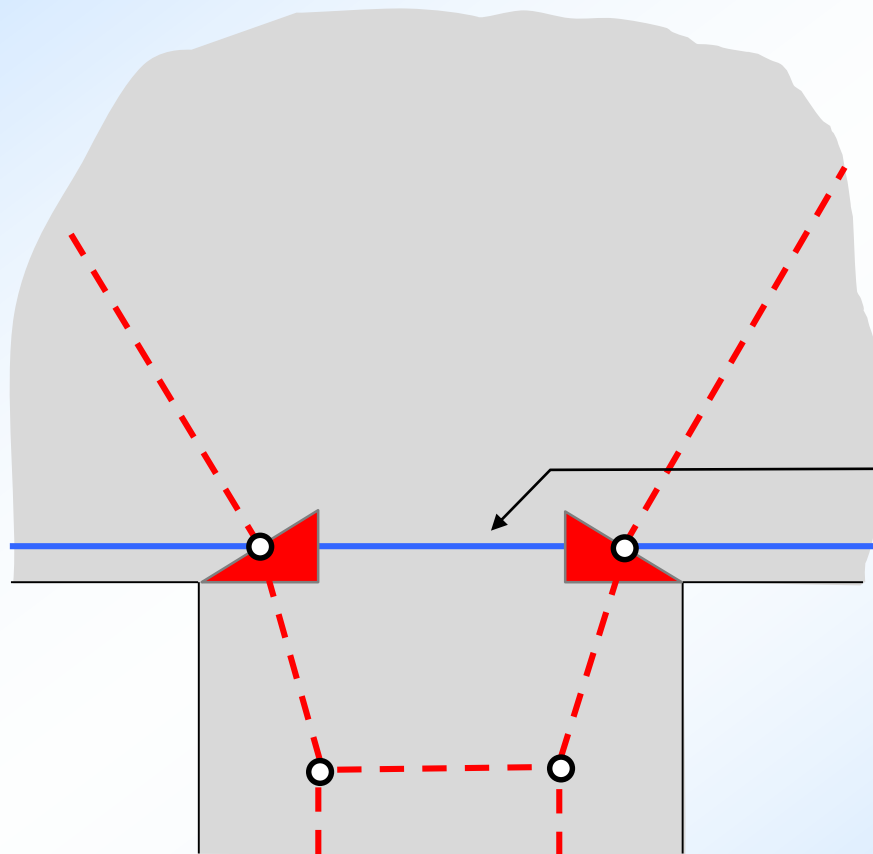
reiner Druckknoten  $\rightarrow 1,0 \cdot f_{cd}$



$$N_{Ed} = A_c \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}$$

bei starker Bew. der Stütze  
und/oder des horiz. Zugbandes  
Abminderung auf  $0,9 \cdot f_{cd}$  empfohlen

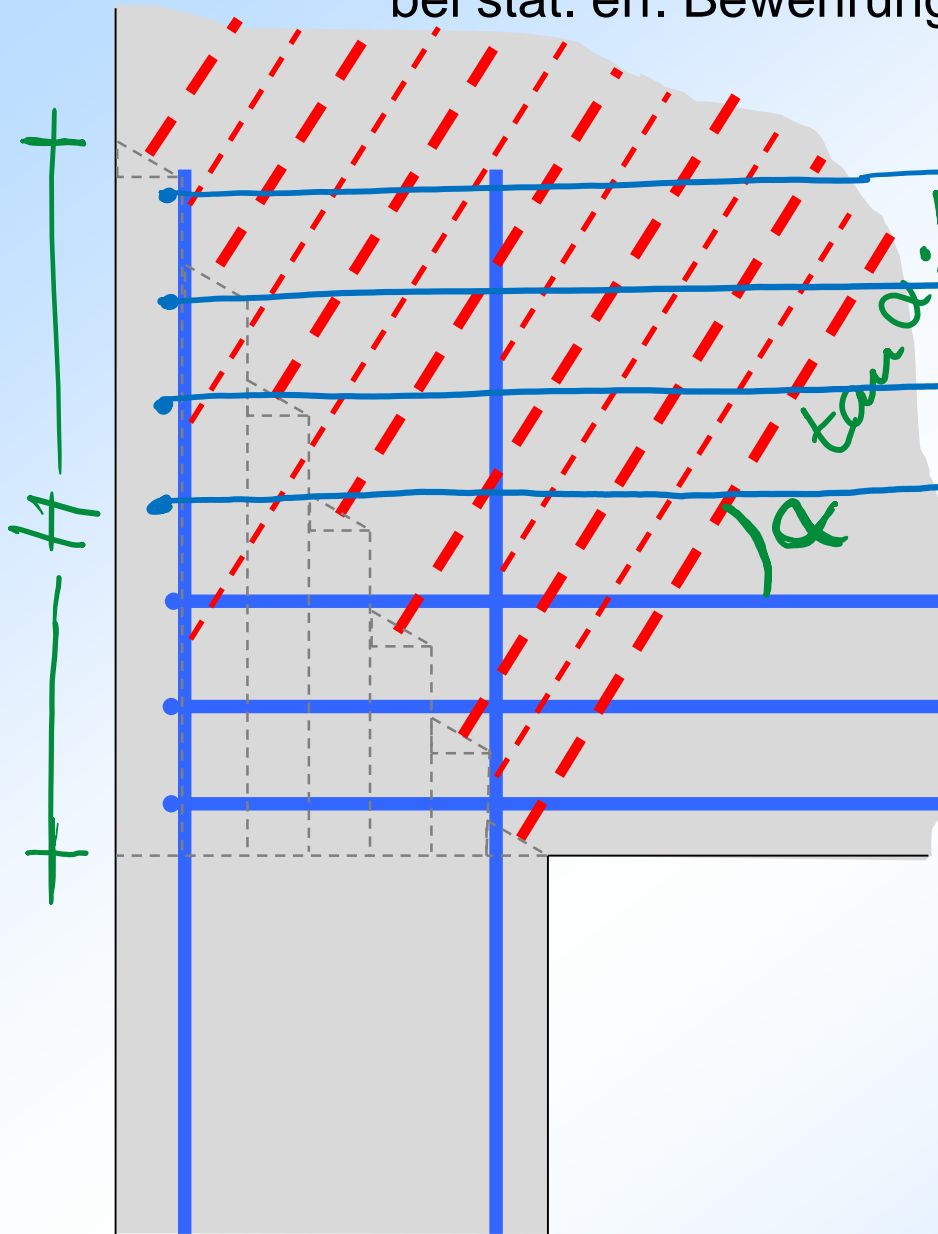
Bei breiten Auflagern ist eine Anpassung der Stabwerksgeometrie entsprechend der Kontenausbildung möglich



möglich ist auch ein Druckstab, Bew. auf jeden Fall durchlaufen lassen!

# Stabwerkmodelle

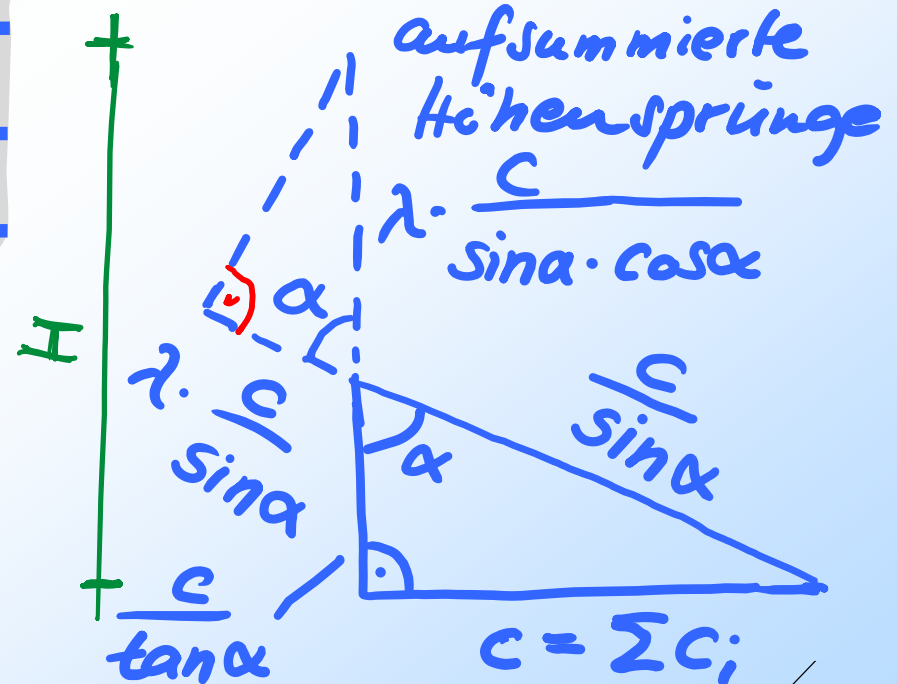
bei stat. erf. Bewehrung in der Stütze muss der Druckknoten differenzierter betrachtet werden.



*horiz. Steckbügel zur Kraftumlenkung*

Ein Teil der Druckkräfte muss auch in die Bew. eingeleitet werden, dadurch muss die Knotenhöhe etwa der Verankerungslänge (Krafteinl.länge) entsprechen.

Die horiz. Komponenten der Druckkräfte müssen aus Gleichgewichtsgründen in die Wandscheibe zurückgehangen werden.



erf. Gesamthöhe  $H = \frac{c}{\tan \alpha} + \frac{\lambda \cdot c}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

für 2:1  $H = \left( \frac{1}{2} + 25 \cdot \lambda \right) \cdot c$

für 1:1  $H = \left( \frac{1}{1} + 20 \cdot \lambda \right) \cdot c$

mind. jedoch  $H = \frac{c}{\tan \alpha} + \text{Verankerungslänge der vert. Bew.}$

$\lambda$ : Proz. Kraftanteil, der nicht über den Beton allein abgetragen werden kann.  
(der Anteil, der in Bew. eingeleitet werden muss)

Bei angehängten  
Einzellasten:

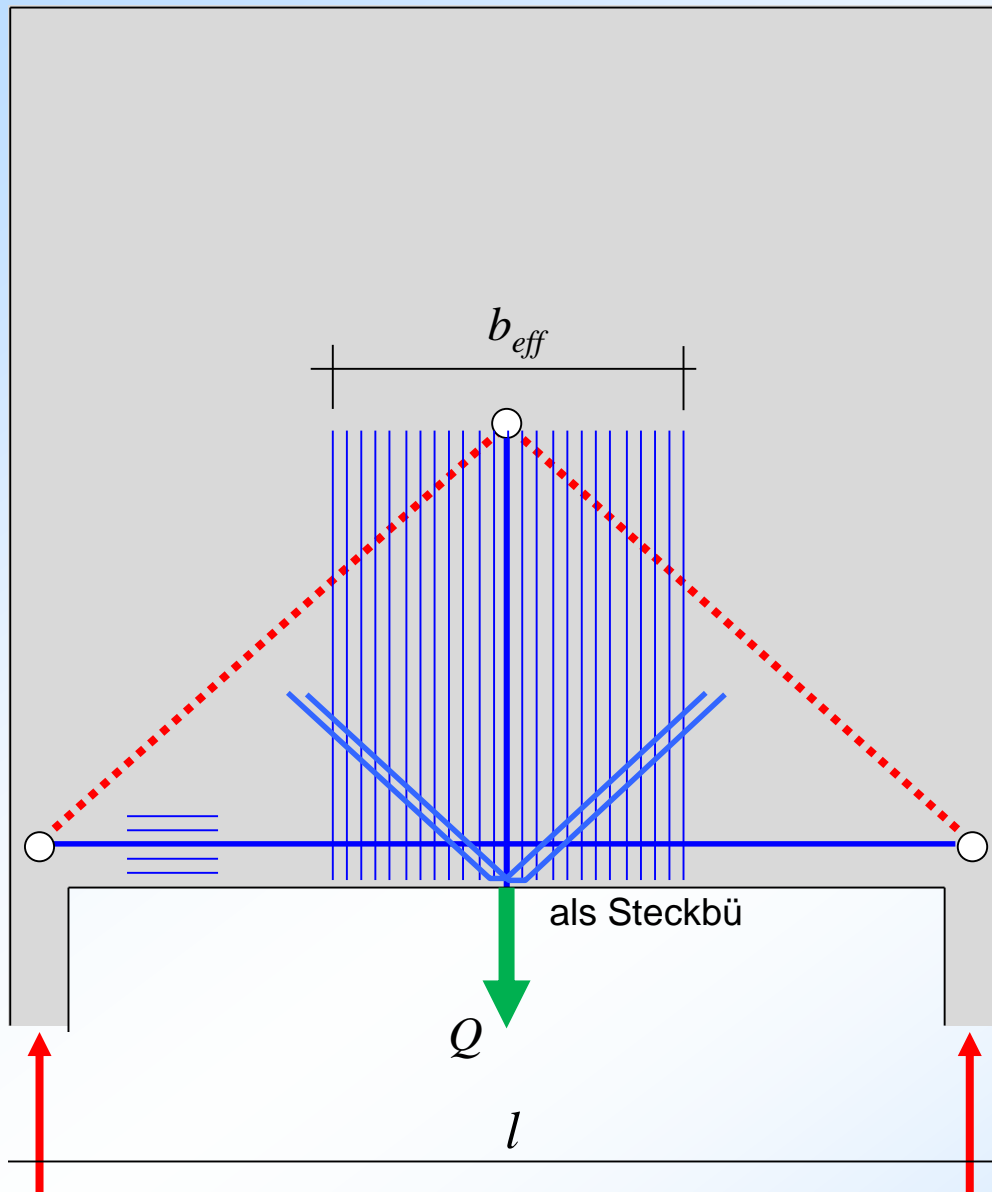
$$b_{eff} = \frac{Q_k}{f_{ctm} \cdot t}$$

