

Einführendes Beispiel zur Mathematischen Modellbildung: Zweimassenschwinger - Modellierung

Mathematische Modellbildung und Simulation

Prof. Dr. Alexander Viehweider

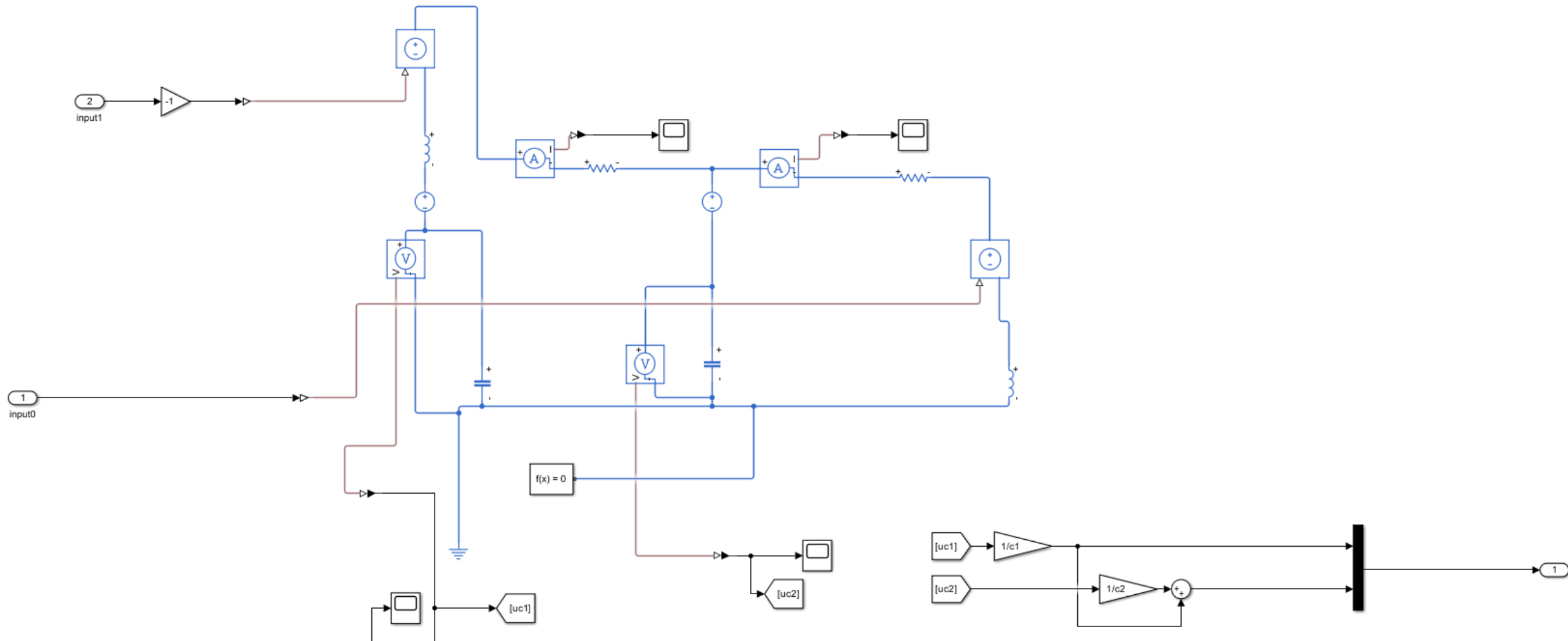
Fachbereich VII

Elektrotechnik Mechatronik Optometrie

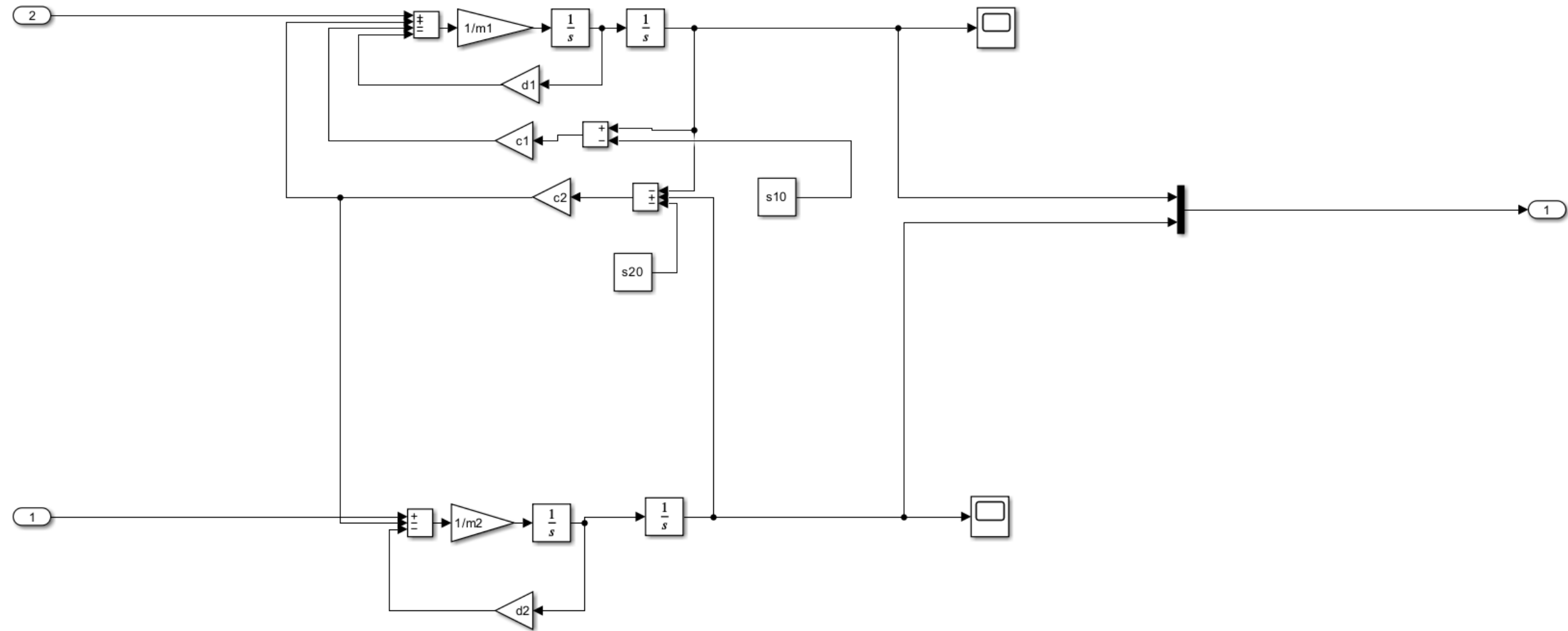
Einleitung

- Zur Darstellung der Modellierungsarten mittels eines Signalflussplans (respektive Blockschaltbild) sei ein Zweimassenschwinger betrachtet. Mittels geeigneter mechanischer Modellierung lassen sich die Differentialgleichungen herleiten und damit das Blockschaltbild angeben, bzw. in einer Simulationsumgebung realisieren.
- Mittels geeigneter Äquivalenzen lassen sich die physikalischen Zusammenhänge auch als elektrische Schaltung angeben und damit kann das Problem der Simulation auf die Simulation einer elektrischen Schaltung reduziert werden.