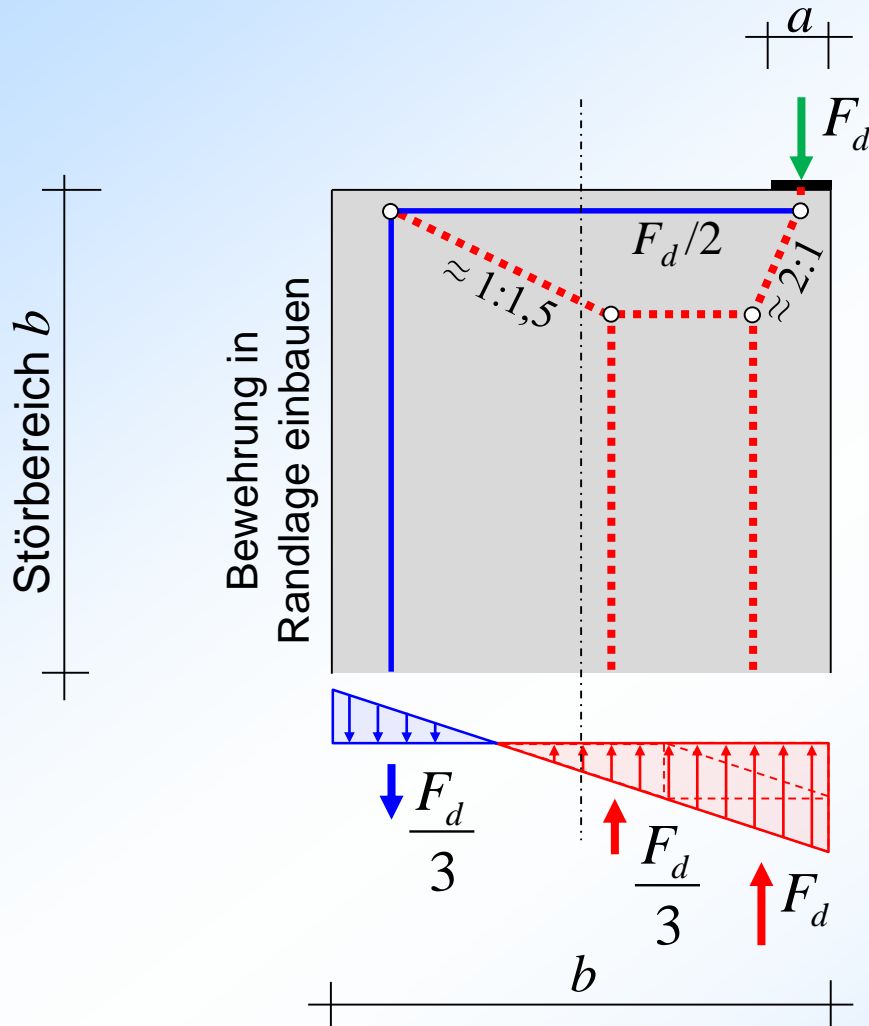
$t$ : Wanddicke

Zusätzlich sollte auf  $b_{eff}$  eine Bewehrung für die Abdeckung der Risskraft angeordnet werden.

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr})}{3,6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

Für  $F_{s,cr}$  ist  $Q_k$  einzusetzen, ggf. Formel für dicke Bauteile verwenden. Auch Schrägstahlzulagen sind zu empfehlen.

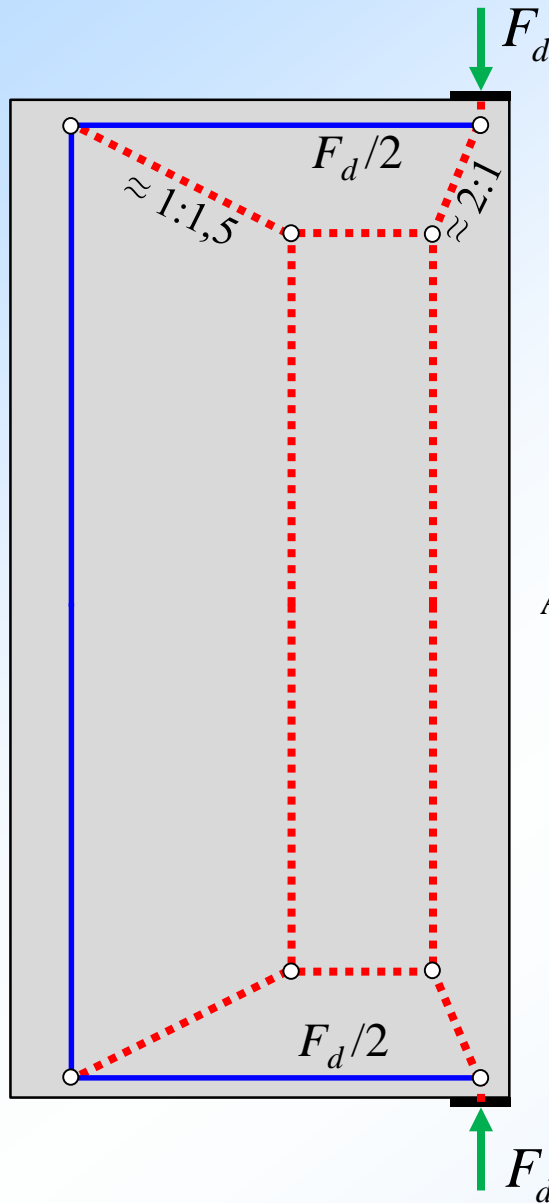




Bewehrung auf der sicheren Seite für Steigung von 2:1 auslegen (in der Lit. häufig mit 3:1 angegeben)

Kräfteangaben für  $a = 0$

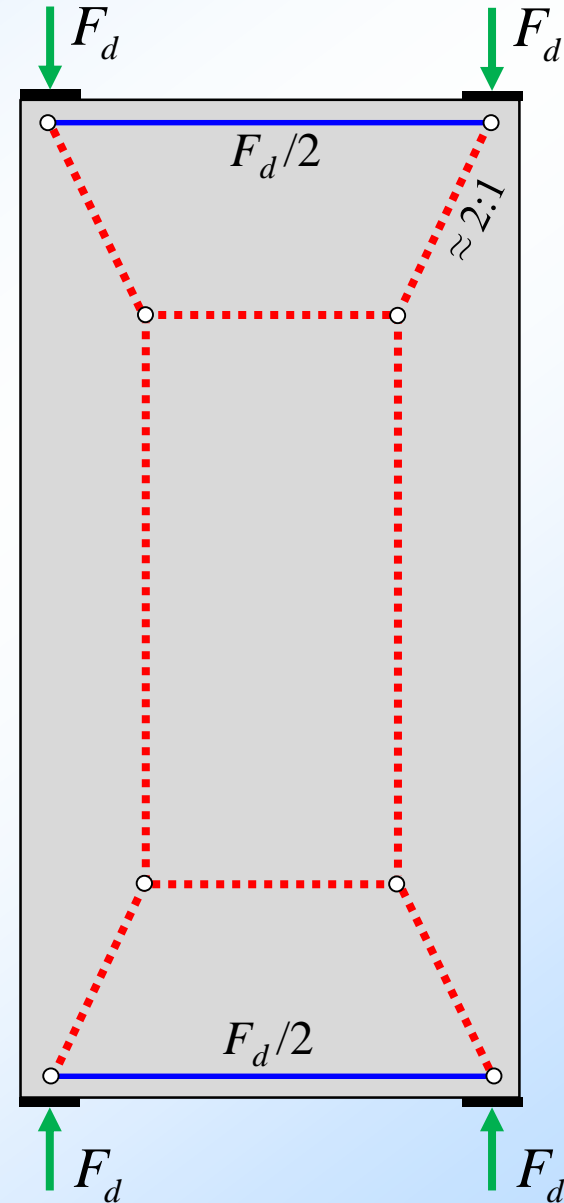




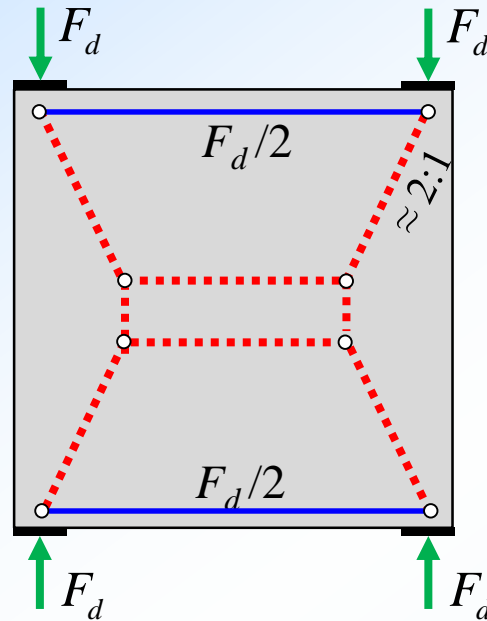
Empfehlung: auf  
 $0,1 \cdot l \leq 0,1 \cdot h$   
 mind. Risskraft  
 abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr})}{3,6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne  
 Bauteile, ggf. für  
 dicke B.



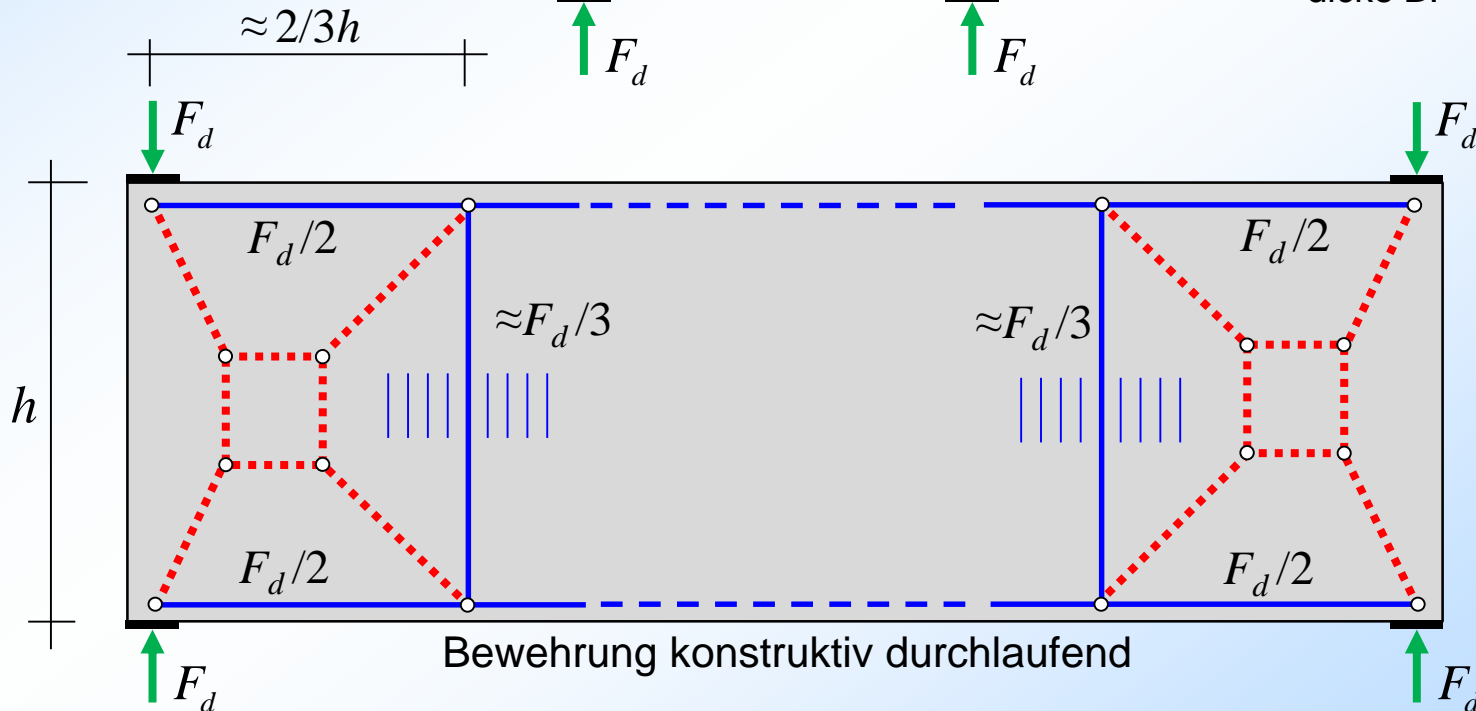
# Stabwerkmodelle



Empfehlung: auf  
 $0,1 \cdot l \leq 0,1 \cdot h$   
 mind. Risskraft  
 abdecken mit