Darstellung des Zweimassenschwingers als elektrische Schaltung (Spulen, Kondensatoren, Widerstände, gesteuerte Spannungsquellen)

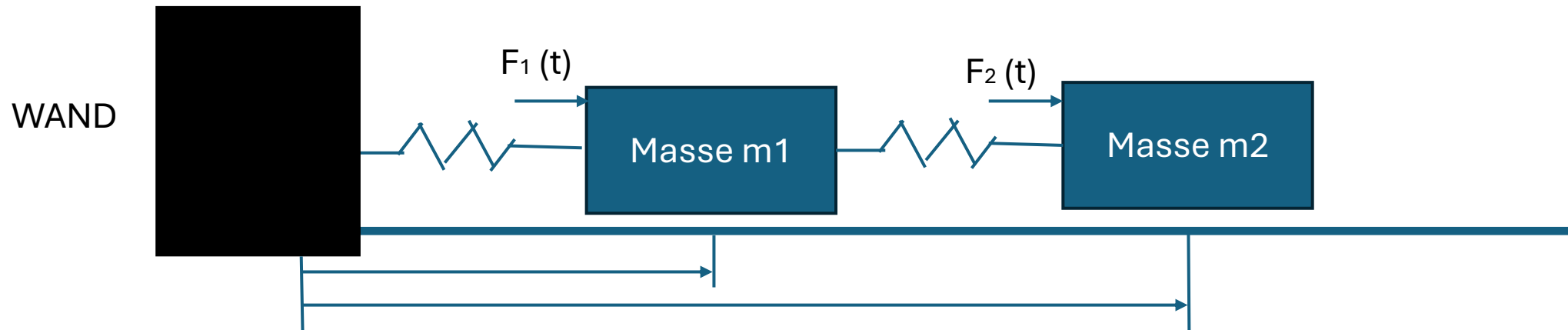


Signalflussdiagramm, grafische Umsetzung der Differentialgleichungen (Darstellung im Zustandsraum)



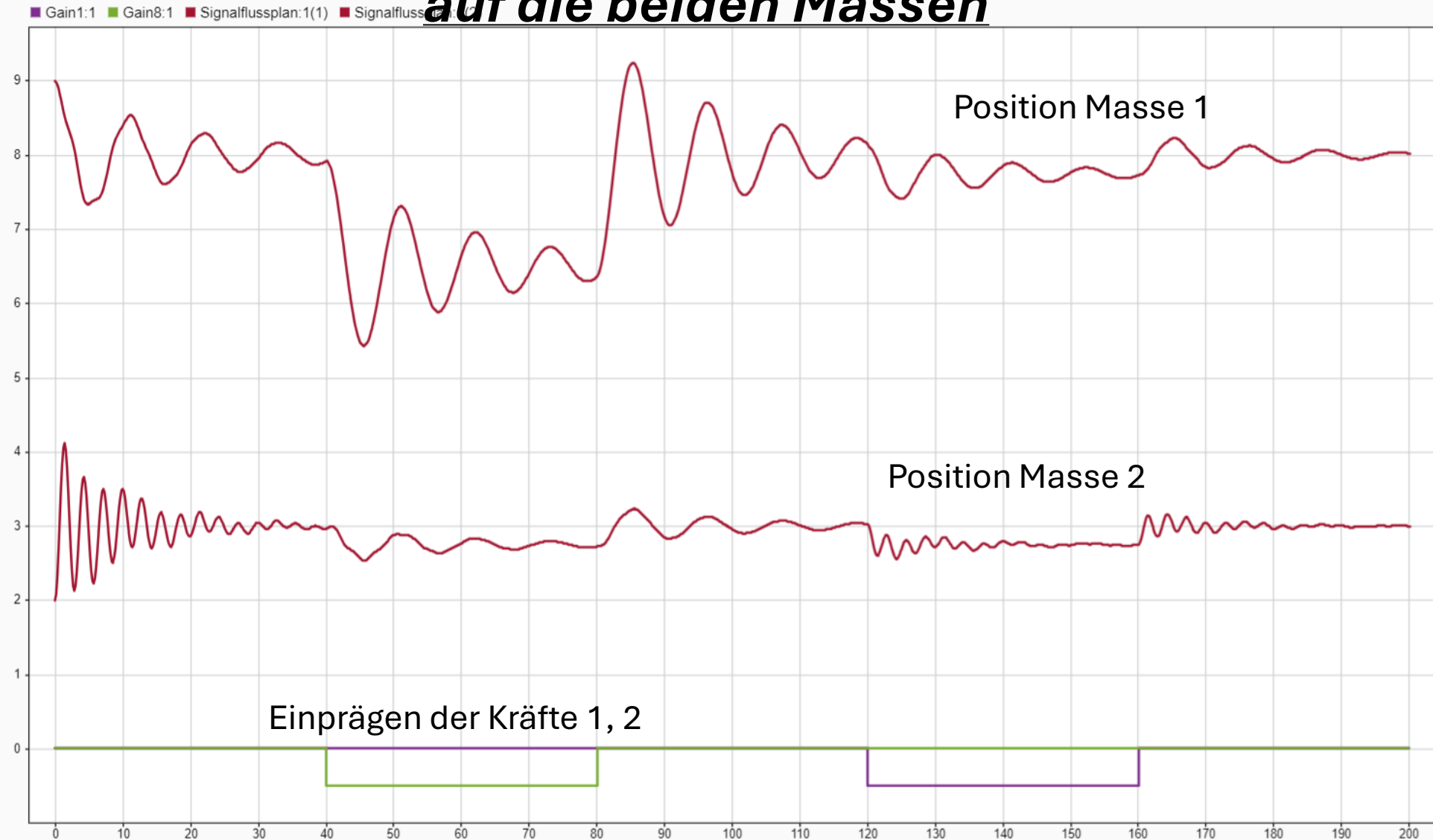
Zweimassenschwinger und entsprechende Darstellung in Form einer elektrischen Schaltung oder Signalflussdiagramm