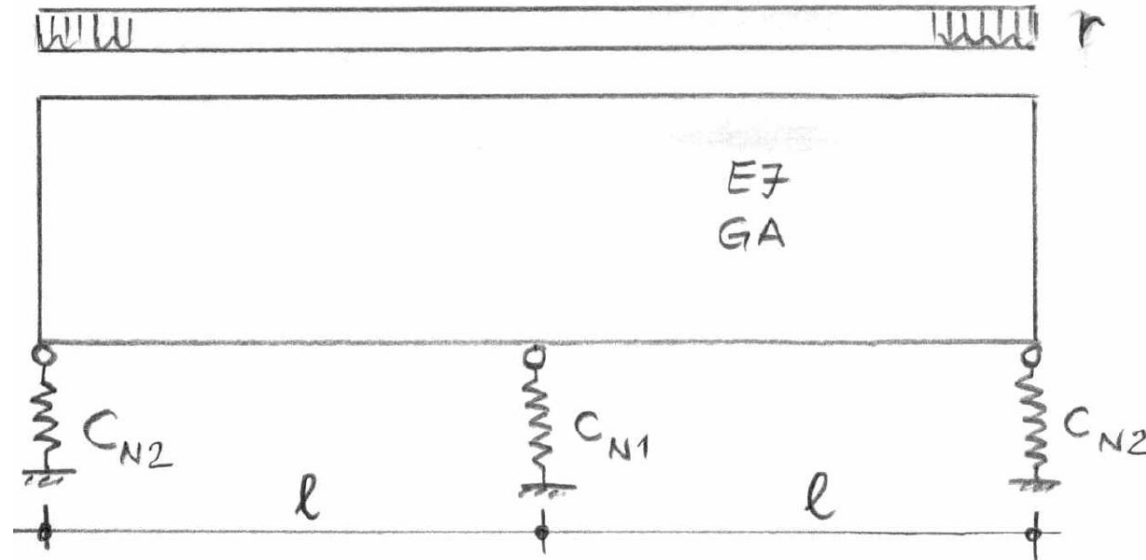
$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr})}{3,6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne  
 Bauteile, ggf. für  
 dicke B.



## Stat. unbest. wandartige Träger mit elastischer Lagerung

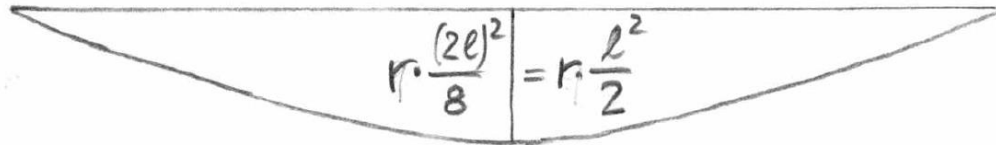
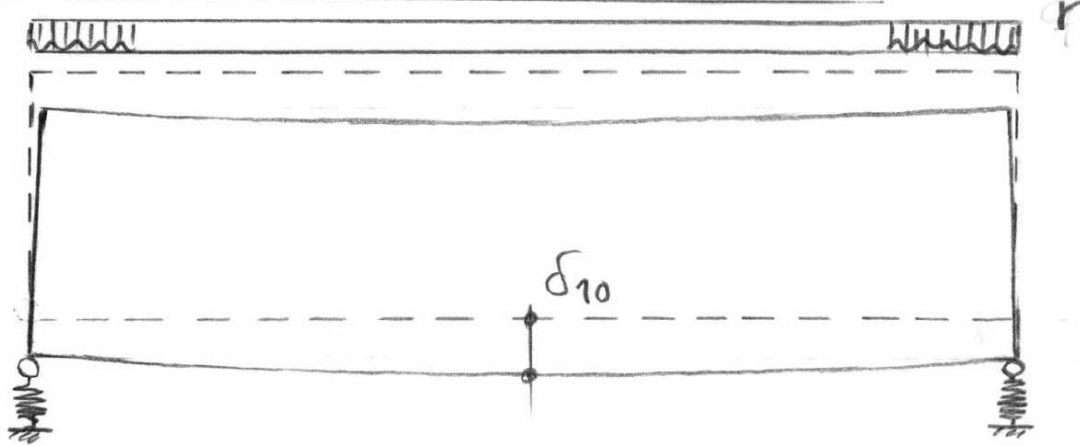
Symmetrischer Zweifeldträger als Einführungsbeispiel



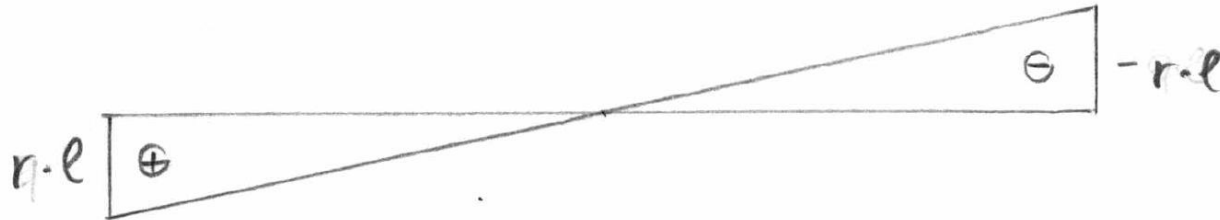
ges.: Auflagerkräfte

Es folgt eine 1fach stat. unbest. Berechnung

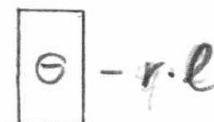
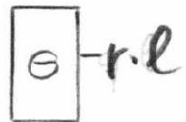
$\emptyset$ -Zustand für die Belastung  $r$



"M"

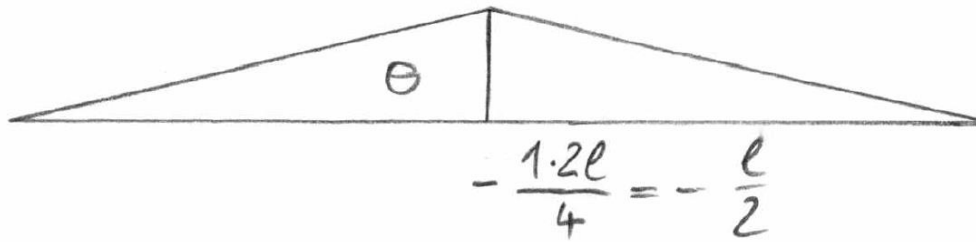
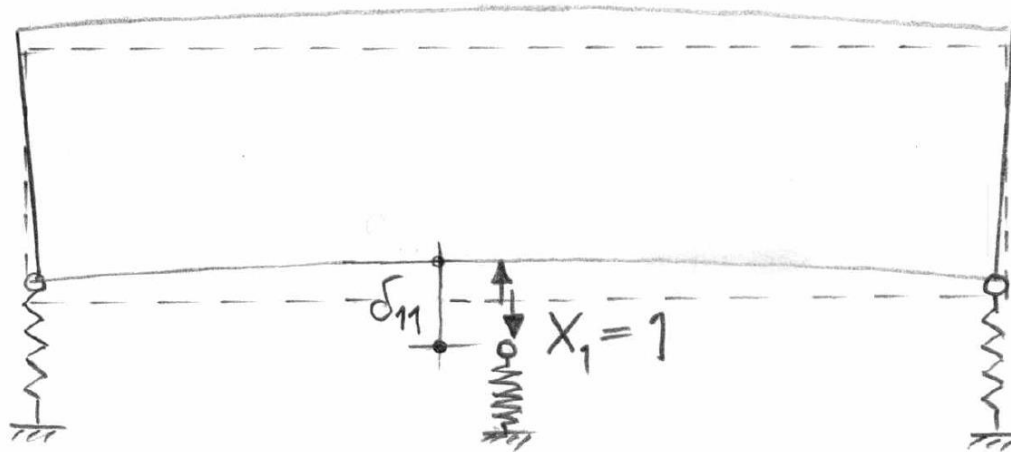


"V"

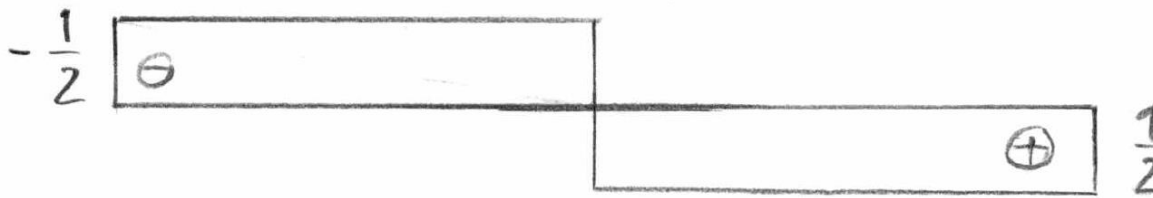


Federkräfte

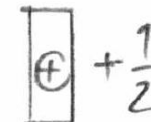
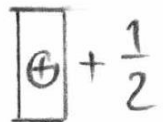
# 1-Zustand



"M"



"V"



Feder-  
kräfte

$$\overset{1}{\delta}_{ik} = \int_0^{2l} \frac{M}{EI} \cdot M^v \cdot dx + \int_0^{2l} \frac{V}{GA} \cdot V^v \cdot dx + \sum \frac{N}{C_{Ni}} \cdot N^v$$

$$\overset{1}{\delta}_{10} = -\frac{5}{12EI} \cdot r \frac{l^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot 2l - \frac{1}{2GA} \cdot r \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l - 2 \cdot \frac{1}{C_{N2}} \cdot r \cdot l \cdot \frac{1}{2} = -\left( \frac{5 \cdot l^3}{24EI} + \frac{l^2}{2GA} + \frac{1 \cdot l}{C_{N2}} \right) \cdot r \cdot l$$

$$\overset{1}{\delta}_{11} = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot 2l + \frac{1}{GA} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l + 2 \cdot \frac{1}{C_{N2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{C_{N1}} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l^3}{6EI} + \frac{l}{2GA} + \frac{1}{2 \cdot C_{N2}} + \frac{1}{C_{N1}}$$

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{\frac{5 \cdot l^3}{24EI} + \frac{l^2}{2GA} + \frac{1 \cdot l}{C_{N2}}}{\frac{l^3}{6EI} + \frac{l}{2GA} + \frac{1}{2 \cdot C_{N2}} + \frac{1}{C_{N1}}} \cdot r \cdot l$$

Sonderfall 1: schlanker Biegeträger mit starren Auflagern

↓  
Schlupfverformung  
vernachlässigbar

$$C_{N1} = C_{N2} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{\frac{5 \cdot l^3}{24EI} + 0 + 0}{\frac{l^3}{6EI} + 0 + 0} \cdot r \cdot l = \frac{5}{4} r \cdot l = \underline{\underline{+1,25 \cdot r \cdot l = B}}$$

$$\underline{\underline{A = C = 0,375 \cdot r \cdot l}}$$

Sonderfall 2: biege- und schlupfsteife Scheibe, nachgiebige Lagerung

↓  
 $EI \rightarrow \infty$

↓  
 $GA \rightarrow \infty$

hier gew.  $C_{N1} = C_{N2} = C_N$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{0 + 0 + \frac{1}{C_{N2}}}{0 + 0 + \frac{1}{2C_{N2}} + \frac{1}{C_{N1}}} \cdot r \cdot l = \frac{1}{C_N} \cdot \frac{2C_N}{3} \cdot r \cdot l = \underline{\underline{\frac{2}{3} r \cdot l = 0,667 \cdot r \cdot l = B}}$$

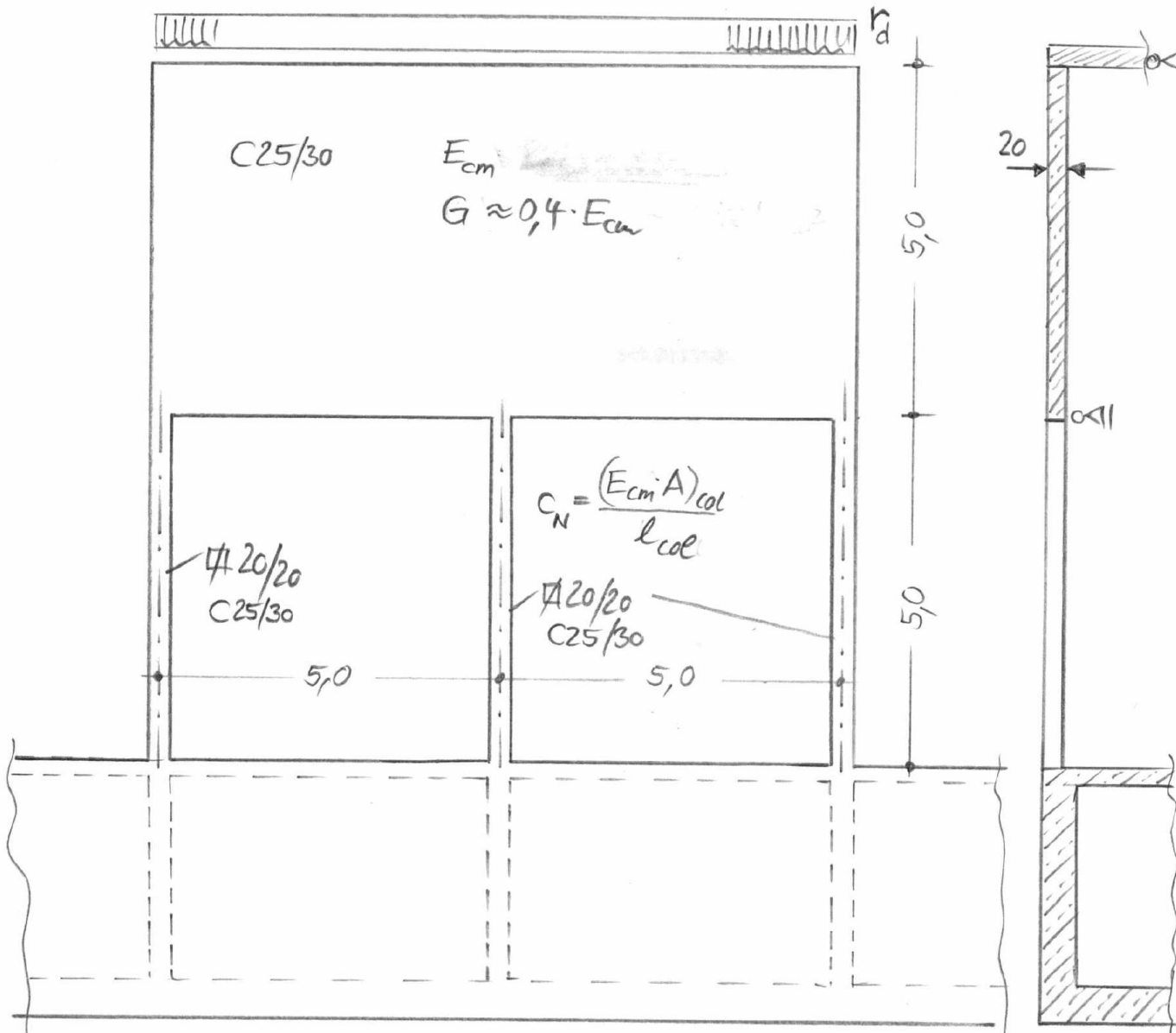
$$\underline{\underline{A = C = \frac{2}{3} r \cdot l = 0,667 \cdot r \cdot l}}$$



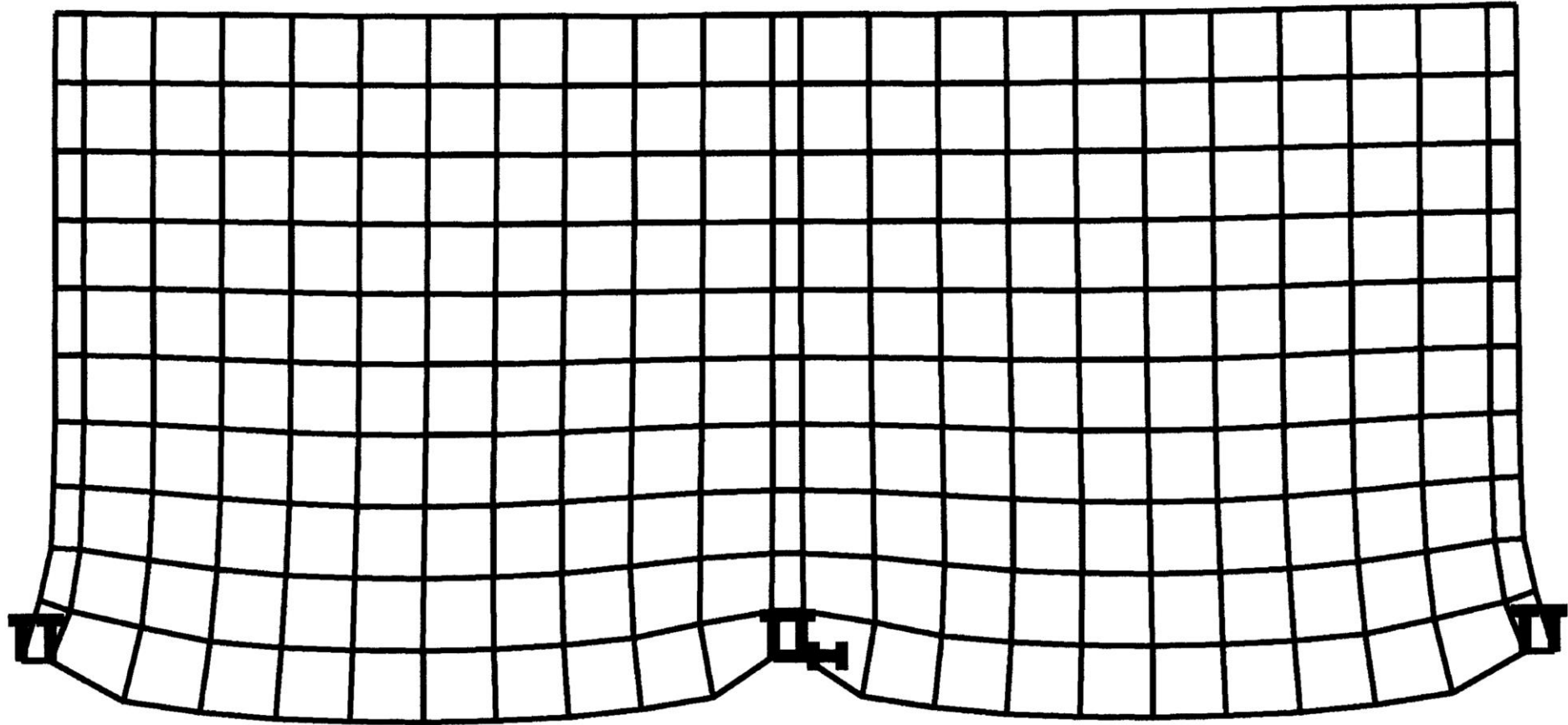
Sonderfall 2.1: wie 2, jedoch  $C_{N1} = 2 \cdot C_{N2}$   
(innen) (außen)

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= 1,0 \cdot r \cdot l \\ A = C &= 0,5 \cdot r \cdot l \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow B &= 1,0 \cdot r \cdot l \\ A = C &= 0,5 \cdot r \cdot l \end{aligned}} \right\} \text{Verteilung nach Lagersteifigkeit}$$

Beispiel: Wandartiger Träger auf 3 Stützen



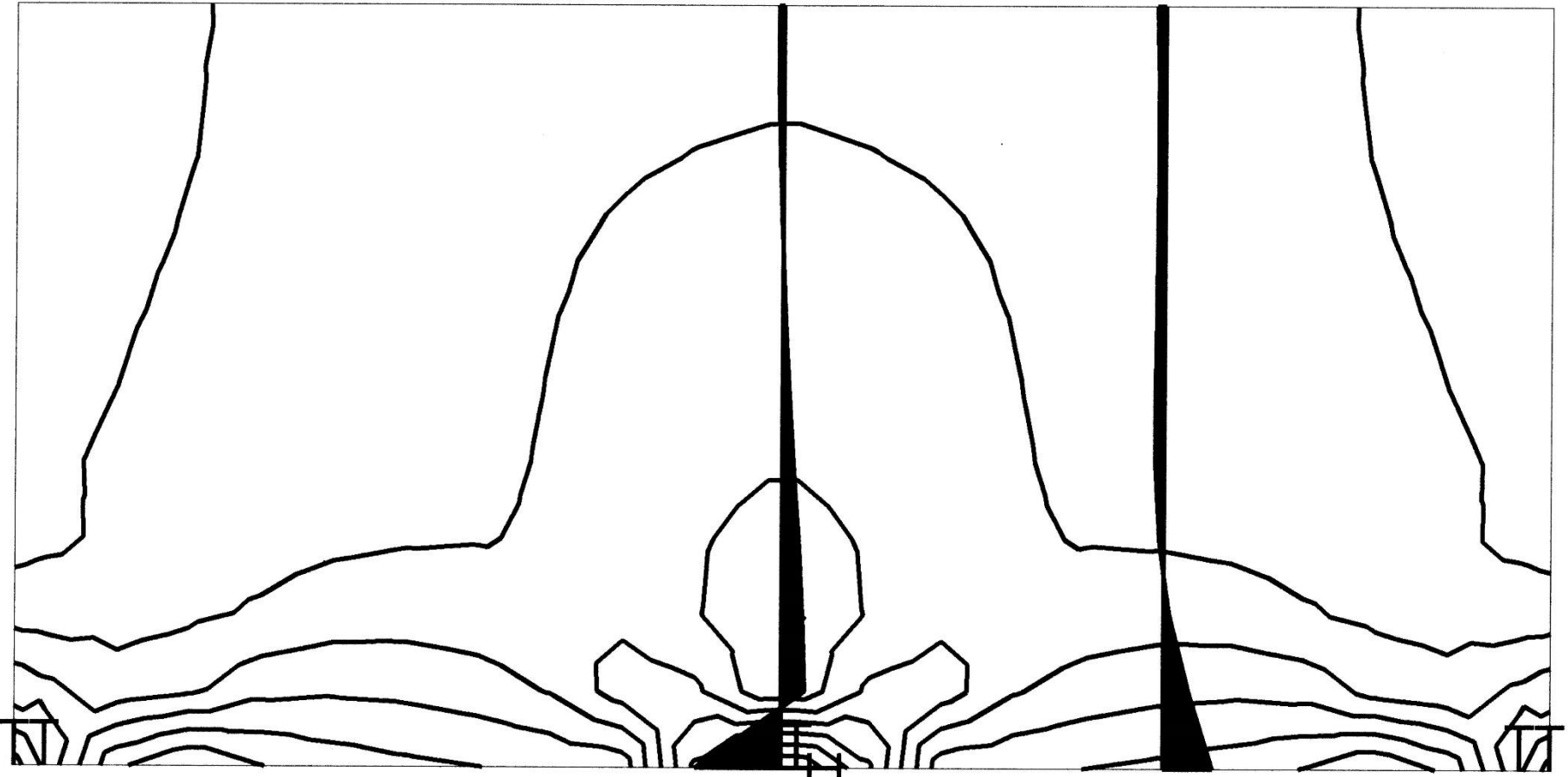
# Zweifeldrige Wandscheibe, Verformung (s. auch Folien Stabwerkmod.)



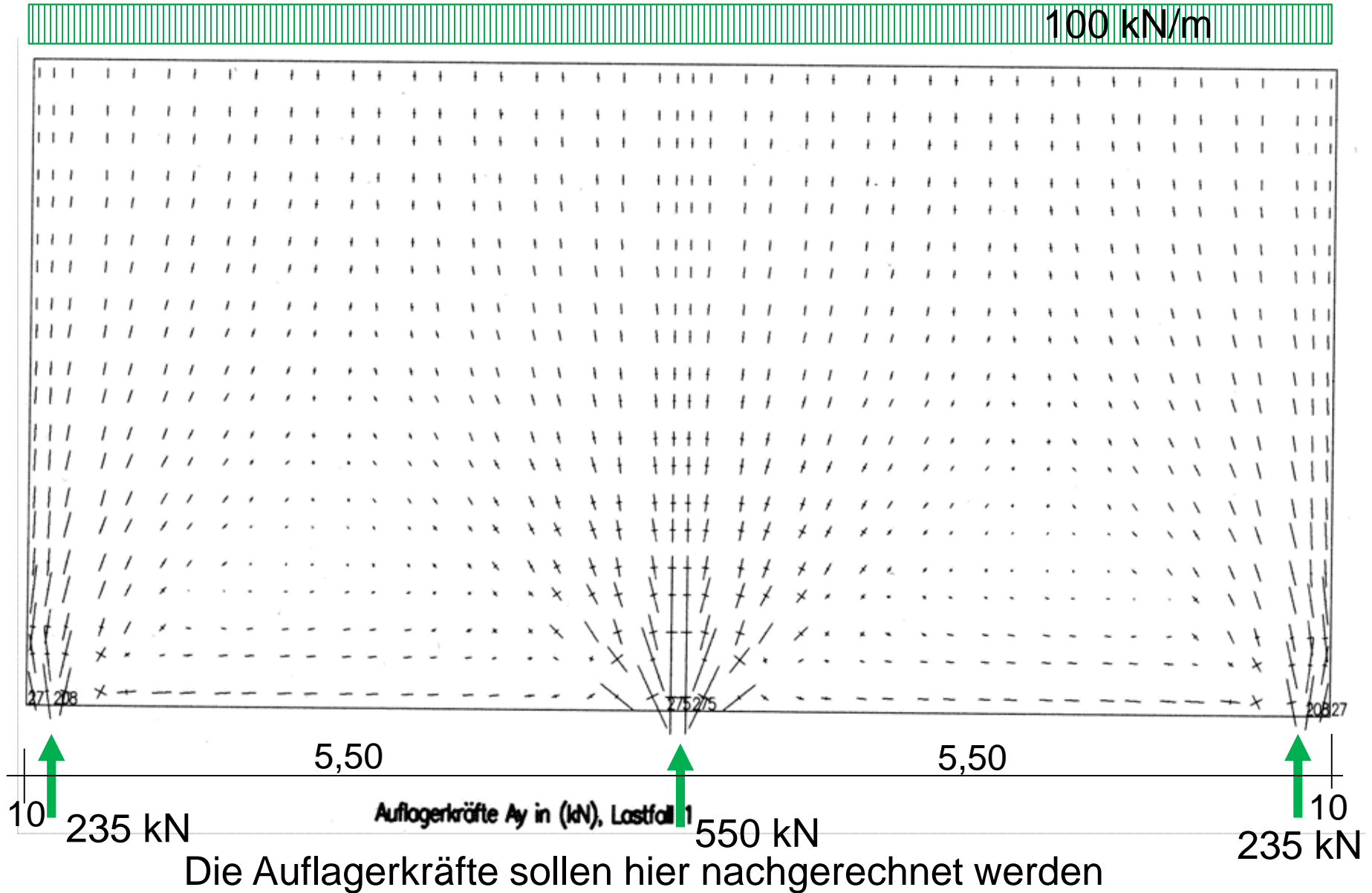
zunächst starre Lager verwendet

# Zweifeldrige Wandscheibe, Spannungen

Höhenlinie für  $\sigma_{ix}$  in (kN/m<sup>2</sup>), Lastfall 1



# Zweifeldrige Wandscheibe, Spannungen



Nachrechnung der FE-Ergebnisse für starre Lagerung:

$$EI = E \cdot 0,2 \cdot \frac{5^3}{12} = 2,083 \cdot E$$

$$GA = 0,4 \cdot E \cdot 0,2 \cdot 5,0 = 0,4 \cdot E$$

$$X_1 = B = \frac{\frac{5}{24} \cdot \frac{5^3}{2,083E} + \frac{5}{2 \cdot 0,4E}}{\frac{4}{24} \cdot \frac{5^3}{2,083E} + \frac{5}{2 \cdot 0,4E}} \cdot r \cdot l = \frac{12,5 + 6,25}{10 + 6,25} \cdot r \cdot l$$

$$= 1,15 \cdot r \cdot l \quad \Rightarrow A = C = 0,425 \cdot r \cdot l$$

für  $r = 100 \text{ kN/m}$ :

$$B = 1,15 \cdot 100 \cdot 5 = 575 \approx 550 \text{ kN}$$

sehr gute Übereinstimmung mit  
FE-Lösung

Das gleiche Beispiel soll noch einmal mit sehr nachgiebigen Stützen berechnet werden:

$$c_{N1} = c_{N2} = c_N = E \cdot \cancel{0,2} \cdot \frac{0,2^2}{5,0} = 0,008 \cdot E \quad \Rightarrow \frac{1}{c_N} = 125 \cdot \frac{1}{E}$$

$$X_1 = B = \frac{12,5 + 6,25 + 125}{10 + 6,25 + \frac{125}{2} + 125} \cdot r \cdot l$$

$$= 0,706 \cdot r \cdot l \quad \Rightarrow A = C = 0,647 \cdot r \cdot l$$

Diese Lösung liegt sehr dicht am Sonderfall 2

Die Nachgiebigkeit der Stützen hat erheblichen Einfluss auf die Stützenkräfte (Außenstützen erhalten erheblich größere Beanspruchung) und auf die Beanspruchung des wandartigen Trägers.

➔ Eine Berechnung nach DAfStb-Heft 240 (bzw. Nachfolgeheft 631) allein ist nicht empfehlenswert



Lastfall Lagerversenkung der Mittelstütze um 5mm für das gleiche Beispiel:

$$X_1 = B = \frac{0,005}{\left(10 + 6,25 + \frac{125}{2} + 125\right) \cdot \frac{1}{31000}} = -0,761MN \quad \text{Zugkraft!}$$

$\Rightarrow A = C = 0,380MN$       zus. Druckkraft in den Außenstützen!

Geringe Stützensenkungen haben bereits erheblichen Einfluss auf die Stützenbem. und auf die Biegebem. des wandartigen Trägers.

➔ Auf der sicheren Seite liegende Grenzbetrachtungen sind sinnvoll.

## **Berechnung der Auflagerkräfte und Schnittgrößen statisch unbestimmt gelagerter Träger (Scheibentragwerke)**

Die Auflagerkräfte und damit auch die Schnittgrößen statisch unbestimmt gelagerter Scheibentragwerke sind stark abhängig vom elastischen Verhalten der Unterstützungen (Federwirkung von Unterstützungen, ggf. einschließlich Gründung). Sie verändern ihren Wert schon bei kleinen Setzungsdifferenzen erheblich.

**Vorgehensweise: Betrachtung zweier Grenzfälle** (Lös. n. H.240 bzw. 631 DAfStb liegt dazwischen)

**Grenzfall 1:** Berechnung als üblicher biegeweicher Durchlaufträger mit starren Lagern.

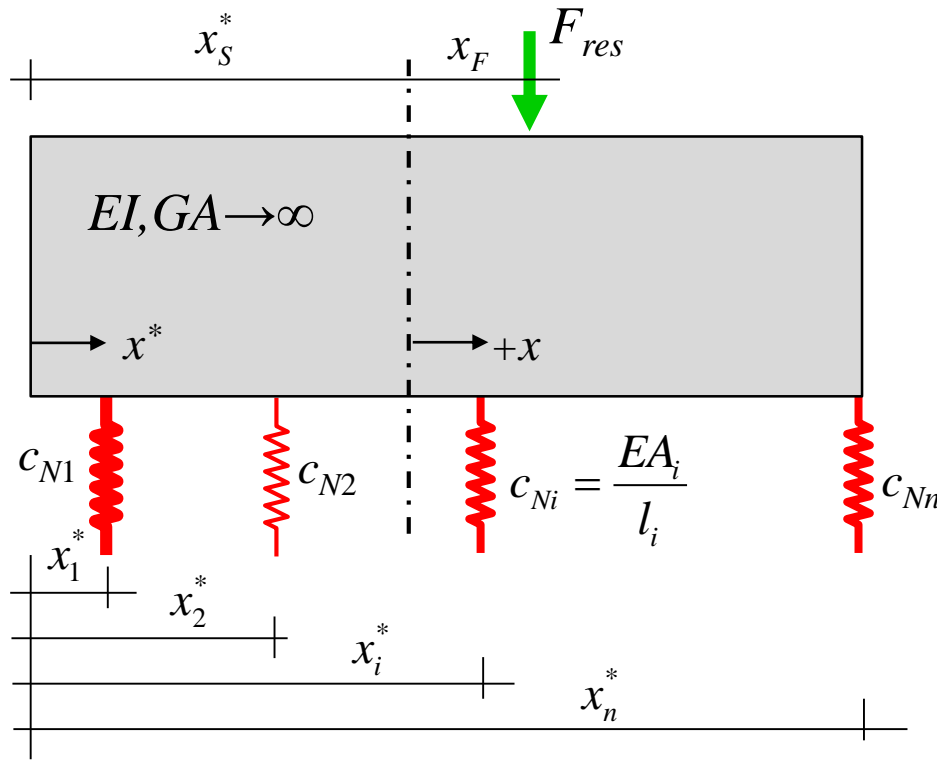
**Grenzfall 2:** Berechnung als starre Scheibe mit Berücksichtigung des elastischen Verhaltens der Unterstützungen. Die Biege- und Schubsteifigkeit spielen eine untergeordnete Rolle und können daher als unendlich steif angenommen werden.

Bei einer Bemessung für die jeweils ungünstigste Beanspruchung und konstruktiv sinnvoller Bewehrungsführung sind dann die Scheiben robust und die Unterstützungen auf der sicheren Seite bemessen.

Alternativ können auch FEM-Programme eingesetzt werden, diese sind aber nur aussagekräftig, wenn die elastischen Unterstützungen richtig berücksichtigt werden. Grenzfallbetrachtungen sind auch hier dringend anzuraten.

# Verteilung der Auflagerkräfte bei biege- und schubsteifer Scheibe

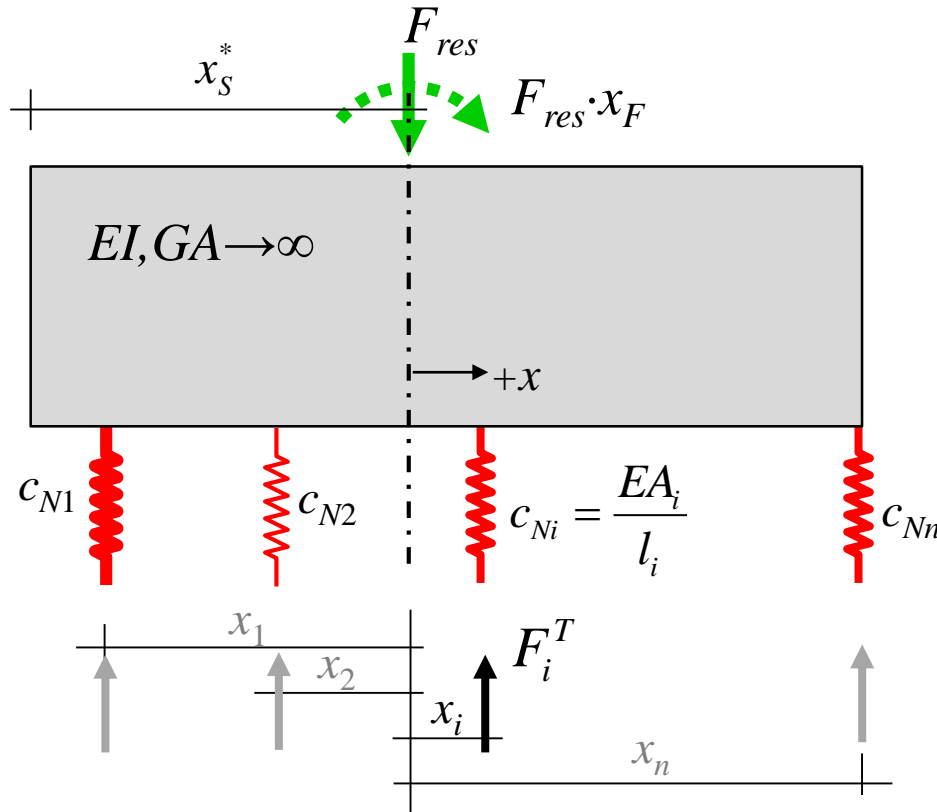
in Analogie zur Verteilung der H-Kräfte auf Wandscheiben



„Schwerpunkt der Federsteifigkeiten“:

$$x_S^* = \frac{\sum \frac{EA_i}{l_i} \cdot x_i^*}{\sum \frac{EA_i}{l_i}}$$

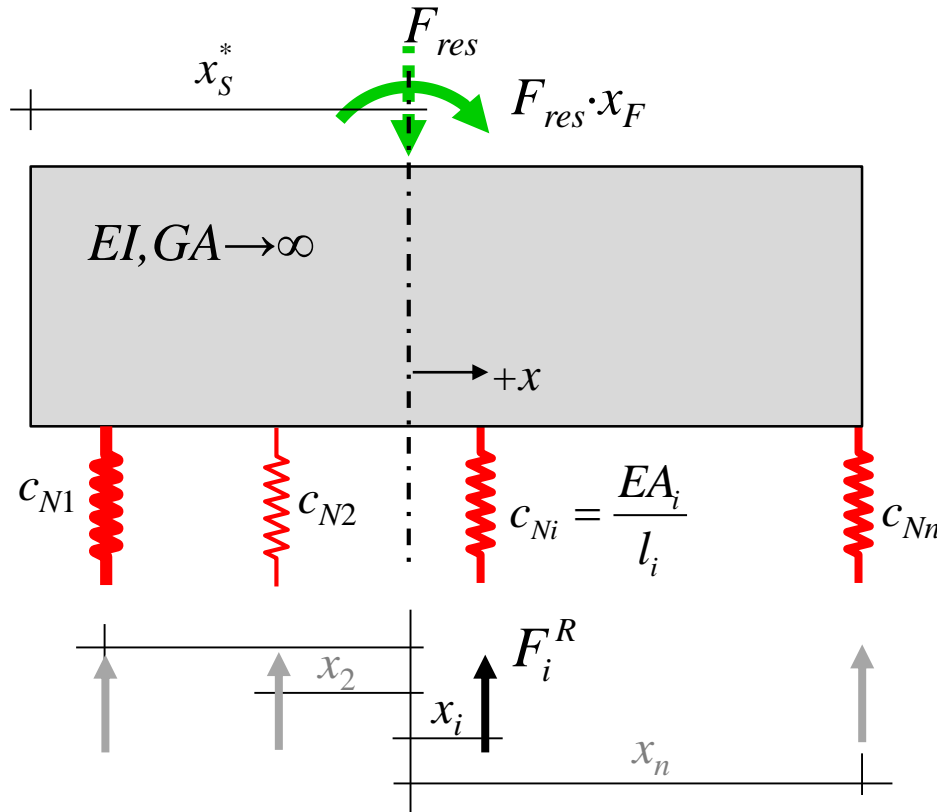
# Verteilung der Auflagerkräfte bei biege- und schubsteifer Scheibe