- Folgender Zweimassenschwinger werde betrachtet:



Die beiden Masse sind durch eine Feder gekoppelt, weiters ist eine Masse mit einer Feder mit einer Wand fest verbunden. Von außen wirken von Zeit zu Zeit Kräfte (Impuls) auf die Massen, gesucht ist das entsprechende dynamische Verhalten (soll heißen die Positionen der Massen über die Zeit).

Simulationsergebnis (Position der beiden Massen) unter Annahme der Einwirkung von Kräfteprofilen auf die beiden Massen



Zweimassenschwinger

- Die beschreibenden Differentialgleichungen lassen sich durch geeignetes Freischneiden und den entsprechenden Kräftegleichgewichten ausdrücken, wobei die dynamischen Anteile (Trägheitskräfte) auch berücksichtigt werden müssen. Bedingt durch die Anzahl der Energiespeicher (2 Massen $\rightarrow$ Lage, Geschwindigkeit) ergibt sich ein lineares Differentialgleichungssystem bestehend aus 4 Differentialgleichungen. Falls die Federkraft auch eine nichtlineare Abhängigkeit vom Weg aufweist, ergibt sich ein nichtlineares Differentialgleichungssystem (Darstellung im Zustandsraum).
- Für die Beschreibung als Schaltung müssen die geeignete Anzahl von Maschen gewählt werden und geeignete Dimensionierung der Elemente vorgenommen werden. Die Vorspannung der Feder wird durch eine Konstantspannungsquelle modelliert, die von außen wirkenden Kräfte werden durch gesteuerte Konstantspannungsquellen dargestellt.

Zweimassenschwinger, Differentialgleichungen

- Die beschreibenden Differentialgleichungen sind wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m_1}(-c_1(x_1 - s_{10}) - d_1x_2 - c_2(x_1 - x_3 - s_{20}) + u_1) \\ x_4 \\ \frac{1}{m_2}(c_2(x_1 - x_3 - s_{20}) - d_2x_4 + u_2) \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

wobei x_1, x_3 die Positionen der beiden Massen und x_2, x_4 die Geschwindigkeiten der beiden Massen sind. Außer den Zustandsgrößen gibt es noch die Parameter: c_1, c_2 beschreiben die Federsteifigkeiten der beiden Federn, s_{10}, s_{20} die initiale Auslenkung der Federn (Vorspannungen) und den d_1, d_2 die Beiwerte der viskosen Reibung.