Translationsanteile:

$$F_i^T = \frac{\frac{EA_i}{l_i}}{\sum \frac{EA_i}{l_i}} \cdot F_{res}$$

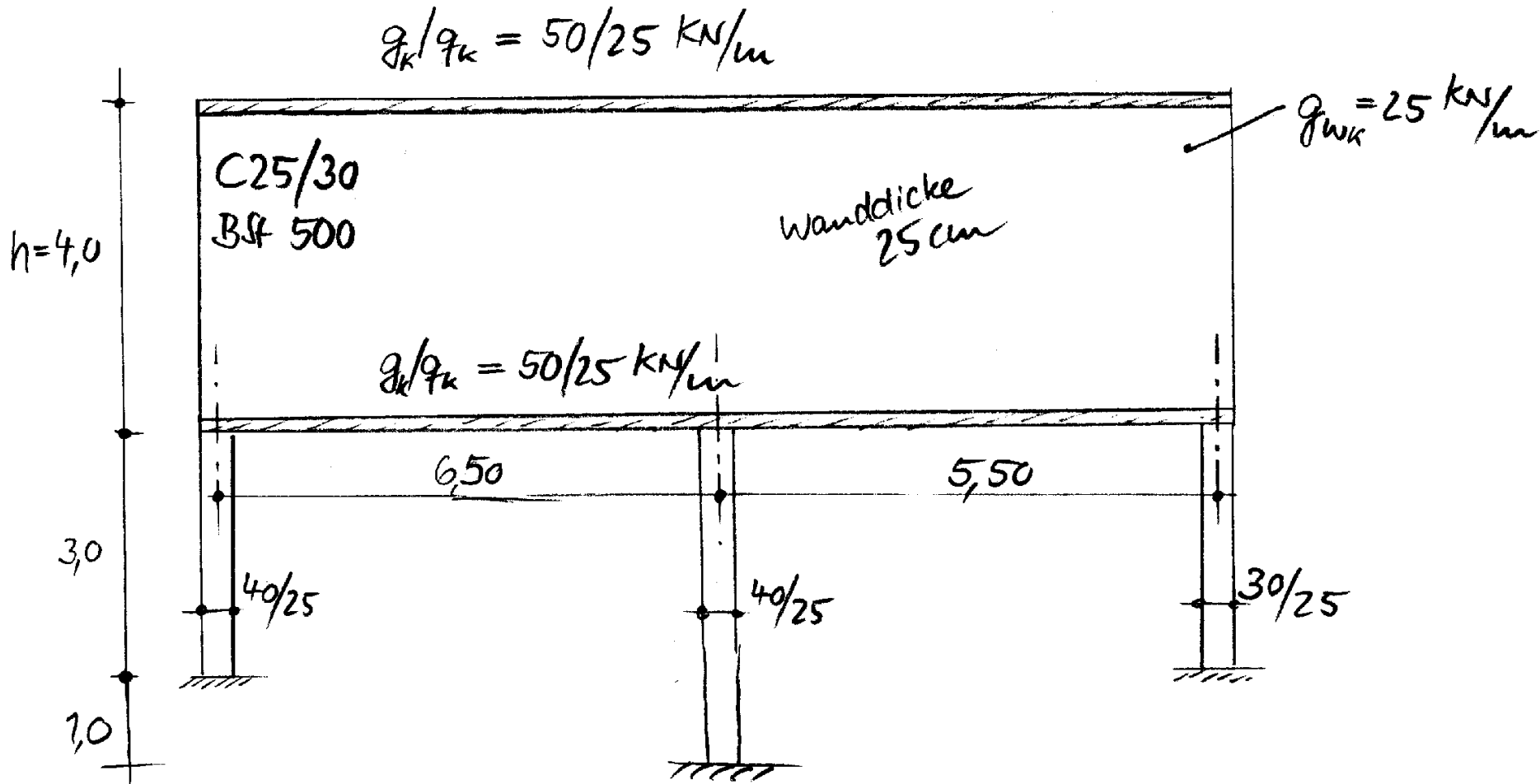
# Verteilung der Auflagerkräfte bei biege- und schubsteifer Scheibe



Rotationsanteile:

$$F_i^R = \frac{\frac{EA_i}{l_i} \cdot x_i}{\sum \frac{EA_i}{l_i} \cdot x_i^2} \cdot (F_{res} \cdot x_F)$$

## System und Belastung:

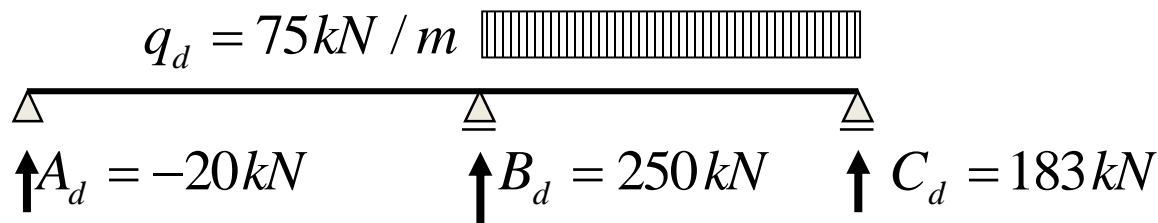
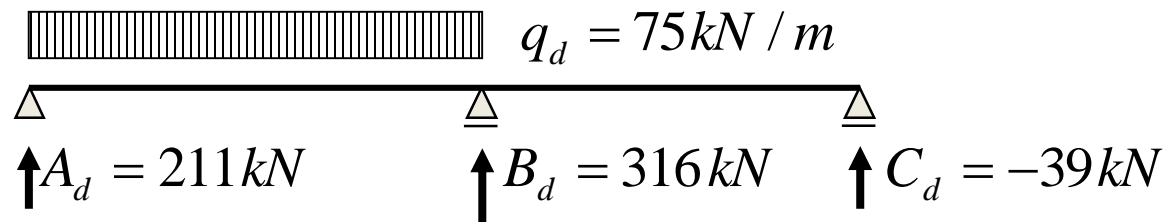
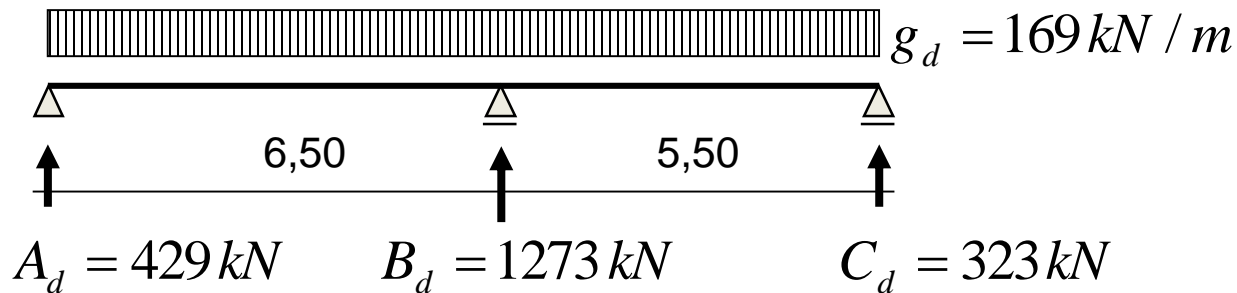


$$g_d = 1,35 \cdot (2 \cdot 50 + 25) = 168,75 \approx 169 \text{ kN/m}$$

$$q_d = 1,5 \cdot 2 \cdot 25 = 75 \text{ kN/m}$$

## Grenzfall 1: Auflagerkräfte und Schnittgrößen nach üblicher Balkenstatik (starre Lagerung)

Hinweis: sämtliche Zahlenergebnisse sind gerundete Werte einer Excel-Berechnung!



Für Volllast ergibt sich  $B_d = 1838 \text{ kN}$  und  $M_{E_d, B} = -1120 \text{ kNm}$



## Grenzfall 2: Auflagerkräfte und Schnittgrößen für starre Scheibe mit nachgiebiger Lagerung

Hinweis: sämtliche Zahlenergebnisse sind gerundete Werte einer Excel-Berechnung!

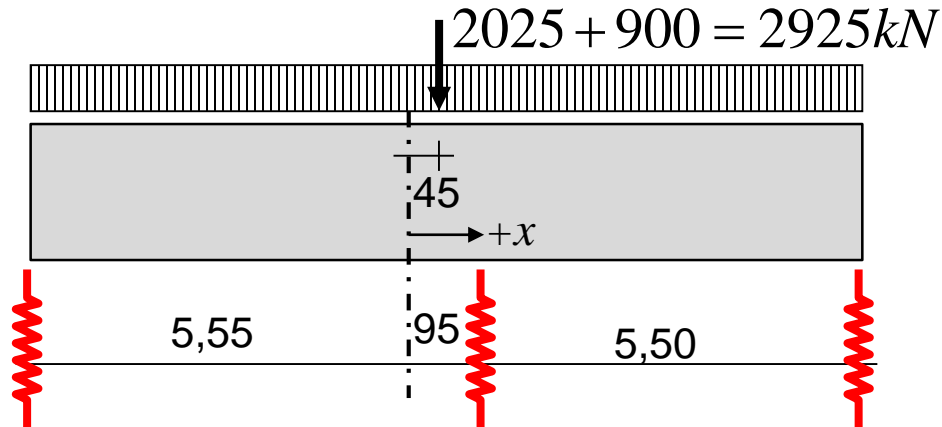
Zunächst werden die Federsteifigkeiten der Stützen ermittelt:

$$\begin{aligned}
 c_A &= \frac{EA}{l} = \frac{E \cdot 0,4 \cdot 0,25}{3,0} = \frac{0,1 \cdot E}{3,0} \\
 c_B &= \frac{E \cdot 0,4 \cdot 0,25}{4,0} = \frac{0,075 \cdot E}{3,0} \\
 c_C &= \frac{E \cdot 0,3 \cdot 0,25}{3,0} = \frac{0,075 \cdot E}{3,0}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} c_A \\ c_B \\ c_C \end{aligned}} \right\} \sum \frac{EA}{l} = \frac{0,25 \cdot E}{3,0}$$

Schwerpunkt der Dehnsteifigkeit:

$$x_S^* = \frac{0,1 \cdot 0 + 0,075 \cdot 6,5 + 0,075 \cdot 12,0}{0,1 + 0,075 + 0,075} = 5,55m \quad \text{von Achse Auflager A}$$

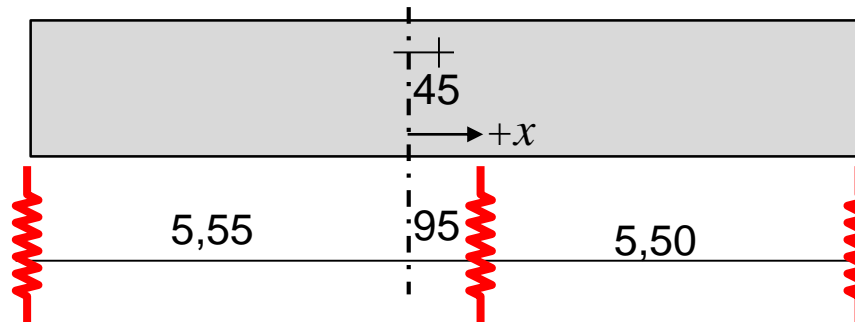
## Betrachtung des Lastfalls Vollast:



Translationsanteile:

$$A_d = \frac{0,1}{0,25} \cdot 2925 = 1170 \text{ kN} \quad B_d = 877,5 \text{ kN} \quad C_d = 877,5 \text{ kN}$$

$$2925 \cdot 0,45 = 1316 \text{ kNm}$$

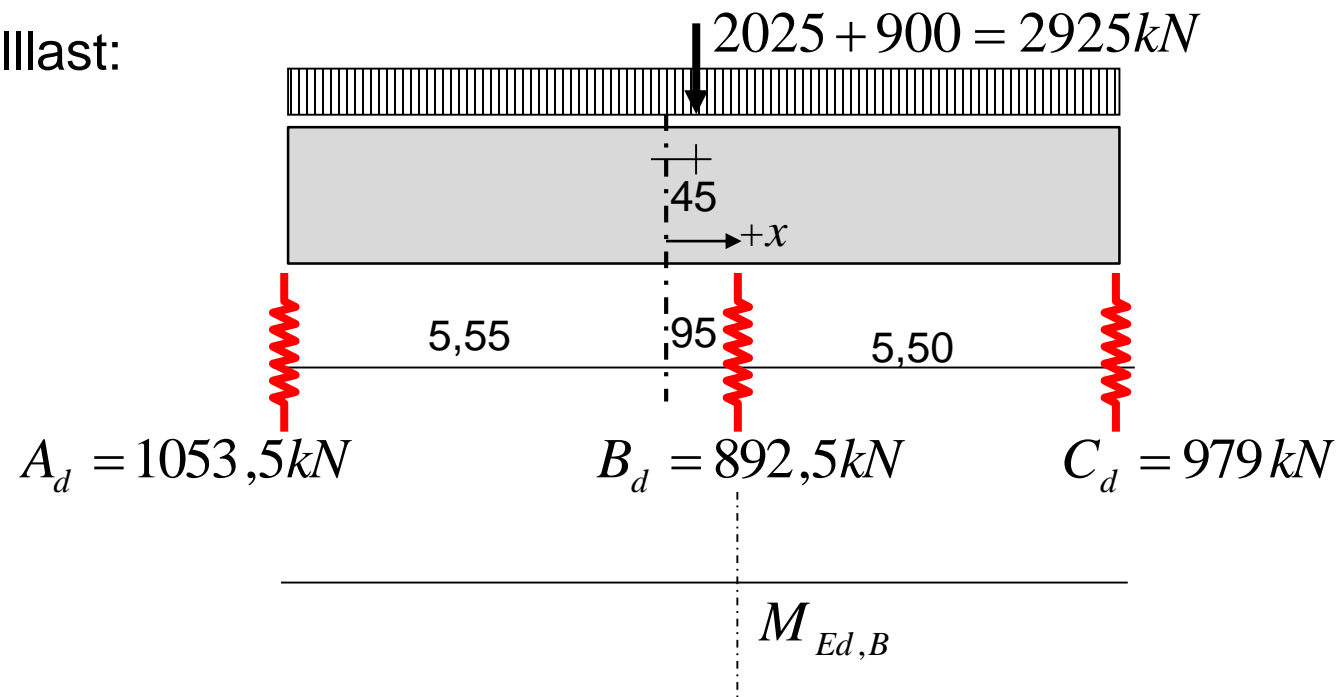


Rotationsanteile:

$$B_d = 15 \text{ kN} \quad C_d = 102 \text{ kN}$$

$$A_d = \frac{-0,08854 - 0,1 \cdot 5,55}{0,1 \cdot 5,55^2 + 0,075 \cdot 0,95^2 + 0,075 \cdot 6,45^2} \cdot 1316 = -117 \text{ kN}$$

Ergebnis Lastfall Vollast:



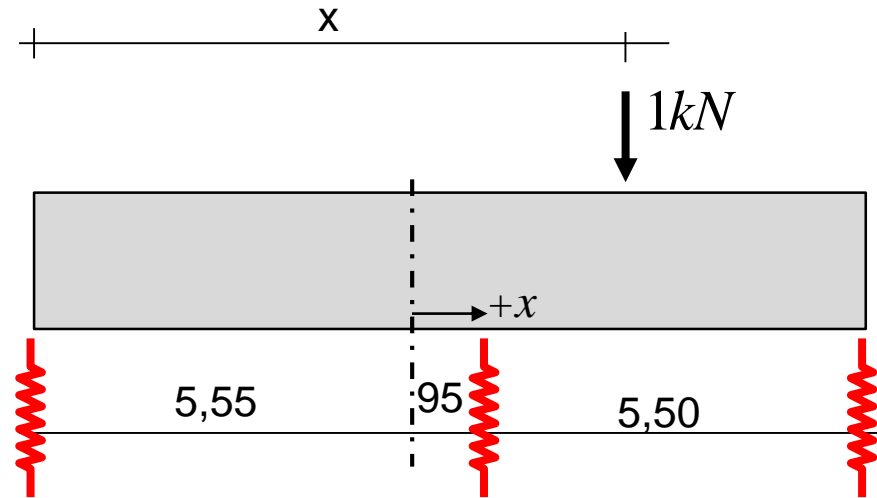
Das Moment an der Stützung B im wandartigen Träger beträgt:

$$M_{Ed,B} = +1698 \text{ kNm (pos. Stützmoment!)}$$

Für welche Belastung wird das Feldmoment maximal?

für die Belastung, die zu max A führt.

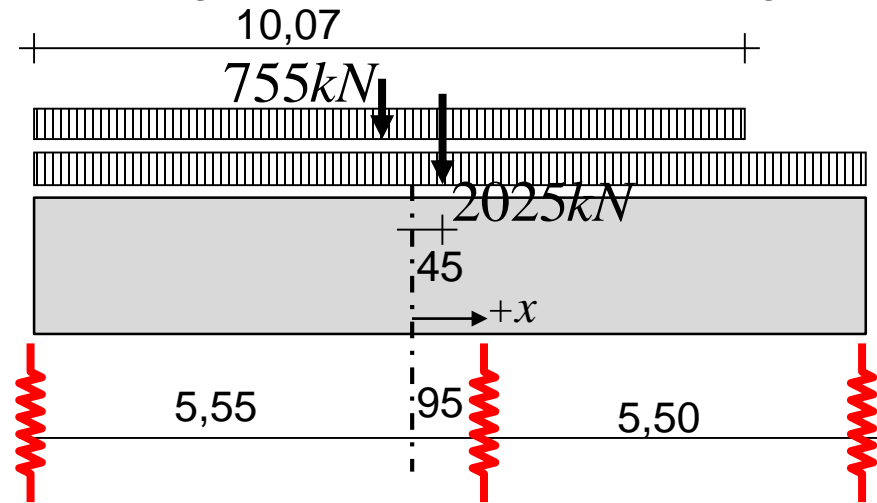
Für die Stelle einer beliebigen Einzellast, für die sich der positive Translations- und negative Rotationsanteil gegenseitig am Auflager A aufheben, ist die Grenze zwischen ungünstig und günstig wirkender Nutzlast gefunden. Entlastend wirkende Nutzlastabschnitte bleiben unbelastet.



$$A_d^T = \frac{0,1}{0,25} \cdot 1 = 0,4$$

$$A_d^R = -0,08854 \cdot 1 \cdot (x - 5,55) = -0,4$$

Ergebnis Lastfall max A mit Nutzlastlänge 10,07m von linker Lagerachse :



$$\max A_d = 1066 \text{ kN}$$

$$B_d = 840 \text{ kN}$$

$$C_d = 874 \text{ kN}$$

Ergebnis Lastfall max C mit Nutzlastlänge 9,44m von rechter Lagerachse:

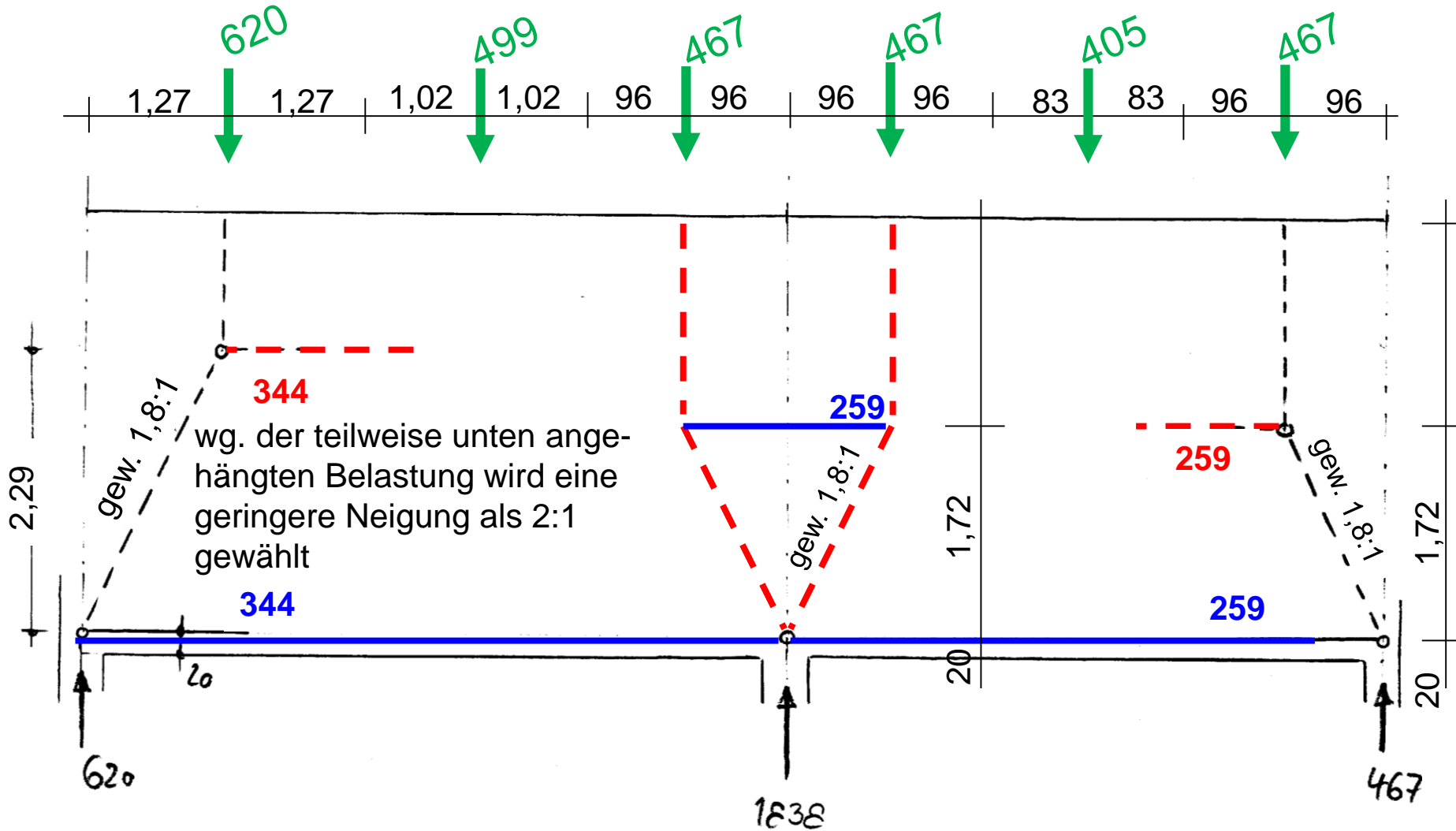
$$A_d = 952 \text{ kN}$$

$$B_d = 862 \text{ kN}$$

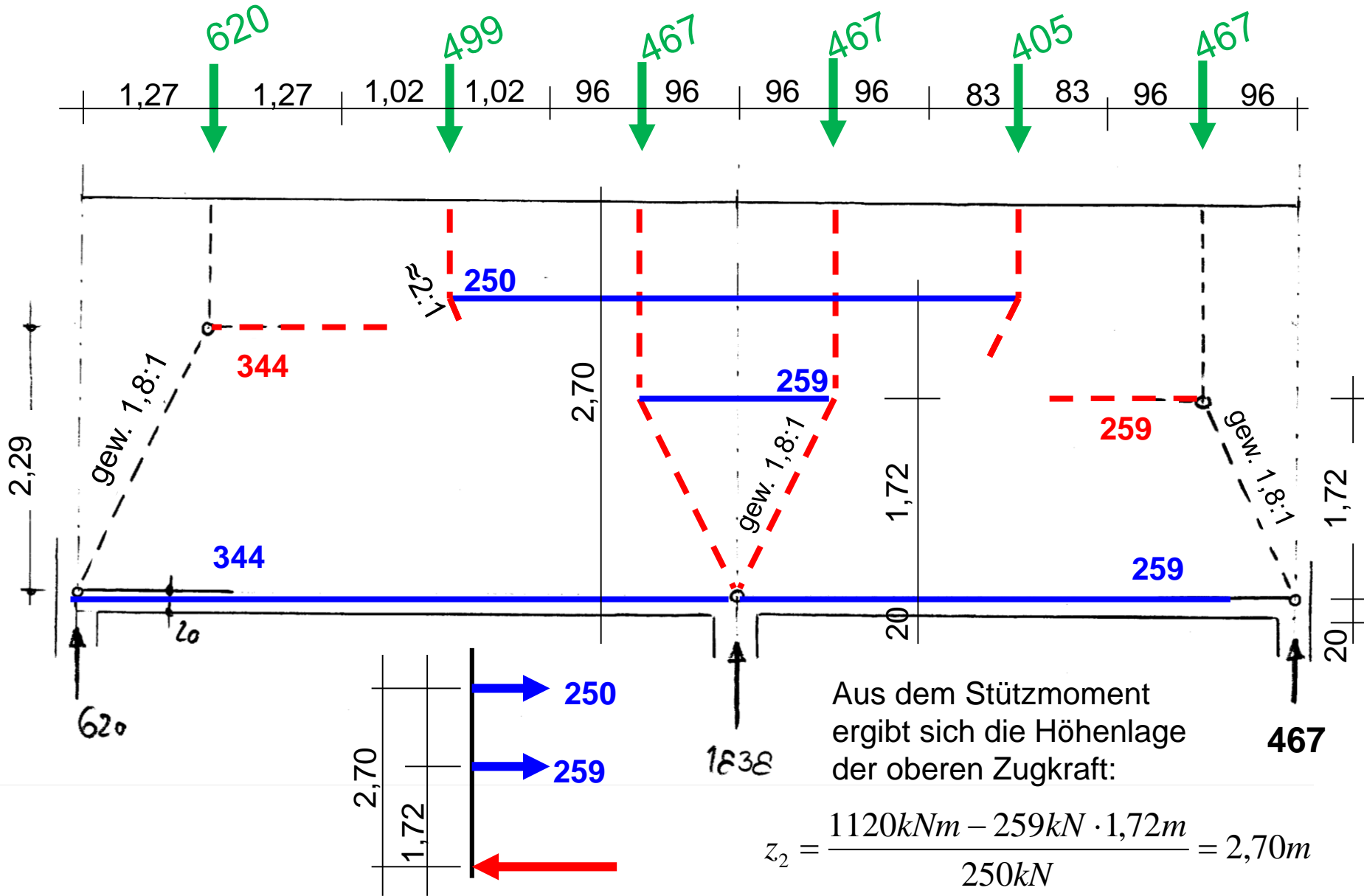
$$\max C_d = 987 \text{ kN}$$

Die größte Lagerkraft am Auflager B ergibt sich aus dem Grenzfall 1!

### Stabwerkmodell für Grenzfall 1 (starre Lagerung) für Volllast:

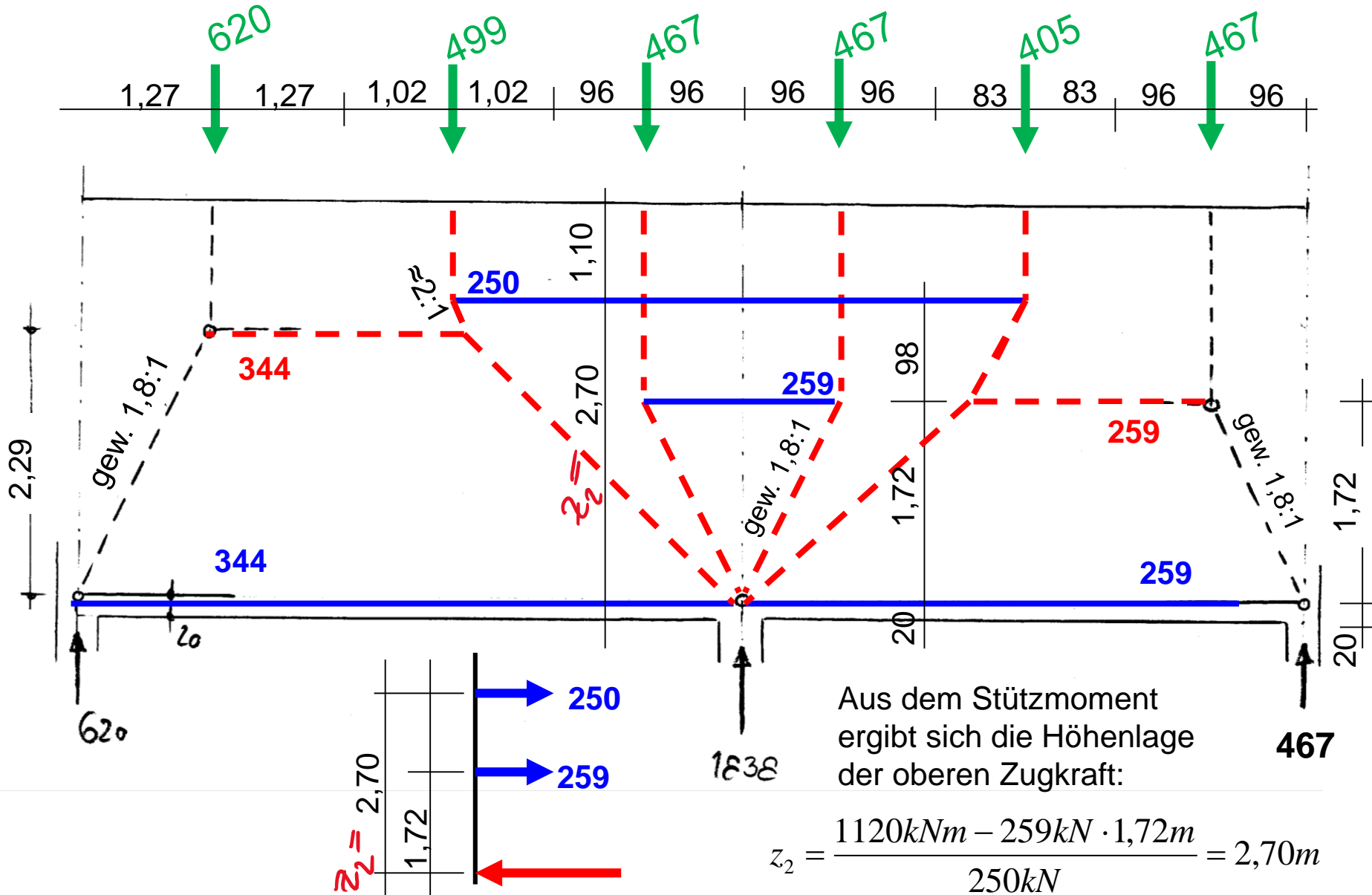


### Stabwerkmodell für Grenzfall 1 (starre Lagerung) für Volllast:





### Stabwerkmodell für Grenzfall 1 (starre Lagerung) für Volllast:



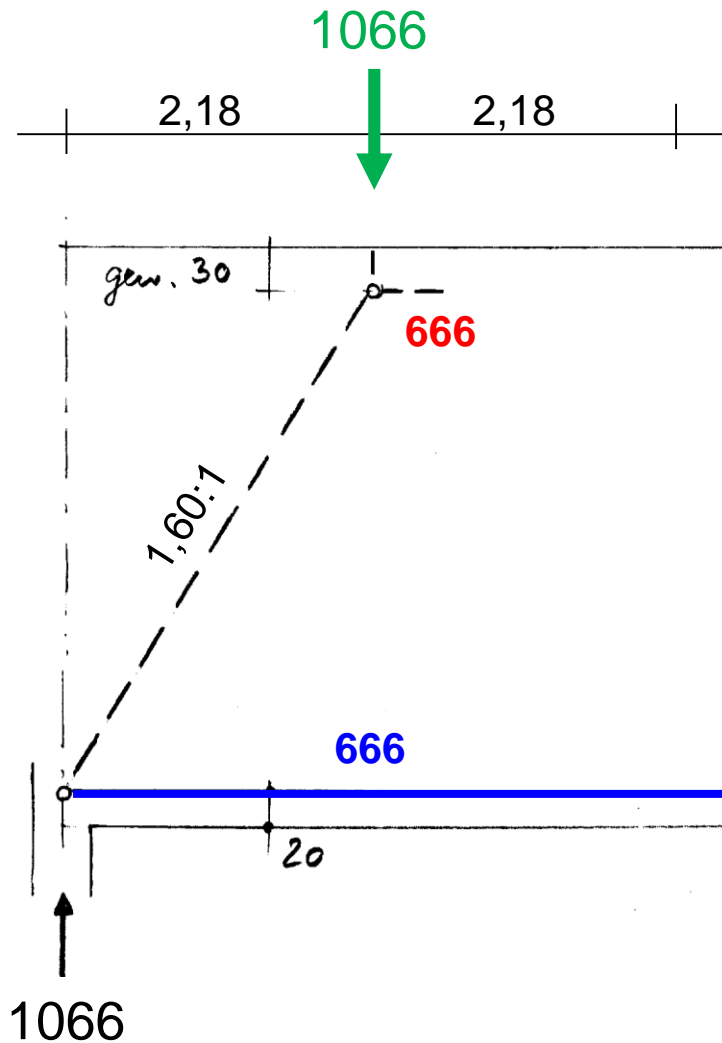
Netzbewehrung:  $\min A_s = 1,5 \cdot \frac{25}{20} = 1,88 \text{ cm}^2 / \text{m}$   
 je Seite und Richtung gew. Q188 beidseitig = 1,88 cm<sup>2</sup>/m

Von der Netzbewehrung über die Höhe von  $\frac{1,72\text{m}}{2} + 0,98\text{m} + 1,10\text{m} = 2,94\text{m}$   
 aufnehmbares Moment im Bereich  
 der Kraft von 259 + 250 kN:

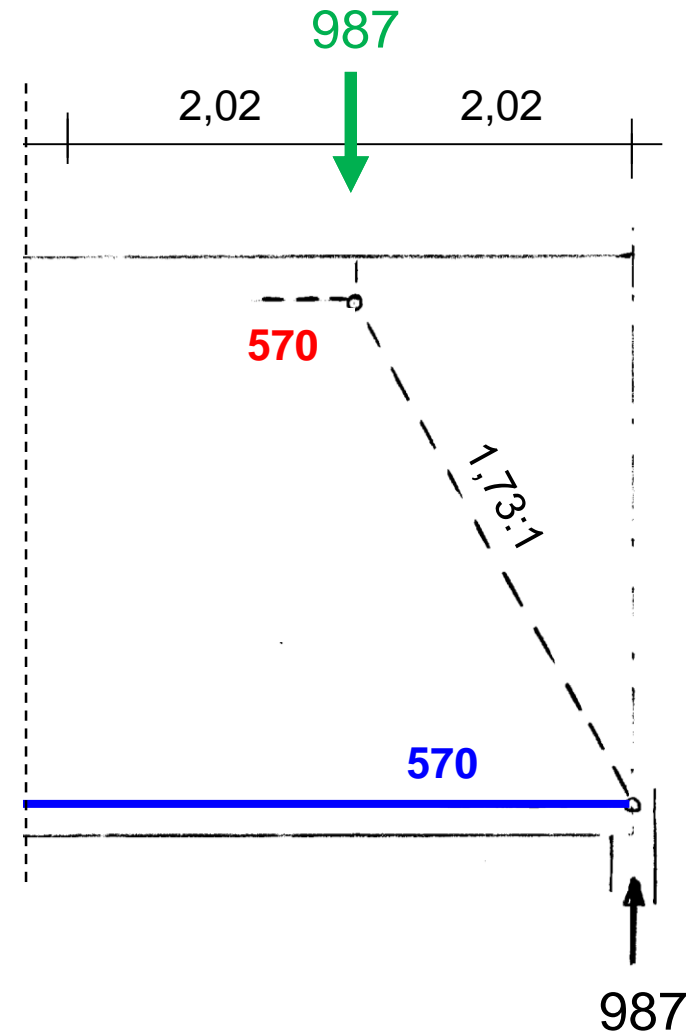
$$M_s \approx 2,94 \cdot (2,94/2 + 1,72/2) \cdot 2 \cdot 1,88 \text{ cm}^2 / \text{m} \cdot 43,5 \text{ kN} / \text{cm}^2 = 1120 \text{ kN} \geq 1120 \text{ kN}$$

Bei nicht ausreichender Netzbewehrung kann auch eine horizontale  
 Zulagebewehrung gewählt werden, bei sehr unterschiedlichen Zugkräften  
 ggf. auch nur in dem stärker beanspruchten Teilbereich.

Stabwerkmodell für Grenzfall 2  
(nachgiebige Lagerung) max A:



Stabwerkmodell für Grenzfall 2  
(nachgiebige Lagerung) max C:



Nachweis der Druckspannungen am Stützenkopf:

Exemplarisch an der Mittelstütze:

$$B_d = 1,838 \text{ MN}$$

$$F_{cd} = 0,4 \cdot 0,25 \cdot 14,17 = 1,417 \text{ MN}$$

$$\text{erf}A_s = \frac{1,838 - 1,417}{435} \cdot 10^4 = 9,7 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{\text{vorh. } 8\text{Ø}16} = 16,1 \text{ cm}^2$$

Bemessung der unteren Zugbänder (li und re):

$$F_{sd} = 1,066 / 1,60 = 0,666 \text{ MN}$$

$$\text{erf}A_s = \frac{0,666}{435} \cdot 10^4 = 15,3 \text{ cm}^2$$

$$\text{erf}A_s = \dots = 13,1 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{\text{gew. } 8\text{Ø}16 \text{ voll durchlaufend über beide Felder}} = 16,1 \text{ cm}^2$$

Nachweis der Verankerungslänge am Endauflager (bei C maßgebend):

$$\boxed{\text{gew. 4 Steckbügel } \varnothing 16} = 16,1 \text{ cm}^2$$

$$\text{erfl}_{b,dir} = \frac{2}{3} \cdot 0,7 \cdot \frac{13,1}{16,1} \cdot 64,4 = 24,5 \text{ cm} < 25 \text{ cm}$$

Aufhängebewehrung:

$$\text{für } 1,35 \cdot \left( 50 + \frac{6,50}{2} \cdot 0,25 \cdot 25 \text{ kN/m}^3 \right) + 1,5 \cdot 25 = 132 \text{ kN/m}$$

$$\text{erf}A_s = \frac{0,132}{435} \cdot 10^4 = 3,03 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad \text{Netzbewehrung voll anrechenbar und ausreichend}$$

$$\boxed{\text{gew. Steckbügel } \varnothing 8/15 \text{ als Anfängerbew. in der Decke}} = 6,68 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Empfehlung: auf  $0,2 \cdot h \leq 0,2 \cdot l$  mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{s,cr})}{3,6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}} \quad \text{für dünne Bauteile, ggf. für dicke Bt.}$$

Innenbauteil  $c_v = 2 \text{ cm}$ , Steckbü  $\varnothing 8$

$$F_{s,cr} = 0,5 \cdot 2,6 \cdot \frac{0,25}{2} = 0,163 \text{ MN} / \text{m}$$

Vorschädigungsfaktor  $k = 0,5$

$$F_{s,cr,eff} = 0,5 \cdot 2,6 \cdot 2,5 \cdot 0,034 = 0,111 \text{ MN} / \text{m} \quad \Rightarrow \text{dickes Bauteil}$$

$$A_s = \sqrt{\frac{12 \cdot 0,111 \cdot (0,163 - 0,4 \cdot 0,111)}{3,6 \cdot 200000 \cdot 0,4 \cdot 2,6}} \cdot 10^4 = 4,6 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

gew. Zulage  $\varnothing 12/15 = 7,54 \text{ cm}^2 / \text{m}$  in dem 40 cm hohen Streifen oberhalb der  $8\varnothing 16$

### Bewehrungsführung:

