

Bauteile des Massivbaus

Prof. Dr. Ing. Andreas Fischer
Berliner Hochschule für Technik



Vorwort

In den Veranstaltungen des Massivbaus können viele Themen nur in den Grundzügen dargestellt werden, diese sollen das ingenieurmäßige Denken so weit prägen, dass einerseits spezielle Themengebiete im Selbststudium erarbeitet und andererseits Weiterentwicklungen der Bauweise in der Berufspraxis verfolgt werden können.

Für den Massivbau wurde vom Autor zur besseren Übersicht eine Einteilung des Lehrstoffes in Grundlagen, Bauteile und Sonderthemen vorgenommen. Im vorliegenden Bauteile-Skript ist lediglich die Abschnitte „zweiachsig gespannte Platten“ und „Stützen und Rahmen“ bearbeitet. Die übrigen Abschnitte sind noch in Vorbereitung. Zusätzlich ist das Grundlagen-Skript zu beachten, in welchem die Grundlagen der Bemessung von Stahlbetonbauteilen abgehandelt werden (Auch dieser Teil ist noch nicht vollständig).

Das Skript ist zur Vor- und Nachbereitung sowie zur Begleitung der Lehrveranstaltung konzipiert, es ersetzt auf keinen Fall die Veranstaltung selbst, da dort weitere Themen und Hinweise und insbesondere Beispiele behandelt werden. Auch das Studium weiterführender Literatur ist zum Verständnis des Massivbaus unabdingbar.

Inhaltsverzeichnis

B1	Zweiachsig gespannte Platten, umfangsgestützt	1
B1.1	Tragverhalten und Schnittgrößen	1
B1.1.1	Einfeldplatten	1
B1.1.1.1	Einführung	1
B1.1.1.2	Streifenkreuzverfahren nach Markus	3
B1.1.1.3	Drillsteife Platten nach Czerny	4
B1.1.2	Mehrfeldplatten	18
B1.1.2.1	Regelmäßige Mehrfeldplatten nach Belastungsumordnungs-Verfahren (BUV)	18
B1.1.2.2	Unregelmäßige Mehrfeldplatten nach Pieper/Martens	21
B1.2	Bemessung	24
B1.2.1	Bemessung im GZT für Biegung	24
B1.2.2	Bemessung im GZT für Querkraft	24
B1.2.3	Nachweise im GZG (Spannungen, Rissbreiten, Verformungen)	24
B1.3	Konstruktion	24
B2	Stützen und Rahmen	25
B2.1	Tragverhalten und Schnittgrößen	25
B2.1.1	Unverschiebliche Rahmensysteme	29
B2.1.1.1	Einführung	29
B2.1.1.2	Berechnung der Biegemomente in den Randstielen und im Riegelendfeld	30
B2.1.1.3	Biegemomente für unregelmäßige Rahmensysteme	35
B2.1.2	Verschiebliche Rahmensysteme	35
B2.2	Nachweis der Stabilität	36
B2.2.1	Einführung	36
B2.2.1.1	Verformungsberechnung mit Momenten-Krümmungs-Beziehungen	39
B2.2.2	Modellstützenverfahren (Verfahren mit Nennkrümmung)	41
B2.2.2.1	Herleitung	41
B2.2.2.2	Übertragung auf andere Stabilitätsfälle	44
B2.2.3	Bestimmung der Ersatzlänge von Einzeldruckgliedern	46
B2.2.4	Imperfektionen für Einzeldruckglieder	50
B2.2.5	Entfall des Nachweises nach Theorie II. Ordnung	51
B2.2.6	Kritische Schnitte und maßgebende, planmäßige Momente	52
B2.2.7	Kriechauswirkungen	54
B2.2.8	Erweiterung des Modellstützenverfahrens	55
B2.2.9	Druckglieder mit zweiachsiger Lastausmitte	56
B2.3	Bemessung	58
B2.3.1	Bemessung im GZT für Normalkraft und Biegung	58
B2.3.2	Bemessung im GZT für Querkraft	59
B2.3.3	Nachweise im GZG (Spannungen, Rissbreiten, Verformungen)	59
B2.4	Konstruktion	59
Literatur		

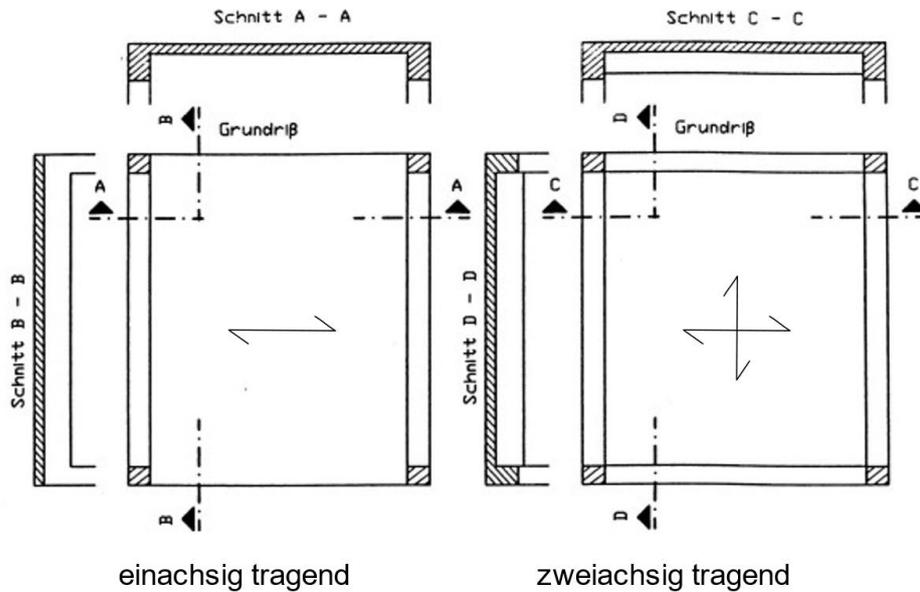
B1 Zweiachsig gespannte Platten, umfangsgestützt

B1.1 Tragverhalten und Schnittgrößen

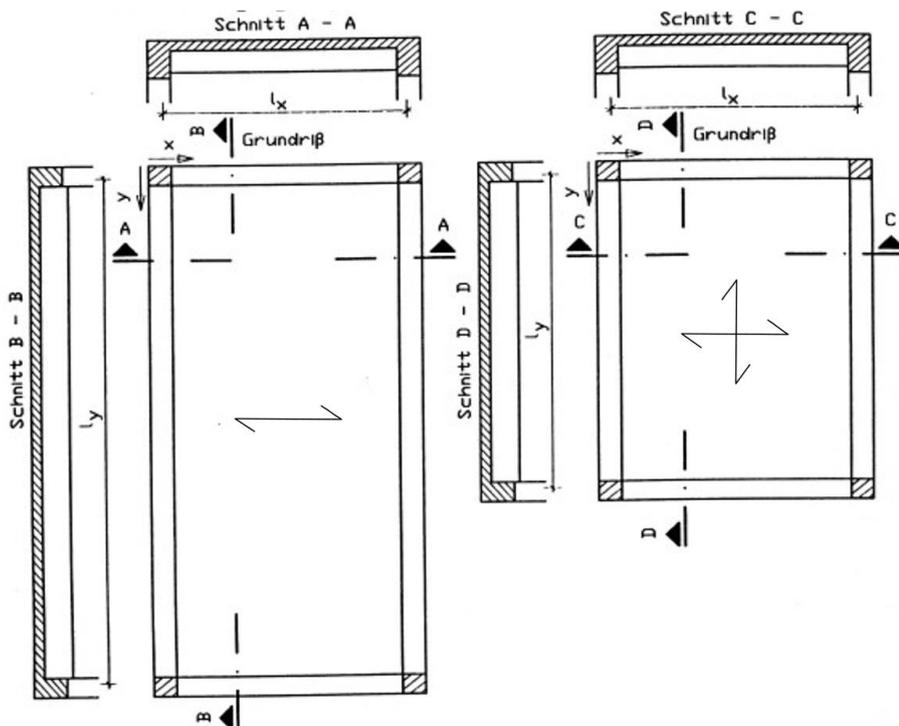
Das Tragverhalten wird zunächst an Einzelplatten erläutert. Da Plattensysteme in der Regel aus mehreren Plattenfeldern bestehen, werden später Verfahren zur Berechnung von Mehrfeldplatten vorgestellt.

B1.1.1 Einfeldplatten

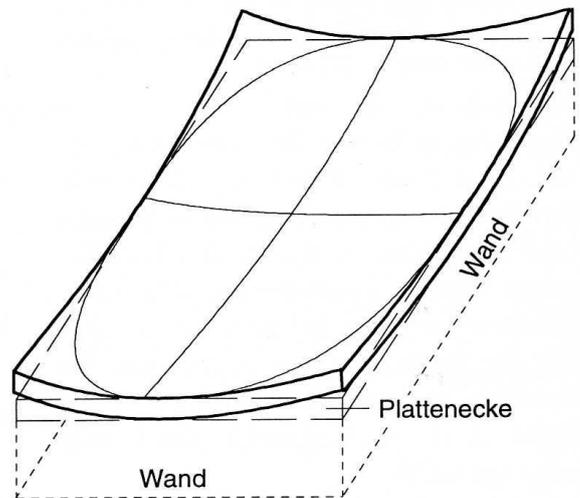
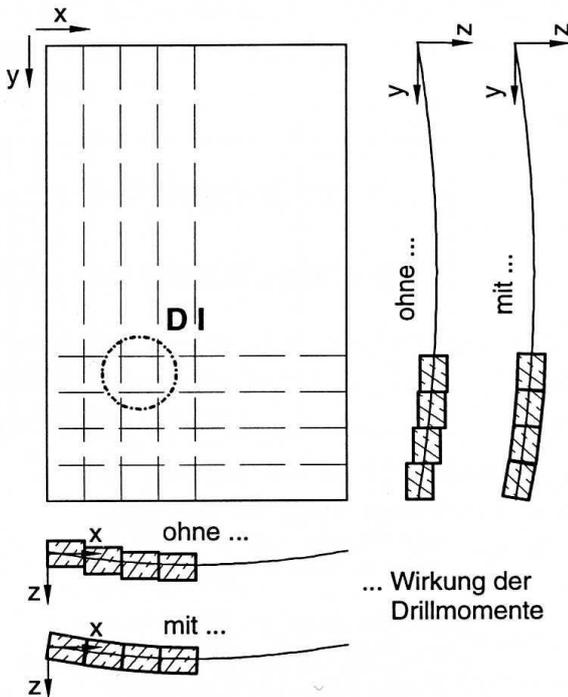
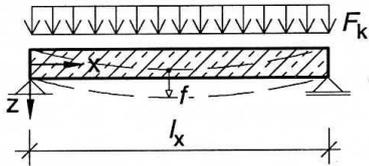
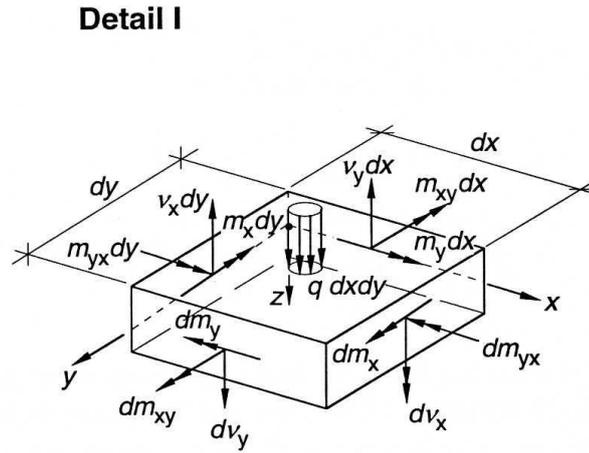
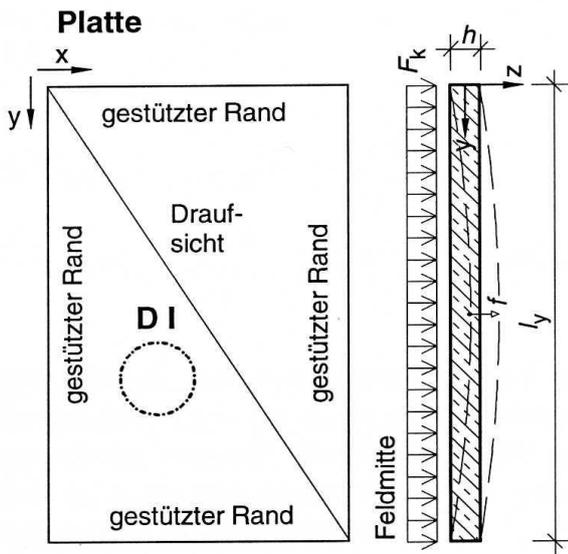
B1.1.1.1 Einführung



einachsig und zweiachsig gespannte Platte, Einordnung nach Art der Randlagerung

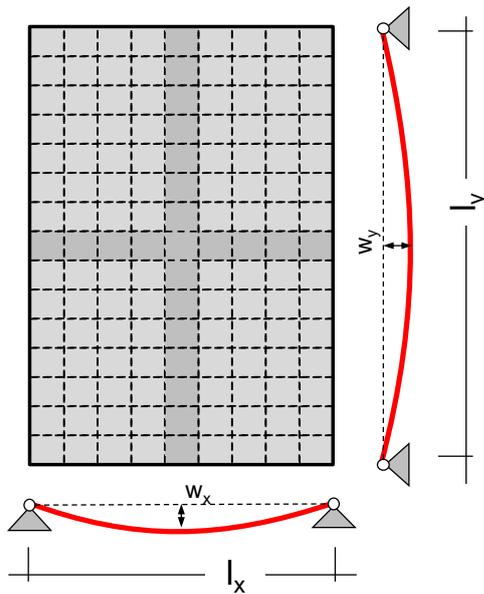


einachsig und zweiachsig gespannte Platte, Einordnung nach Seitenverhältnis der Stützweiten
 aus: Ralf Avak: Euro-Stahlbetonbau in Beispielen, Teil 2, 1. Aufl. 1996



Tragverhalten einer zweiachsiggespannten Platte, Aufschüsseln einer frei aufliegenden Platte
 aus: Ralf Avak: Stahlbetonbau in Beispielen, Teil 2, 2. Aufl. 2002

B1.1.1.2 Streifenkreuzverfahren nach Markus



Markus hat stellvertretend für die gesamte Platte die beiden gekreuzten Mittelstreifen betrachtet und gefordert, dass die Durchbiegung beider Mittelstreifen gleich sein muss:

$$w_x = w_y$$

Das größte Biegemoment entsteht in der Mitte, weil dort die Durchbiegung am größten ist.

Festlegung: $l_x < l_y$

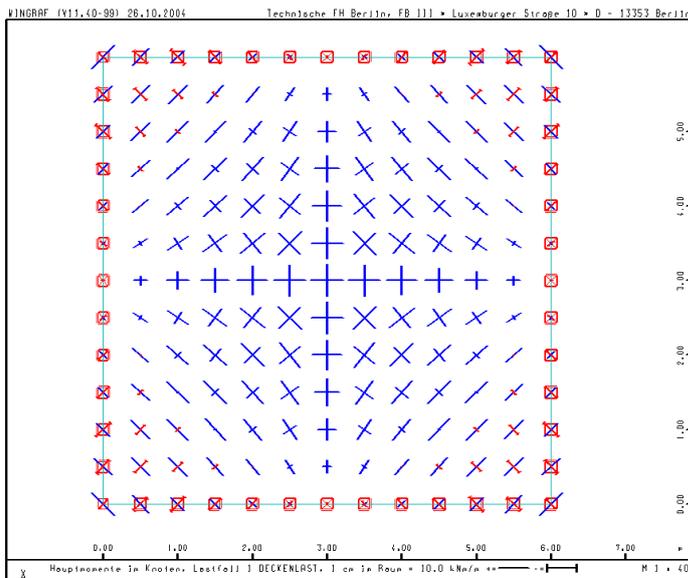
$$w_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_x \cdot l_x^4}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_y \cdot l_y^4}{EI_y} = w_y$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \Rightarrow \frac{q_x}{q_y} = \frac{l_y^4}{l_x^4} = \left(\frac{l_y}{l_x}\right)^4 = \varepsilon^4 \\ \textcircled{2} \quad q_x + q_y = q \end{array} \right\} \Rightarrow q_x = q \cdot \frac{\varepsilon^4}{1 + \varepsilon^4}$$

$$\text{für: } \varepsilon = \frac{l_y}{l_x} = 1,2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} q_x = 0,675 \cdot q \\ q_y = 0,325 \cdot q \end{array}$$

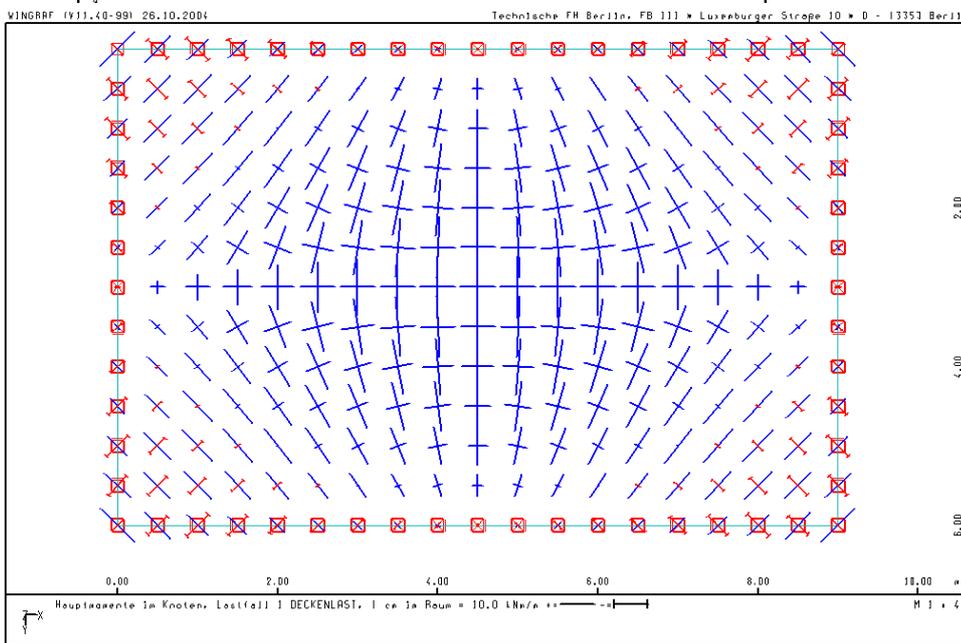
$$\text{für: } \varepsilon = \frac{l_y}{l_x} = 2,0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} q_x = 0,941 \cdot q \\ q_y = 0,059 \cdot q \end{array}$$

Platten mit einem Seitenverhältnis $\varepsilon \geq 2,0$ können als einachsig tragend berechnet werden.

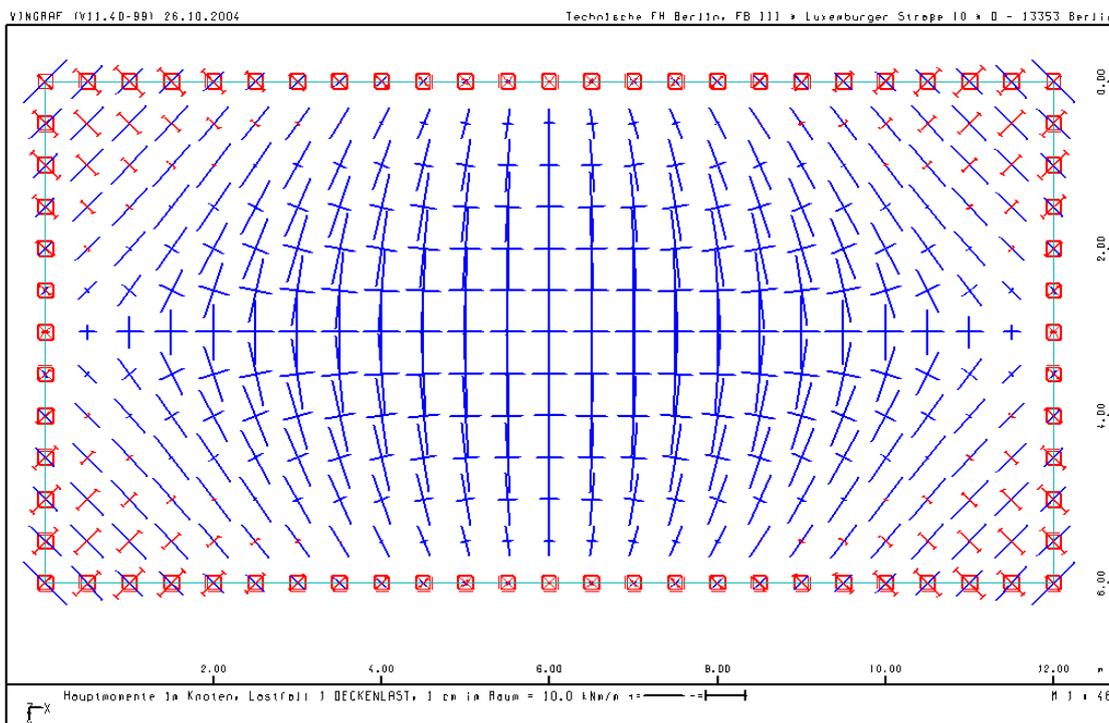


Hauptmomente von vierseitig gestützten Platten, berechnet mit dem FEM-Programm WINGRAF der Firma SOFiSTiK

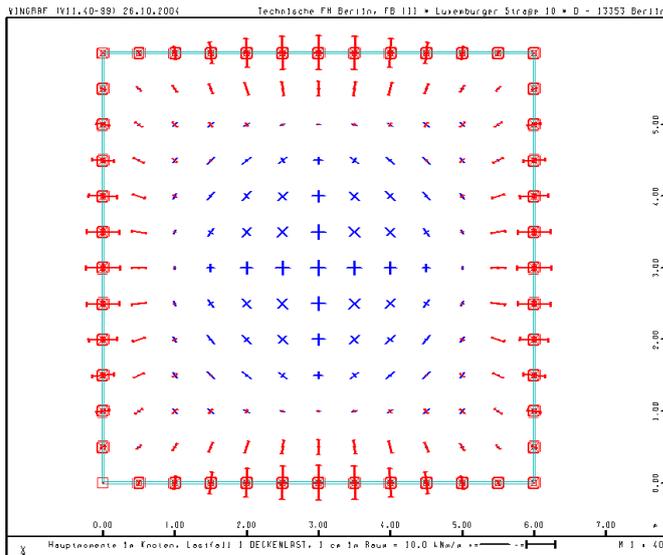
vierseitig gelenkig gelagerte Platte
1:1



vierseitig gelenkig gelagerte Platte
1:1,5

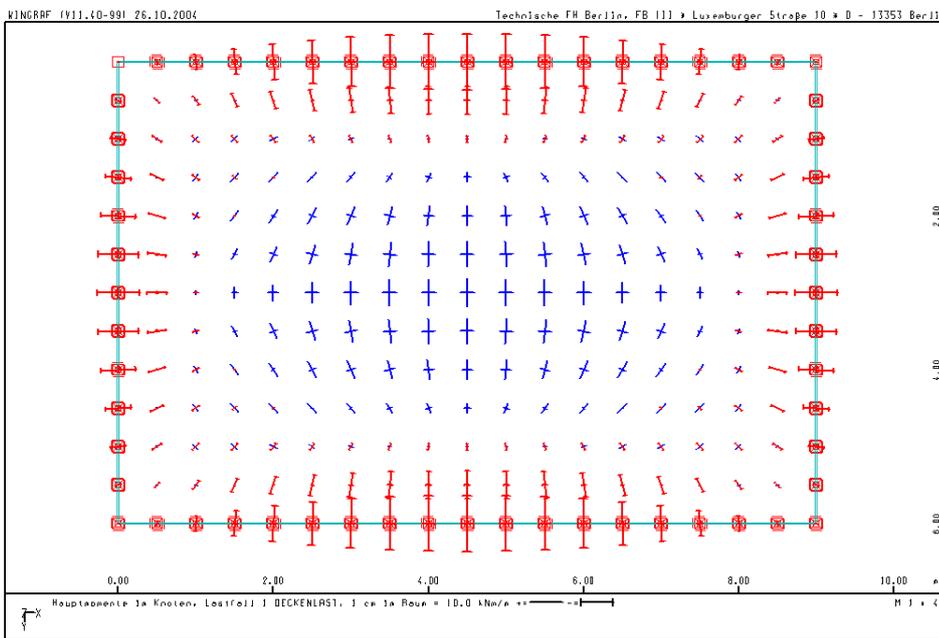


vierseitig gelenkig gelagerte Platte
1:2



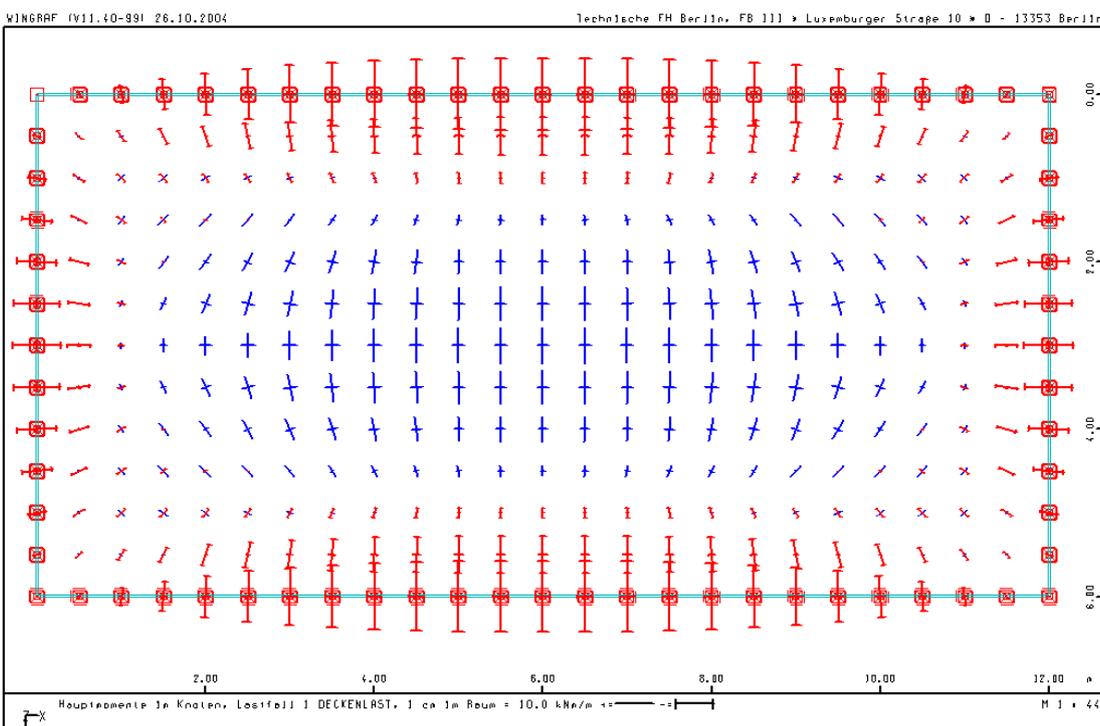
vierseitig
eingespannte
Platte

1:1



vierseitig
eingespannte
Platte

1:1,5



vierseitig
eingespannte
Platte

1:2

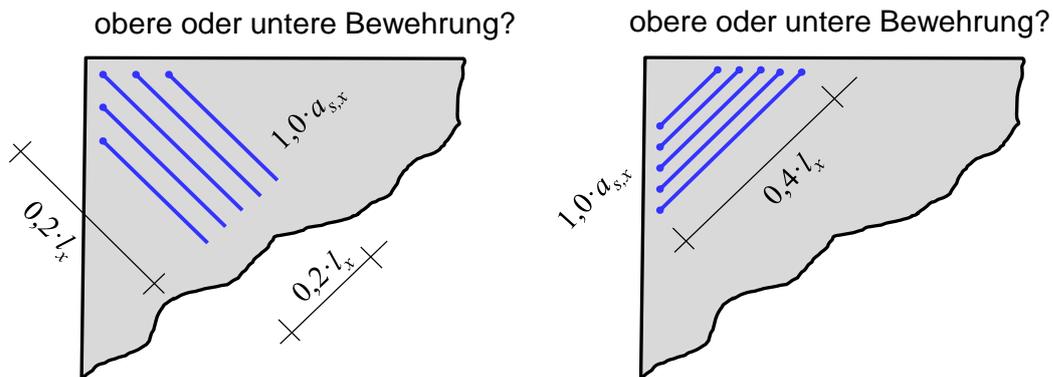
Schlussfolgerungen aus den Hauptmomenten für die Bewehrungsführung:

In Feldmitte ist die Bewehrung in x- und y-Richtung ausreichend.

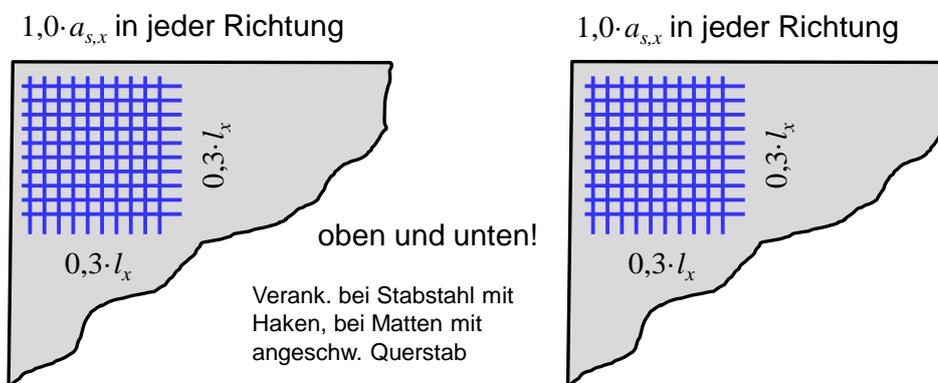
An den Ecken, insbesondere an den Ecken zweier gelenkiger Ränder ist eine diagonale Bewehrung, die sogenannte Drillbewehrung erforderlich.

Die Größe der Drillmomente entspricht der Größe der maximalen Feldmomente.

Drillbewehrung , Variante 1 (angepasst an den Verlauf der Hauptmomente):

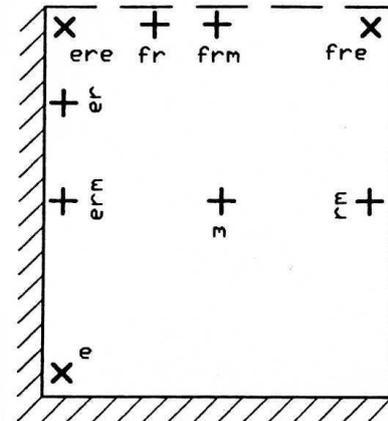
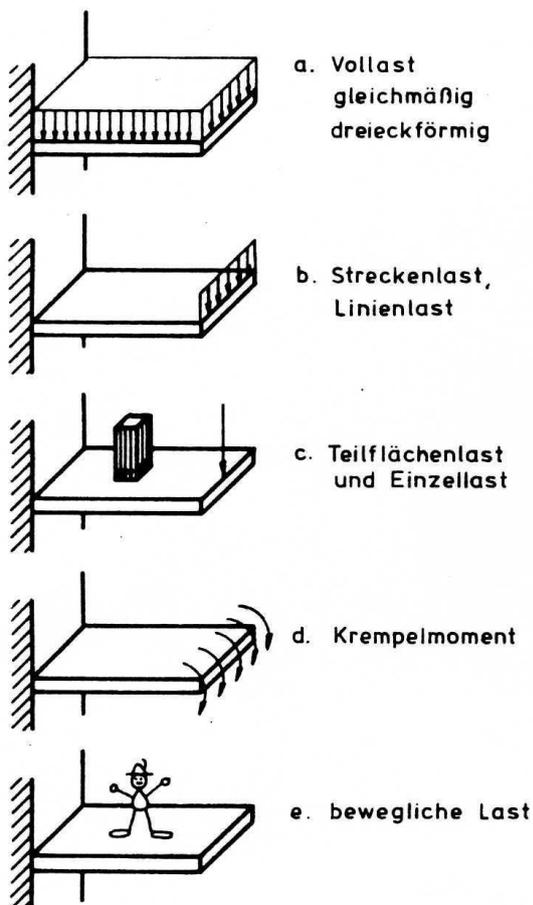
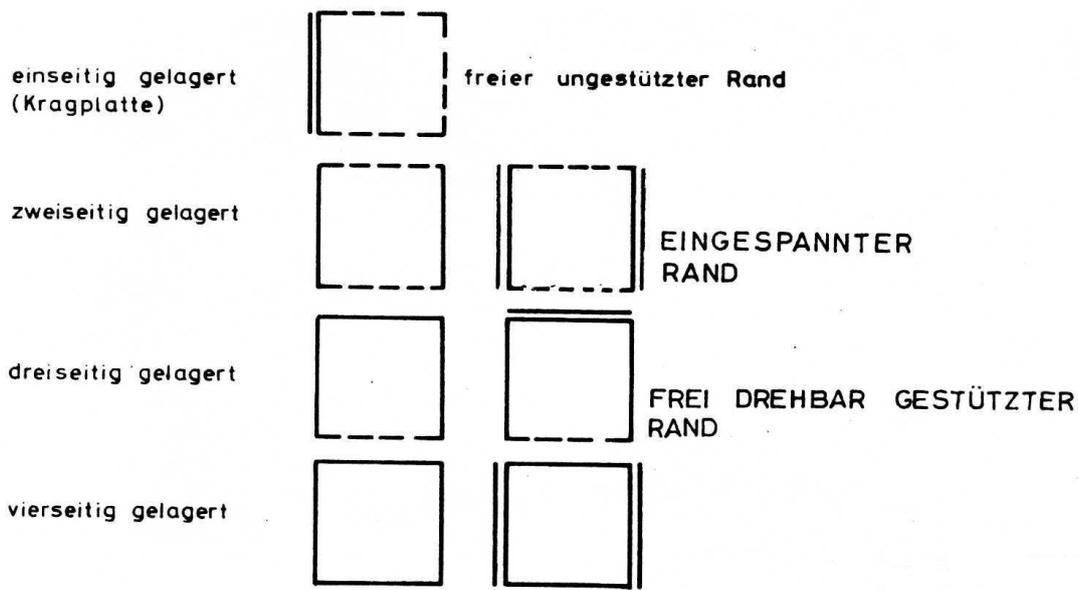


Drillbewehrung , Variante 2 (baupraktisch):



Wenn ein gelenkiger Rand und ein eingespannter Rand zusammentrifft, dann ist die Hälfte der erf. max. Feldbewehrung parallel zum eingespannten Rand einzulegen.

Czerny hat auf der Grundlage der Plattentheorie Tabellen für drillsteife, vierseitig gelagerte Rechteckplatten unter gleichmäßiger Vollbelastung mit Eckverankerung aufgestellt (siehe folgender Auszug aus dem Betonkalender I verschiedener älterer Jahrgänge, z. B. 1996)



Ortsbezeichnungen
in den Tafeln
nach CZERNY

Lagerungssymbole, Lastarten, Indizierungshilfe für Ortsbezeichnungen

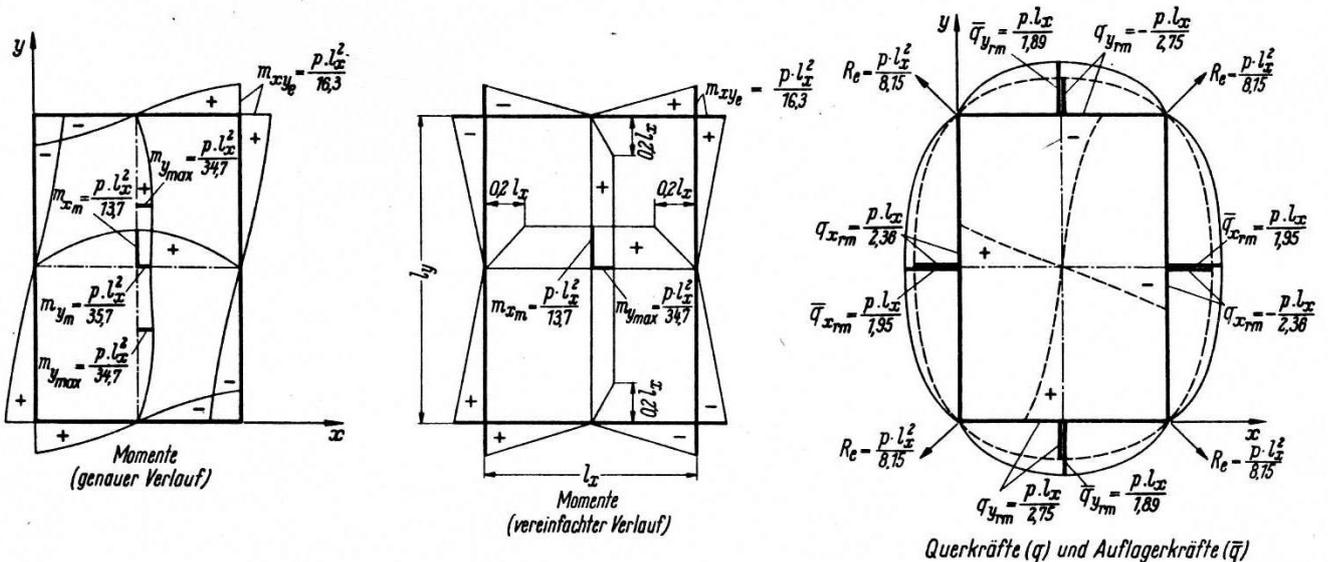
aus: Skript Prof. Specht TU Berlin, 1984

2.2 Tafeln für gleichmäßig vollbelastete vierseitig gelagerte Rechteckplatten

2.2.1 Einspannungsfreie Lagerung der vier Ränder

$l_y:l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{x\text{m}} =$	27,2	24,5	22,4	20,7	19,1	17,8	16,8	15,8	15,0	14,3	13,7
$m_{y\text{max}} =$	27,2	27,5	27,9	28,4	29,1	29,9	30,9	31,8	32,8	33,8	34,7
$m_{xy\text{e}} = \pm$	21,6	20,6	19,7	19,0	18,4	17,9	17,5	17,1	16,8	16,5	16,3
$R_e =$	10,8	10,3	9,85	9,5	9,2	8,95	8,75	8,55	8,4	8,25	8,15
$q_{x\text{rm}} = \pm$	2,96	2,87	2,78	2,71	2,64	2,58	2,52	2,47	2,43	2,39	2,36
$\bar{q}_{x\text{rm}} =$	2,19	2,15	2,11	2,07	2,04	2,02	2,00	1,98	1,97	1,96	1,95
$q_{y\text{rm}} = \pm$	2,96	2,92	2,89	2,86	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,75	2,75
$\bar{q}_{y\text{rm}} =$	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,99	1,96	1,94	1,92	1,90	1,89
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0487	0,0536	0,0584	0,0631	0,0678	0,0728	0,0767	0,0809	0,0850	0,0890	0,0927

$l_y:l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
$m_{x\text{m}} =$	13,7	13,2	12,7	12,3	11,9	11,5	11,3	11,0	10,8	10,6	10,4
$m_{y\text{max}} =$	34,7	35,4	36,1	36,7	37,3	37,9	38,5	38,9	39,4	39,8	40,3
$m_{xy\text{e}} = \pm$	16,3	16,1	15,9	15,7	15,6	15,5	15,4	15,3	15,3	15,2	15,1
$R_e =$	8,15	8,05	7,95	7,85	7,8	7,75	7,7	7,65	7,65	7,6	7,55
$q_{x\text{rm}} = \pm$	2,36	2,33	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21	2,19	2,18	2,16	2,15
$\bar{q}_{x\text{rm}} =$	1,95	1,94	1,93	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92
$q_{y\text{rm}} = \pm$	2,75	2,74	2,73	2,73	2,73	2,72	2,72	2,71	2,71	2,70	2,70
$\bar{q}_{y\text{rm}} =$	1,89	1,88	1,87	1,86	1,85	1,84	1,83	1,82	1,82	1,82	1,82
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0927	0,0963	0,0997	0,1029	0,1060	0,1093	0,1118	0,1145	0,1169	0,1195	0,1215



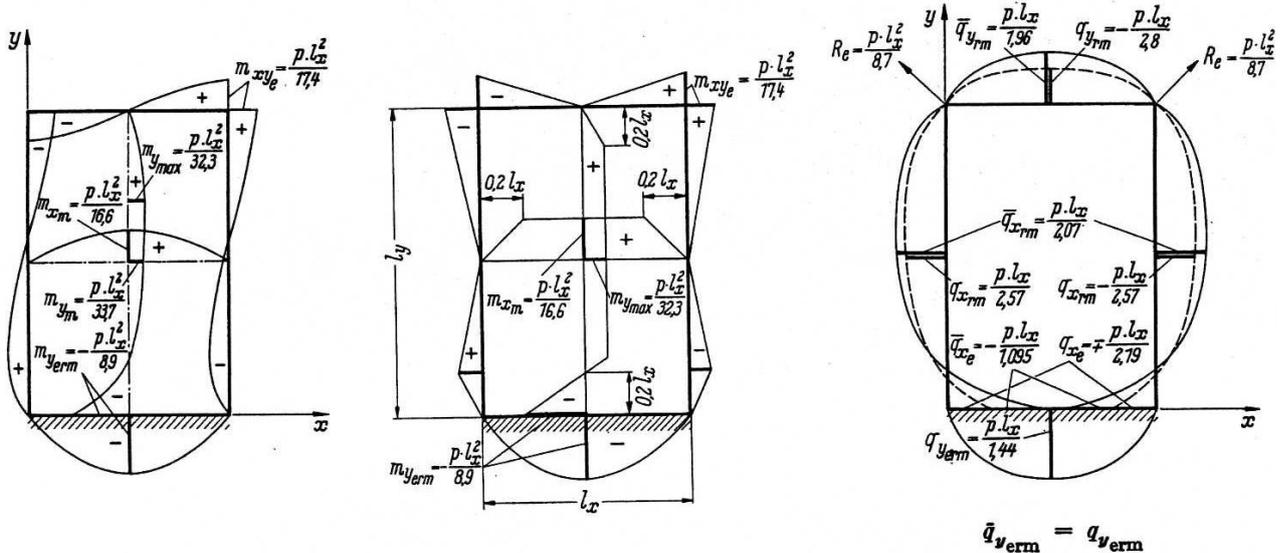
Verlauf der Schnittgrößen für das Seitenverhältnis $l_y:l_x = 1,5$

Tafeln entnommen aus: Czerny, F.: Tafeln für Rechteckplatten. Betonkalendar der 1996, Teil I, S. 277–330, Berlin, Ernst und Sohn.

2.2.2 Starre Einspannung eines Randes und einspannungsfreie Lagerung der drei anderen Ränder

$l_y:l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{x_m} =$	41,2	36,5	31,9	28,3	25,9	23,4	21,7	20,1	18,8	17,5	16,6
$m_{y_{erm}} = -$	11,9	11,3	10,9	10,4	10,1	9,8	9,6	9,3	9,2	9,0	8,9
$m_{y_{max}} =$	29,4	29,0	28,8	28,8	28,9	29,2	29,7	30,2	30,8	31,6	32,3
$m_{x_{ve}} = \pm$	26,2	24,5	23,2	21,9	21,0	20,1	19,4	18,7	18,3	17,7	17,4
$R_e =$	13,1	12,2	11,6	10,9	10,5	10,0	9,7	9,3	9,1	8,8	8,7
$q_{x_{rm}} = \pm$	3,54	3,39	3,25	3,13	3,02	2,92	2,83	2,76	2,69	2,63	2,57
$\bar{q}_{x_{rm}} =$	2,59	2,49	2,42	2,34	2,29	2,23	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07
$q_{y_{erm}} =$	1,72	1,67	1,63	1,59	1,56	1,53	1,51	1,49	1,47	1,45	1,44
$q_{y_{rm}} = -$	3,18	3,11	3,05	3,00	2,95	2,92	2,89	2,86	2,84	2,82	2,80
$\bar{q}_{y_{rm}} =$	2,47	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,04	2,01	1,98	1,96
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0334	0,0378	0,0422	0,0467	0,0512	0,0557	0,0602	0,0645	0,0689	0,0731	0,0773

$l_y:l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
$m_{x_m} =$	16,6	15,7	15,0	14,3	13,8	13,2	12,8	12,3	12,0	11,6	11,4
$m_{y_{erm}} = -$	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5	8,45	8,4	8,35	8,3	8,25	8,2
$m_{y_{max}} =$	32,3	33,0	33,6	34,3	34,9	35,6	36,2	36,9	37,5	38,2	38,8
$m_{x_{ve}} = \pm$	17,4	17,0	16,8	16,5	16,3	16,1	15,9	15,7	15,6	15,5	15,4
$R_e =$	8,7	8,5	8,4	8,2	8,1	8,0	7,9	7,8	7,8	7,7	7,7
$q_{x_{rm}} = \pm$	2,57	2,52	2,47	2,43	2,39	2,36	2,33	2,30	2,28	2,25	2,23
$\bar{q}_{x_{rm}} =$	2,07	2,05	2,03	2,01	1,99	1,98	1,97	1,96	1,96	1,95	1,95
$q_{y_{erm}} =$	1,44	1,43	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,38	1,37	1,37
$q_{y_{rm}} = -$	2,80	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,72	2,72	2,71	2,71
$\bar{q}_{y_{rm}} =$	1,96	1,94	1,92	1,90	1,89	1,88	1,87	1,86	1,85	1,84	1,84
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0773	0,0815	0,0852	0,0892	0,0926	0,0962	0,0994	0,1027	0,1056	0,1085	0,1112

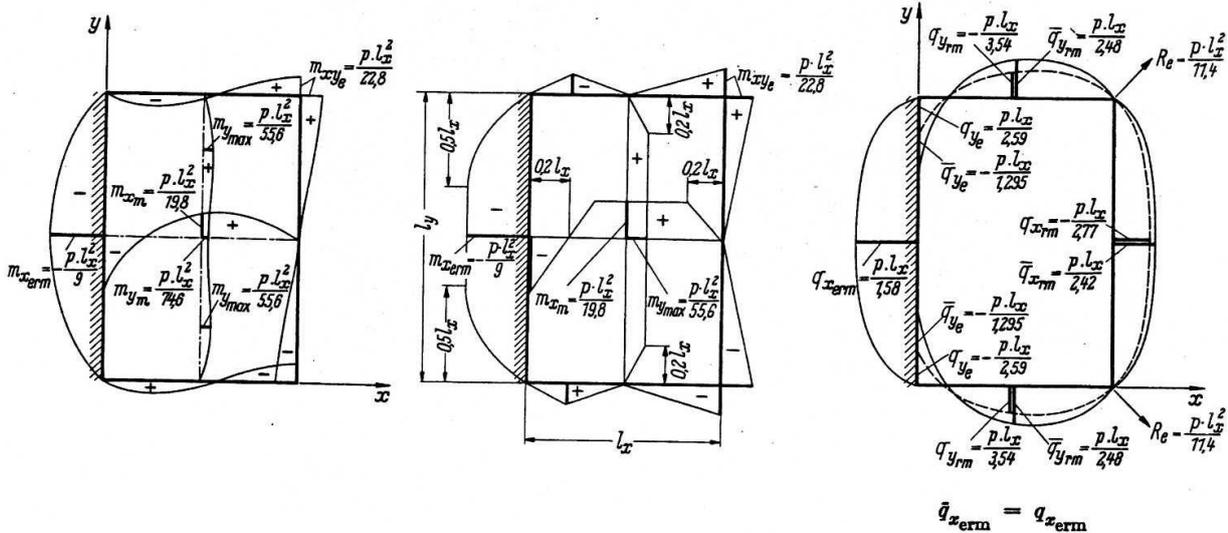


Verlauf der Schnittgrößen für das Seitenverhältnis $l_y:l_x = 1,5$

Tafeln entnommen aus: Czerny, F.: Tafeln für Rechteckplatten. Betonkalender 1996, Teil I, S. 277–330, Berlin, Ernst und Sohn.

$l_y : l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{xerm} = -$	11,9	11,3	10,9	10,5	10,2	9,9	9,7	9,4	9,3	9,1	9,0
$m_{xm} =$	31,4	29,2	27,3	25,8	24,5	23,4	22,4	21,6	21,0	20,3	19,8
$m_{ymax} =$	41,2	43,2	45,1	47,1	48,8	50,3	51,8	53,2	54,3	55,0	55,6
$m_{xye} = \pm$	26,2	25,4	24,9	24,4	24,0	23,7	23,5	23,2	23,0	22,9	22,8
$R_e =$	13,1	12,7	12,4	12,2	12,0	11,8	11,7	11,6	11,5	11,4	11,4
$q_{xerm} =$	1,72	1,69	1,67	1,65	1,63	1,62	1,61	1,60	1,59	1,58	1,58
$q_{xrm} = -$	3,18	3,11	3,05	2,99	2,94	2,90	2,87	2,84	2,81	2,79	2,77
$\bar{q}_{xrm} =$	2,47	2,44	2,42	2,41	2,41	2,40	2,40	2,40	2,41	2,41	2,42
$q_{yrm} = \pm$	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53	3,54
$\bar{q}_{yrm} =$	2,59	2,56	2,54	2,52	2,51	2,50	2,50	2,49	2,49	2,48	2,48
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0334	0,0357	0,0380	0,0401	0,0420	0,0438	0,0455	0,0472	0,0485	0,0498	0,0510

$l_y : l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
$m_{xerm} = -$	9,0	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5	8,4	8,3	8,3	8,3	8,3
$m_{xm} =$	19,8	19,4	19,0	18,6	18,3	18,0	17,8	17,5	17,4	17,2	17,1
$m_{ymax} =$	55,6	56,2	56,8	57,3	57,8	58,2	58,6	58,8	59,0	59,1	59,2
$m_{xye} = \pm$	22,8	22,7	22,6	22,5	22,5	22,4	22,4	22,4	22,4	22,4	22,4
$R_e =$	11,4	11,3	11,3	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2	11,2
$q_{xerm} =$	1,58	1,57	1,57	1,57	1,57	1,57	1,57	1,57	1,57	1,57	1,57
$q_{xrm} = -$	2,77	2,75	2,73	2,72	2,71	2,70	2,69	2,68	2,68	2,67	2,67
$\bar{q}_{xrm} =$	2,42	2,42	2,43	2,43	2,44	2,45	2,46	2,47	2,49	2,49	2,50
$q_{yrm} = \pm$	3,54	3,54	3,54	3,54	3,55	3,55	3,55	3,55	3,55	3,55	3,56
$\bar{q}_{yrm} =$	2,48	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0510	0,0521	0,0531	0,0541	0,0549	0,0556	0,0562	0,0569	0,0575	0,0580	0,0585



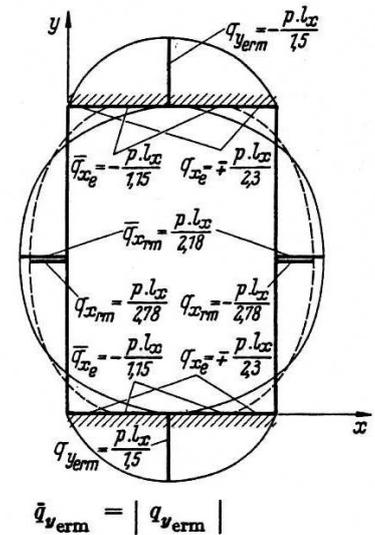
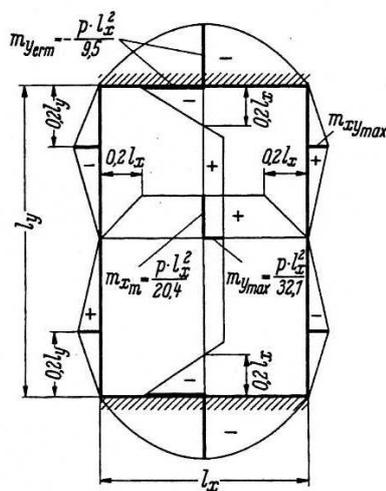
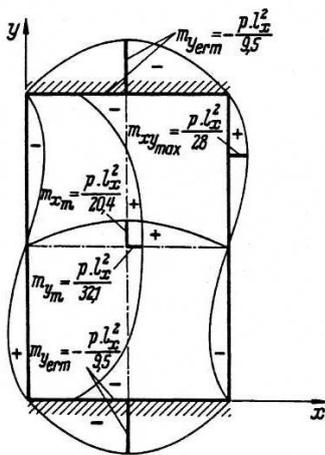
Verlauf der Schnittgrößen für das Seitenverhältnis $l_y : l_x = 1,5$

Tafeln entnommen aus: Czerny, F.: Tafeln für Rechteckplatten. Betonkalender 1996, Teil I, S. 277–330, Berlin, Ernst und Sohn.

2.2.3 Starre Einspannung von zwei gegenüberliegenden Rändern und einspannungsfreie Lagerung der beiden anderen Ränder

$l_y:l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	
$m_{x\text{m}} =$	63,3	52,2	46,1	39,8	35,5	31,5	28,5	25,8	23,7	22,0	20,4	
$m_{y\text{erm}} = -$	$p \cdot l_x^2 :$	14,3	13,4	12,7	12,0	11,5	11,1	10,7	10,3	10,0	9,75	9,5
$m_{y\text{max}} =$		35,1	33,7	32,9	32,2	31,7	31,3	31,2	31,2	31,4	31,7	32,1
$q_{x\text{rm}} = \pm$		4,09	3,87	3,70	3,54	3,39	3,27	3,15	3,05	2,95	2,86	2,78
$\bar{q}_{x\text{rm}} =$	$p \cdot l_x :$	2,95	2,82	2,71	2,60	2,52	2,44	2,38	2,32	2,27	2,22	2,18
$q_{y\text{erm}} = \pm$		1,94	1,86	1,80	1,74	1,69	1,65	1,61	1,58	1,55	1,52	1,50
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$		0,0230	0,0266	0,0303	0,0343	0,0383	0,0425	0,0467	0,0510	0,0553	0,0596	0,0639

$l_y:l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	
$m_{x\text{m}} =$	20,4	19,0	17,9	16,9	16,0	15,2	14,6	13,9	13,4	12,9	12,5	
$m_{y\text{erm}} = -$	$p \cdot l_x^2 :$	9,5	9,3	9,2	9,05	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5	8,4	8,4
$m_{y\text{max}} =$		32,1	32,7	33,3	34,0	34,9	35,9	37,1	38,3	39,7	41,1	42,4
$q_{x\text{rm}} = \pm$		2,78	2,71	2,65	2,59	2,54	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,32
$\bar{q}_{x\text{rm}} =$	$p \cdot l_x :$	2,18	2,14	2,11	2,09	2,07	2,05	2,03	2,01	2,00	1,99	1,98
$q_{y\text{erm}} = \pm$		1,50	1,47	1,46	1,44	1,43	1,42	1,41	1,40	1,40	1,39	1,39
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$		0,0639	0,0681	0,0722	0,0762	0,0802	0,0840	0,0878	0,0914	0,0949	0,0982	0,1013

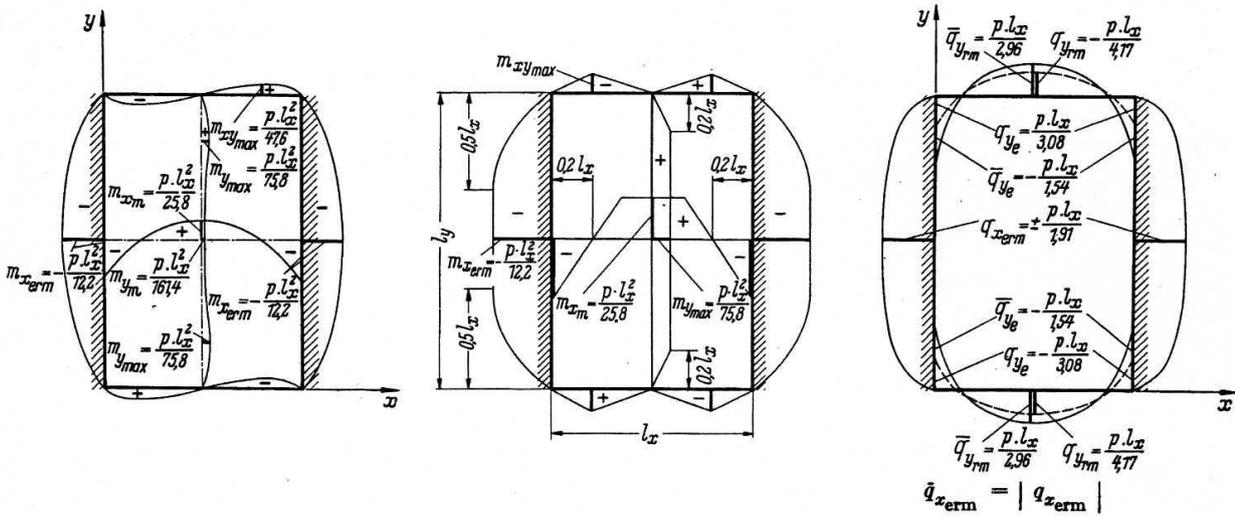


Verlauf der Schnittgrößen für das Seitenverhältnis $l_y:l_x = 1,5$

Tafeln entnommen aus: Czerny, F.: Tafeln für Rechteckplatten. Betonkalender 1996, Teil I, S. 277–330, Berlin, Ernst und Sohn.

$l_y:l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{x_{erm}} = -$	14,3	13,8	13,5	13,2	13,0	12,7	12,6	12,4	12,3	12,2	12,2
$m_{x_{m}} =$	35,1	33,0	31,7	30,4	29,4	28,5	27,8	27,1	26,6	26,1	25,8
$m_{y_{max}} =$	61,7	64,5	67,2	69,6	71,5	72,8	73,5	74,1	74,6	75,3	75,8
$q_{x_{erm}} = \pm$	1,94	1,92	1,91	1,90	1,90	1,90	1,90	1,90	1,90	1,90	1,91
$q_{y_{rm}} = \pm$	4,09	4,10	4,11	4,12	4,13	4,14	4,15	4,15	4,16	4,16	4,17
$\bar{q}_{y_{rm}} =$	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,96
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0230	0,0241	0,0251	0,0260	0,0267	0,0275	0,0280	0,0285	0,0289	0,0293	0,0297

$l_y:l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
$m_{x_{erm}} = -$	12,2	12,1	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0
$m_{x_{m}} =$	25,8	25,4	25,2	24,9	24,7	24,5	24,4	24,3	24,3	24,2	24,1
$m_{y_{max}} =$	75,8	76,5	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0
$q_{x_{erm}} = \pm$	1,91	1,91	1,92	1,92	1,93	1,93	1,94	1,94	1,95	1,95	1,95
$q_{y_{rm}} = \pm$	4,17	4,17	4,18	4,18	4,19	4,19	4,19	4,19	4,19	4,19	4,19
$\bar{q}_{y_{rm}} =$	2,96	2,96	2,96	2,96	2,96	2,96	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0297	0,0300	0,0302	0,0305	0,0307	0,0308	0,0309	0,0310	0,0311	0,0312	0,0313



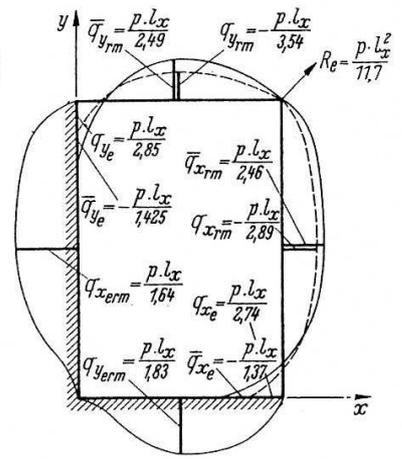
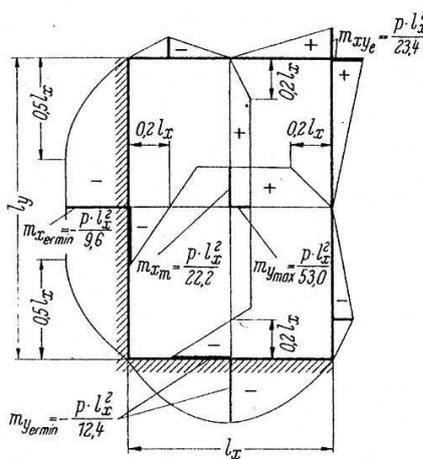
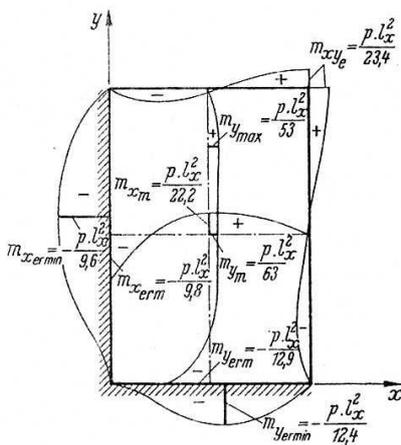
Verlauf der Schnittgrößen für das Seitenverhältnis $l_y:l_x = 1,5$

Tafeln entnommen aus: Czerny, F.: Tafeln für Rechteckplatten. Betonkalender 1996, Teil I, S. 277–330, Berlin, Ernst und Sohn.

2.2.4 Starre Einspannung von zwei benachbarten Rändern und einspannungsfreie Lagerung der beiden anderen Ränder

$l_y : l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{x\text{ermin}} = -$	14,3	13,3	12,7	12,0	11,5	11,1	10,7	10,3	10,0	9,8	9,6
$m_{x\text{rm}} =$	42,7	38,0	35,1	32,2	30,0	28,0	26,5	25,2	24,1	23,1	22,2
$m_{y\text{ermin}} = -$	14,3	13,8	13,6	13,3	13,1	12,9	12,8	12,7	12,6	12,5	12,4
$m_{y\text{max}} =$	40,2	41,0	42,0	42,9	44,0	45,6	47,6	49,6	51,0	52,1	53,0
$q_{x\text{erm}} =$	1,96	1,89	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,67	1,65	1,64	1,64
$q_{x\text{rm}} = -$	3,64	3,51	3,40	3,30	3,22	3,14	3,08	3,01	2,97	2,93	2,89
$\bar{q}_{x\text{rm}} =$	2,76	2,69	2,64	2,58	2,55	2,53	2,51	2,49	2,47	2,46	2,46
$q_{y\text{erm}} =$	1,96	1,93	1,90	1,88	1,87	1,86	1,85	1,84	1,84	1,83	1,83
$q_{y\text{rm}} = -$	3,64	3,61	3,59	3,57	3,55	3,54	3,54	3,54	3,54	3,54	3,54
$\bar{q}_{y\text{rm}} =$	2,76	2,69	2,65	2,61	2,59	2,56	2,54	2,52	2,51	2,50	2,49
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0252	0,0281	0,0302	0,0329	0,0348	0,0369	0,0389	0,0408	0,0426	0,0443	0,0459

$l_y : l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
$m_{x\text{ermin}} = -$	9,6	9,4	9,2	9,1	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5	8,4	8,4
$m_{x\text{rm}} =$	22,2	21,6	21,0	20,4	19,9	19,5	19,1	18,7	18,4	18,1	17,9
$m_{y\text{ermin}} = -$	12,4	12,3	12,3	12,2	12,2	12,2	12,2	12,2	12,2	12,2	12,2
$m_{y\text{max}} =$	53,0	54,1	54,8	55,6	56,3	57,0	57,7	58,3	59,0	59,6	60,2
$q_{x\text{erm}} =$	1,64	1,63	1,63	1,62	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58
$q_{x\text{rm}} = -$	2,89	2,87	2,83	2,80	2,78	2,76	2,75	2,74	2,73	2,72	2,71
$\bar{q}_{x\text{rm}} =$	2,46	2,46	2,46	2,47	2,47	2,47	2,48	2,48	2,48	2,49	2,49
$q_{y\text{erm}} =$	1,83	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82
$q_{y\text{rm}} = -$	3,54	3,54	3,54	3,54	3,54	3,54	3,54	3,54	3,54	3,54	3,55
$\bar{q}_{y\text{rm}} =$	2,49	2,49	2,49	2,49	2,48	2,48	2,48	2,48	2,47	2,47	2,47
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0459	0,0472	0,0484	0,0496	0,0508	0,0519	0,0529	0,0538	0,0547	0,0554	0,0562



$\bar{q}_{x\text{erm}} = q_{x\text{erm}}$
 $\bar{q}_{y\text{erm}} = q_{y\text{erm}}$

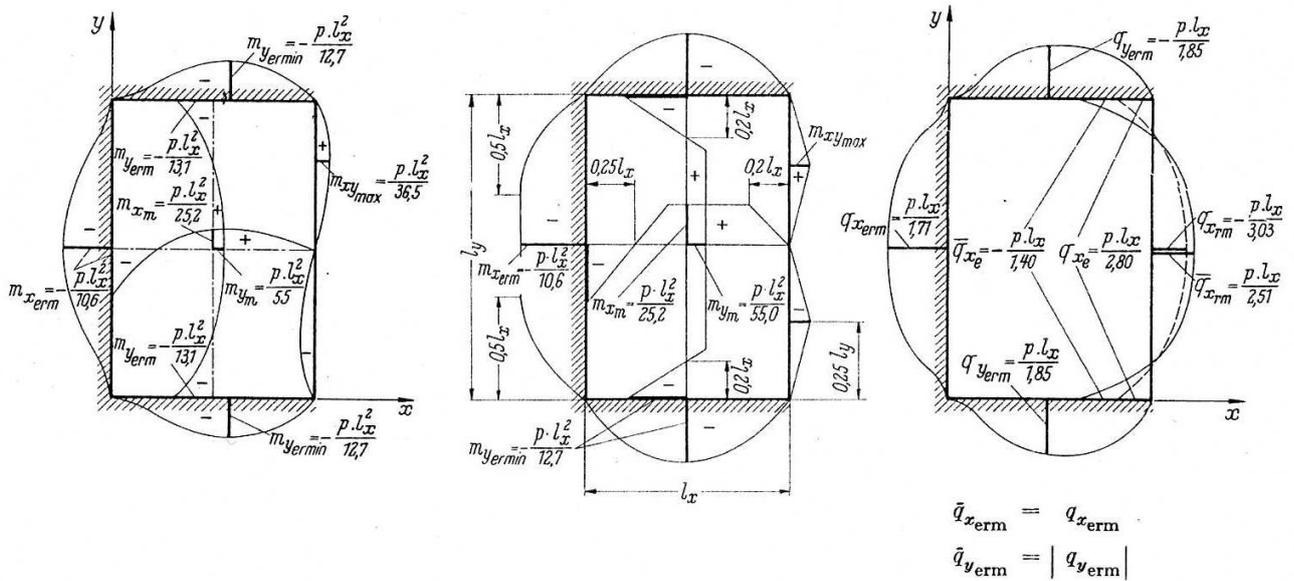
Verlauf der Schnittgrößen für das Seitenverhältnis $l_y : l_x = 1,5$

Tafeln entnommen aus: Czerny, F.: Tafeln für Rechteckplatten. Betonkalender 1996, Teil I, S. 277–330, Berlin, Ernst und Sohn.

2.2.5 Starre Einspannung von drei Rändern und einspannungsfreie Lagerung des vierten Randes

$l_y:l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{xerm} = -$	18,3	16,6	15,4	14,4	13,5	12,7	12,2	11,6	11,2	10,9	10,6
$m_{xrm} =$	59,5	51,6	46,1	41,4	37,5	34,2	31,8	29,6	28,0	26,4	25,2
$m_{yermmin} = -$	16,2	15,4	14,8	14,3	13,9	13,5	13,3	13,1	13,0	12,8	12,7
$m_{ym} =$	44,1	43,6	43,7	44,2	44,8	45,8	46,9	48,6	50,3	52,3	55,0
$q_{xerm} =$	2,21	2,10	2,01	1,95	1,89	1,85	1,81	1,78	1,76	1,73	1,71
$q_{xrm} = -$	4,11	3,94	3,77	3,63	3,50	3,40	3,30	3,22	3,14	3,08	3,03
$\bar{q}_{xrm} =$	3,04	2,92	2,84	2,77	2,70	2,65	2,61	2,57	2,54	2,52	2,51
$q_{yerm} = \pm$	2,11	2,05	2,00	1,97	1,94	1,91	1,89	1,87	1,86	1,85	1,85
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0188	0,0212	0,0236	0,0260	0,0284	0,0308	0,0329	0,0351	0,0371	0,0391	0,0409

$l_y:l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
$m_{xerm} = -$	10,6	10,3	10,1	9,9	9,7	9,5	9,4	9,2	9,0	8,9	8,8
$m_{xrm} =$	25,2	24,2	23,3	22,5	21,7	21,1	20,5	20,0	19,5	19,1	18,7
$m_{yermmin} = -$	12,7	12,6	12,6	12,5	12,5	12,4	12,4	12,3	12,3	12,3	12,3
$m_{ym} =$	55,0	58,2	61,6	65,6	70,4	75,0	79,6	84,7	89,8	95,4	101,0
$q_{xerm} =$	1,71	1,70	1,69	1,68	1,67	1,66	1,65	1,64	1,63	1,62	1,61
$q_{xrm} = -$	3,03	2,99	2,95	2,91	2,88	2,85	2,83	2,80	2,77	2,76	2,75
$\bar{q}_{xrm} =$	2,51	2,50	2,50	2,49	2,49	2,48	2,48	2,48	2,47	2,47	2,47
$q_{yerm} = \pm$	1,85	1,84	1,84	1,84	1,84	1,83	1,83	1,83	1,83	1,82	1,82
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0409	0,0426	0,0442	0,0457	0,0471	0,0484	0,0495	0,0507	0,0518	0,0529	0,0539

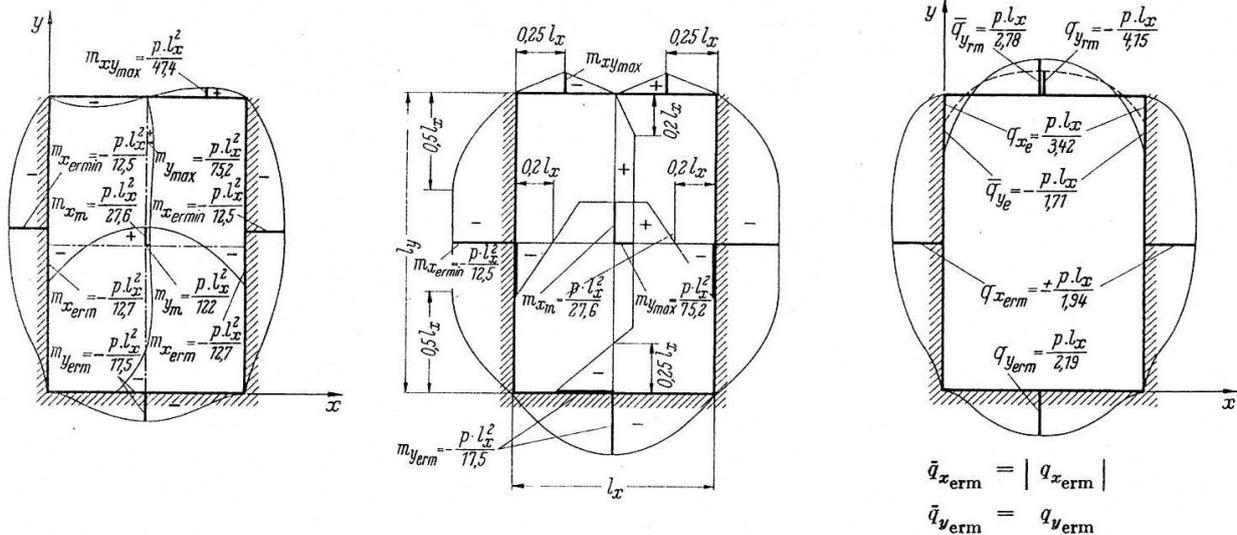


Verlauf der Schnittgrößen für das Seitenverhältnis $l_y:l_x = 1,5$

Tafeln entnommen aus: Czerny, F.: Tafeln für Rechteckplatten. Betonkalendar 1996, Teil I, S. 277–330, Berlin, Ernst und Sohn.

$l_y : l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	
$m_{x\text{ermin}} = -$	} $p \cdot l_x^2 :$	16,2	15,3	14,8	14,2	13,9	13,5	13,2	12,9	12,7	12,6	12,5
$m_{x\text{m}} =$		44,1	40,5	37,9	35,5	33,8	32,3	31,0	29,9	29,0	28,2	27,6
$m_{y\text{erm}} = -$		18,3	17,9	17,7	17,6	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5
$m_{y\text{max}} =$		55,9	57,5	60,3	64,2	66,2	67,7	69,0	70,5	72,0	73,4	75,2
$q_{x\text{erm}} = \pm$	} $p \cdot l_x :$	2,11	2,05	2,01	1,97	1,96	1,94	1,93	1,92	1,92	1,93	1,94
$q_{y\text{erm}} =$		2,21	2,14	2,10	2,09	2,09	2,10	2,11	2,12	2,13	2,16	2,19
$q_{y\text{rm}} = -$		4,11	4,10	4,10	4,10	4,11	4,12	4,13	4,14	4,15	4,15	4,15
$\bar{q}_{y\text{rm}} =$		3,04	2,93	2,87	2,83	2,81	2,79	2,79	2,78	2,78	2,78	2,78
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$		0,0188	0,0202	0,0214	0,0226	0,0236	0,0245	0,0253	0,0261	0,0268	0,0274	0,0280

$l_y : l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	
$m_{x\text{ermin}} = -$	} $p \cdot l_x^2 :$	12,5	12,4	12,3	12,2	12,2	12,1	12,1	12,0	12,0	12,0	12,0
$m_{x\text{m}} =$		27,6	27,0	26,5	26,1	25,7	25,3	25,1	24,9	24,7	24,6	24,5
$m_{y\text{erm}} = -$		17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5
$m_{y\text{max}} =$		75,2	76,9	78,7	80,5	82,5	84,6	86,8	89,2	91,7	94,3	97,0
$q_{x\text{erm}} = \pm$	} $p \cdot l_x :$	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,95	1,95	1,95
$q_{y\text{erm}} =$		2,19	2,19	2,19	2,19	2,19	2,20	2,20	2,20	2,21	2,21	2,21
$q_{y\text{rm}} = -$		4,15	4,15	4,15	4,15	4,15	4,15	4,15	4,15	4,15	4,15	4,15
$\bar{q}_{y\text{rm}} =$		2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$		0,0280	0,0285	0,0289	0,0294	0,0298	0,0301	0,0303	0,0305	0,0307	0,0308	0,0309



Verlauf der Schnittgrößen für das Seitenverhältnis $l_y : l_x = 1,5$

Tafeln entnommen aus: Czerny, F.: Tafeln für Rechteckplatten. Betonkalender 1996, Teil I, S. 277–330, Berlin, Ernst und Sohn.

Ergänzende Hinweise zur Anwendung der Czerny-Tafeln:

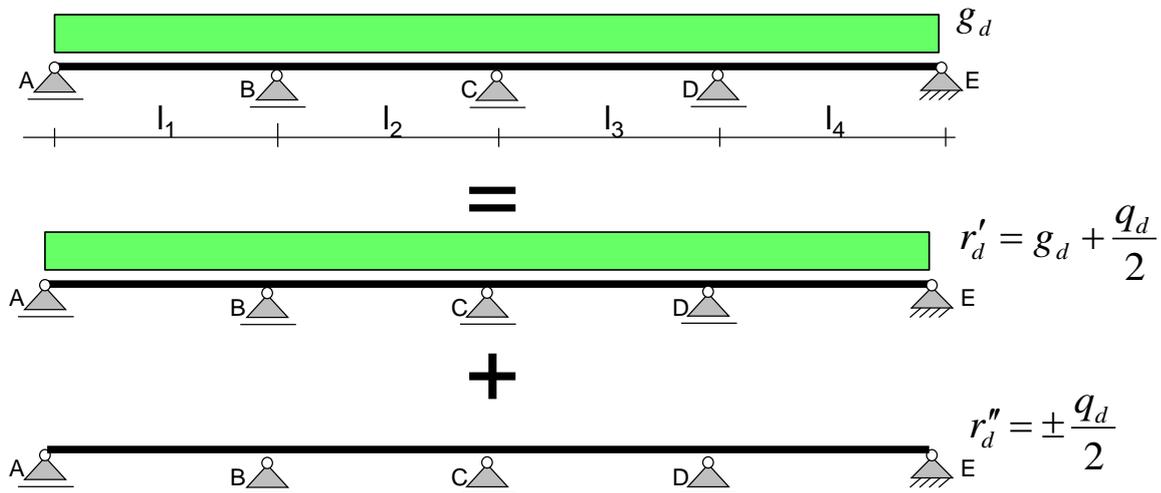
1. Gerissene Stahlbetonplatten (Platten im Zustand II) sind mit einer Querdehnung von $\mu = 0$ zu bemessen, für Platten im Zustand I kann eine Querdehnung von $\mu = 0,2$ angenommen werden. Die Czerny-Tafelwerte sind für $\mu = 0$ erstellt.
2. Die von Czerny angegebenen Durchbiegungswerte gelten nur für ungerissene Platten im Zustand I. Da Platten bereits im Gebrauchszustand in Teilbereichen gerissen sind und etwa die 2-4fachen elastischen Durchbiegungen erreichen, können diese Werte nicht ohne Erhöhungsfaktoren verwendet werden. Durchbiegungen sollten besser direkt unter Berücksichtigung der Steifigkeit im gerissenen Zustand II ermittelt werden. In der Regel genügt die Beschränkung der Biegeschlankheit.
3. Vollplatten können im Allgemeinen als drillsteif angenommen werden. Ihre Drillsteifigkeit wird durch nachfolgende Einflüsse herabgesetzt:
 - Die Plattenecken sind ohne Drillbewehrung ausgeführt
 - Ecken sind gegen Abheben nicht gesichert
 - in den Plattenecken sind größere Öffnungen
 - Als Ausgleich können erhöhte Feldmomente, z. B. nach Heft 240, berücksichtigt werden.
4. Kassettendecken, die zur Gewichtsreduzierung bei größeren Spannweiten ausgeführt werden können, oder ähnliche Deckenkonstruktionen können als nahezu drillweiche Platten betrachtet werden. Diese können mit Tafeln von Stiglat/Wippel (BK verschiedener Jahrgänge) berechnet werden.
5. Die Bewehrung darf entsprechend der vereinfachten Momentenlinie in Längsrichtung gestaffelt werden. Es müssen jedoch mindestens 50% der Feldbewehrung (EC2, 9.3.1.2.(1)) und nicht weniger als die Robustheitsbewehrung (EC2, 9.2.1.1.(1)) bis über die Auflager geführt werden.
6. Die Länge der Stützbewehrung sollte $0,3 \cdot l_x$ betragen, hierbei sind Versatzmaß und Verankerungslängen bereits pauschal berücksichtigt.

B1.1.2 Mehrfeldplatten

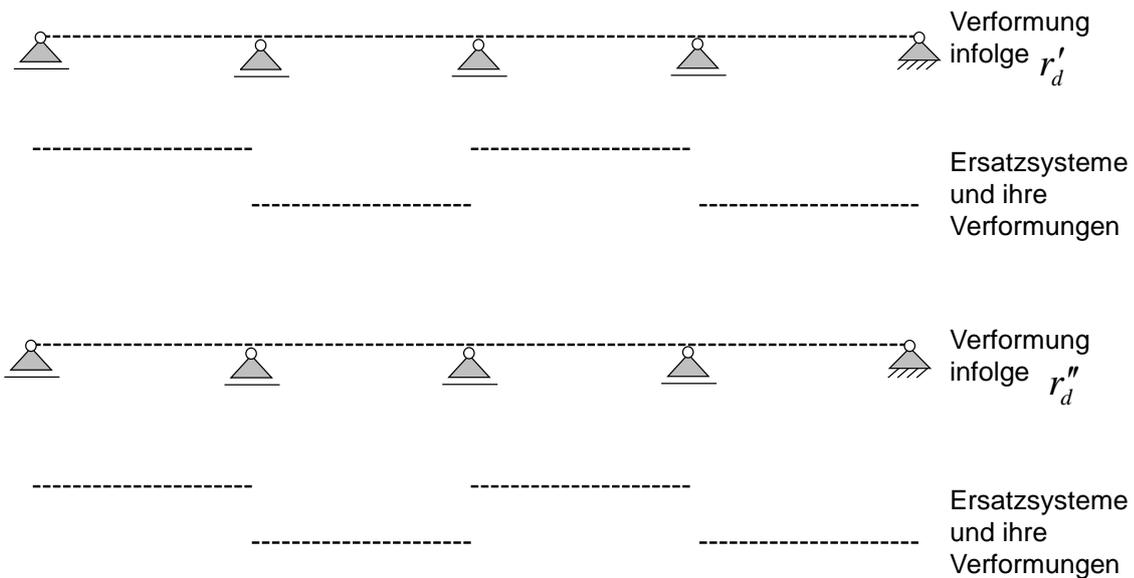
B1.1.2.1 Regelmäßige Mehrfeldplatten nach Belastungsumordnungs-Verfahren (BUV)

Einführung: BUV am DLT

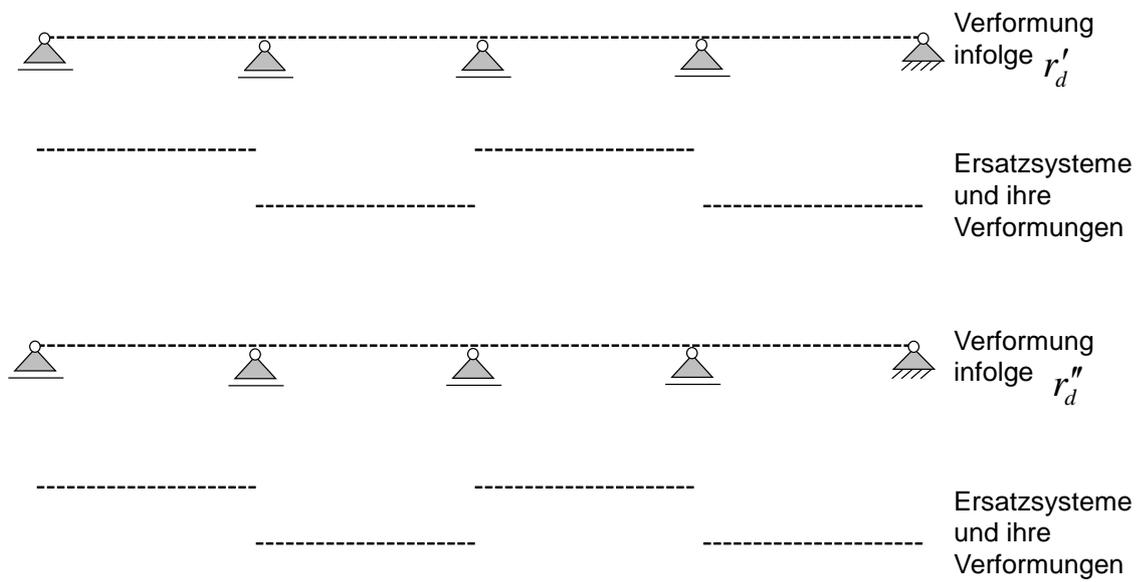
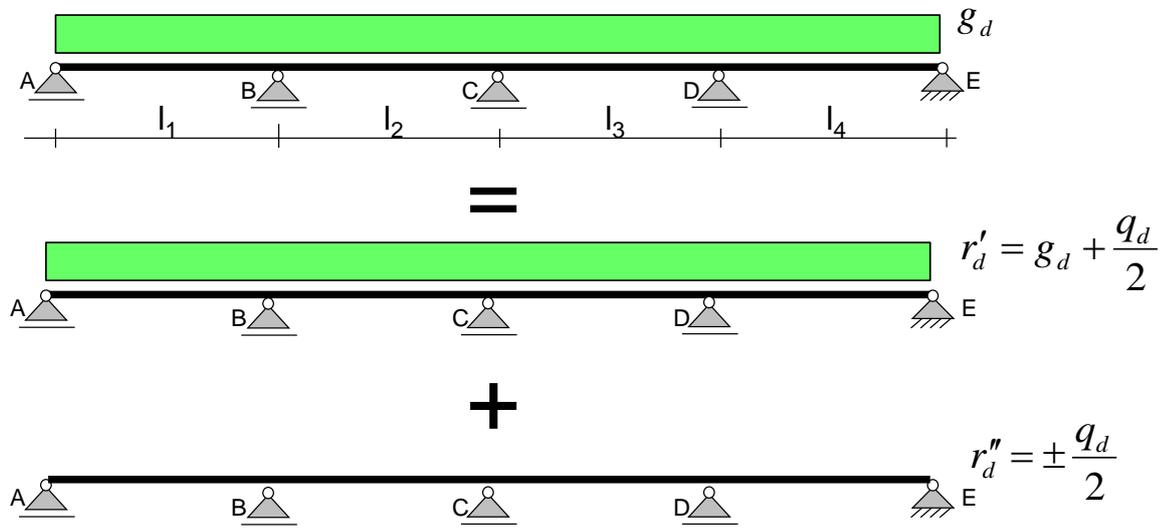
a) maximales Feldmoment in Feld 1:



BUV: **B**elastungs-**U**mordnungs-**V**erfahren

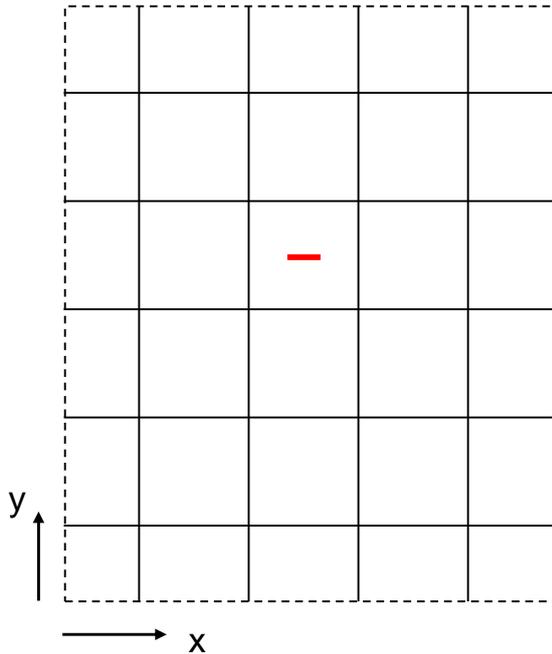


b) minimales Stützmoment über B:



Übertragung BUV auf zweiachsig gespannte, regelmäßige Mehrfeldplatten

Gesucht ist die ungünstigste Laststellung von r_d'' für das max. Feldmoment des markierten Feldes in x-Richtung

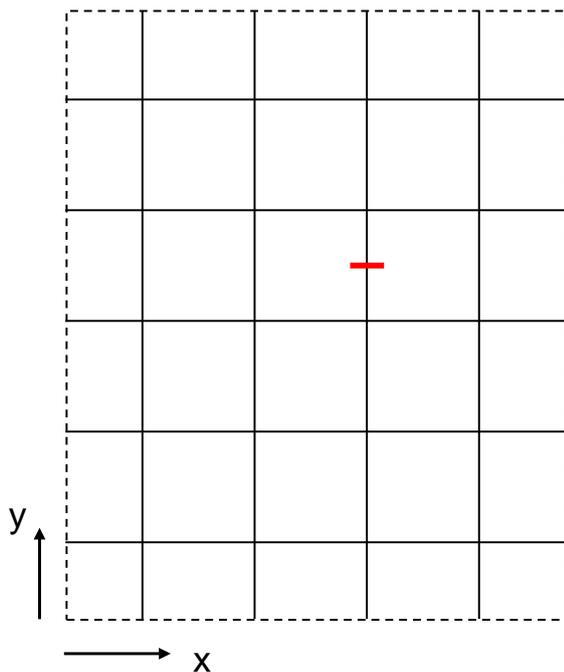


Ist diese Lastanordnung auch für die max. Momente in der y-Richtung gültig?

Berechnung für r_d'' an welcher Ersatzplatte?

Berechnung für r_d' an welcher Ersatzplatte?

Gesucht ist die ungünstigste Laststellung von r_d'' für das min. Stützmoment des markierten Randes in x-Richtung

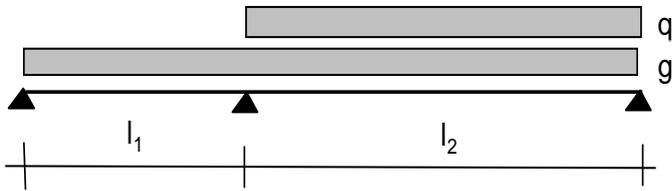


Berechnung für r_d'' an welchen Ersatzplatten?

Berechnung für r_d' an welchen Ersatzplatten?

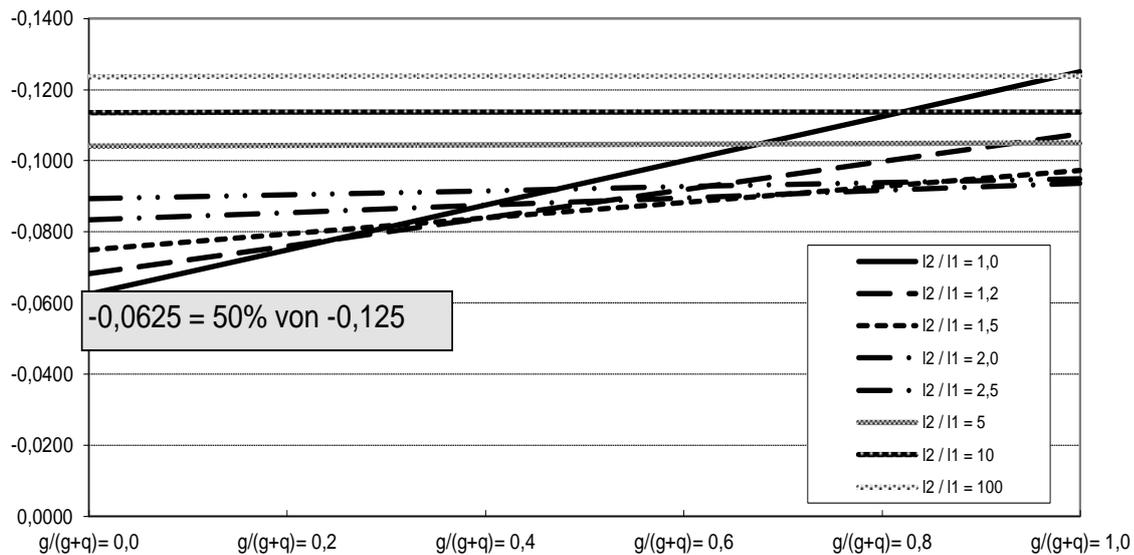
B1.1.2.2 Unregelmäßige Mehrfeldplatten nach Pieper/Martens

Einführung: Grundlegende Überlegungen am unregelmäßigen Zweifeldträger (sehr unterschiedliche Stützweiten)



zu den maximalen Feldmomenten zugehörige Stützmomente ($TW \cdot (g+q) \cdot l_2^2$)

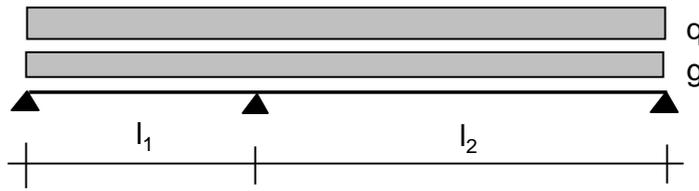
$l_2/l_1 =$	$g/(g+q) = 0,0$	$g/(g+q) = 0,2$	$g/(g+q) = 0,4$	$g/(g+q) = 0,6$	$g/(g+q) = 0,8$	$g/(g+q) = 1,0$
1,0	-0,0625	-0,0750	-0,0875	-0,1000	-0,1125	-0,1250
1,2	-0,0682	-0,0761	-0,0840	-0,0919	-0,0997	-0,1076
1,5	-0,0750	-0,0794	-0,0839	-0,0883	-0,0928	-0,0972
2,0	-0,0833	-0,0854	-0,0875	-0,0896	-0,0917	-0,0938
2,5	-0,0893	-0,0904	-0,0916	-0,0927	-0,0939	-0,0950
5	-0,1042	-0,1043	-0,1045	-0,1047	-0,1048	-0,1050
10	-0,1136	-0,1137	-0,1137	-0,1137	-0,1137	-0,1138
100	-0,1238	-0,1238	-0,1238	-0,1238	-0,1238	-0,1238



minimale Stützmomente ($TW \cdot (g+q) \cdot l_2^2$)

$l_2/l_1 =$	alle $g/(g+q)$
1,0	-0,1250
1,2	-0,1076
1,5	-0,0972
2,0	-0,0938
2,5	-0,0950
5	-0,1050
10	-0,1138
100	-0,1238





$l_2/l_1=$	genauer Wert	Mittelwert	Mind.wert
1	-0,125	-0,1250	-0,0938
1,2	-0,108	-0,1059	-0,0938
1,3	-0,103	-0,0995	-0,0938
1,4	-0,099	-0,0944	-0,0938
1,5	-0,097	-0,0903	-0,0938
1,6	-0,096	-0,0869	-0,0938
1,7	-0,095	-0,0841	-0,0938
1,8	-0,09414	-0,0818	-0,0938
1,9	-0,0938	-0,0798	-0,0938
2	-0,0938	-0,0781	-0,0938
3	-0,0972	-0,0694	-0,0938
4	-0,102	-0,0664	-0,0938
5	-0,105	-0,0650	-0,1250
6	-0,108	-0,0642	-0,1250
7	-0,110	-0,0638	-0,1250

Nachfolgende Tafeln entnommen aus: Goris:Stahlbetonbau-Praxis nach DIN 1045-1, Band2, Bauwerk-Verlag

<http://www.bauwerk-verlag.de/ergaenzungen/9783899322132-Goris-Stahlbeton-Bd.2-A3-Probeseiten.pdf>

Das Berechnungsverfahren nach *Pieper/Martens* geht von gleicher Steifigkeit in Längs- und Querrichtung aus. Es gelten folgende Belastungsgrenzen:

$$q \leq 2 \cdot (g + q) / 3 \text{ bzw. } q \leq 2 \cdot g$$

Die *Feldmomente* werden im Regelfall (Sonderfälle s. nachfolgend) wie folgt ermittelt

$$\begin{array}{l} \text{Platten mit voller Drilltragfähigkeit: } m_{fx} = (g+q) \cdot l_x^2 / f_x \quad \left| \quad m_{fy} = (g+q) \cdot l_x^2 / f_y \\ \text{Platten mit begrenzter Drilltragfähigkeit: } m_{fx} = (g+q) \cdot l_x^2 / f_x^0 \quad \left| \quad m_{fy} = (g+q) \cdot l_x^2 / f_y^0 \end{array}$$

Für die *Stützmomente* gilt:
$$m_{s0,x} = -(g+q) \cdot l_x^2 / s_x \quad \left| \quad m_{s0,y} = -(g+q) \cdot l_x^2 / s_y$$

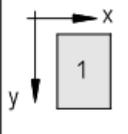
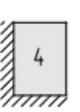
Bei unterschiedlichen Einspannmomenten von zusammenstoßenden Plattenrändern werden die Momente m_{s0} gemittelt (nicht zu mitteln sind Kragmomente und Einspannmomente in sehr steifen Bauteilen; s.u.):

$$\text{Stützweitenverhältnis } l_1 : l_2 < 5 : 1 \rightarrow m_s \geq \begin{cases} |0,5 \cdot (m_{s0,1} + m_{s0,2})| \\ 0,75 \cdot \max(|m_{s0,1}| ; |m_{s0,2}|) \end{cases}$$

$$\text{Stützweitenverhältnis } l_1 : l_2 > 5 : 1 \rightarrow m_s \geq \max(|m_{s0,1}| ; |m_{s0,2}|)$$

Die so gemittelten Stützmomente gelten unmittelbar als Bemessungswerte (s. a. [DAfStb-H240 – 91]).

Tafel 4.5 Momentenbeiwerte für eine Berechnung nach Pieper/Martens

Stützungsart	Beiwert	Stützweitenverhältnis l_y / l_x bzw. l'_y / l'_x (l_x bzw. $l'_x = l_{\min}$)											
		1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	$\rightarrow \infty$
	f_x	27,2	22,4	19,1	16,8	15,0	13,7	12,7	11,9	11,3	10,8	10,4	8,0
	f_y	27,2	27,9	29,1	30,9	32,8	34,7	36,1	37,3	38,5	39,4	40,3	*
	f_x^0	20,0	16,6	14,5	13,0	11,9	11,1	10,6	10,2	9,8	9,5	9,3	8,0
	f_y^0	20,0	20,7	22,1	24,0	26,2	28,3	30,2	31,9	33,4	34,7	35,9	*
	f_x	32,8	26,3	22,0	18,9	16,7	15,0	13,7	12,8	12,0	11,4	10,9	8,0
	f_y	29,1	29,2	29,8	30,6	31,8	33,5	34,8	36,1	37,3	38,4	39,5	*
	s_y	11,9	10,9	10,1	9,6	9,2	8,9	8,7	8,5	8,4	8,3	8,2	8,0
	f_x^0	26,4	21,4	18,2	15,9	14,3	13,0	12,1	11,5	10,9	10,4	10,1	8,0
	f_x	29,1	24,6	21,5	19,2	17,5	16,2	15,2	14,4	13,8	13,3	12,9	10,2
	f_y	32,8	34,5	36,8	38,8	40,9	42,7	44,1	45,3	46,5	47,2	47,9	*
	s_x	11,9	10,9	10,2	9,7	9,3	9,0	8,8	8,6	8,4	8,3	8,3	8,0
	f_x^0	22,4	19,2	17,2	15,7	14,7	13,9	13,2	12,7	12,3	12,0	11,8	10,2
	f_x	38,0	30,2	24,8	21,1	18,4	16,4	14,8	13,6	12,7	12,0	11,4	8,0
	f_y	30,6	30,2	30,3	31,0	32,2	33,8	35,9	38,3	41,1	44,9	46,3	*
	s_y	14,3	12,7	11,5	10,7	10,0	9,5	9,2	8,9	8,7	8,5	8,4	8,0
	f_x^0	26,4	22,8	23,9	25,1	26,7	28,6	30,4	32,0	33,4	34,8	36,2	*
	f_x	30,6	26,3	23,2	20,9	19,2	17,9	16,9	16,1	15,4	14,9	14,5	12,0
	f_y	38,0	39,5	41,4	43,5	45,6	47,6	49,1	50,3	51,3	52,1	52,9	*
	s_x	14,3	13,5	13,0	12,6	12,3	12,2	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0	12,0
	f_x^0	22,4	19,2	17,2	15,7	14,7	13,9	13,2	12,7	12,3	12,0	11,8	10,2
	f_x	33,2	27,3	23,3	20,6	18,5	16,9	15,8	14,9	14,2	13,6	13,1	10,2
	f_y	33,2	34,1	35,5	37,7	39,9	41,9	43,5	44,9	46,2	47,2	48,3	*
	s_x	14,3	12,7	11,5	10,7	10,0	9,6	9,2	8,9	8,7	8,5	8,4	8,0
	s_y	14,3	13,6	13,1	12,8	12,6	12,4	12,3	12,2	12,2	12,2	12,2	11,2
	f_x^0	26,7	22,1	19,2	17,2	15,7	14,6	13,8	13,2	12,7	12,3	12,0	10,2
	f_y^0	26,7	27,6	29,2	31,4	33,8	36,2	38,1	39,8	41,4	42,8	44,2	*
	f_x	33,6	28,2	24,4	21,8	19,8	18,3	17,2	16,3	15,6	15,0	14,6	12,0
	f_y	37,3	38,7	40,4	42,7	45,1	47,5	49,5	51,4	53,3	55,1	58,9	*
	s_x	16,2	14,8	13,9	13,2	12,7	12,5	12,3	12,2	12,1	12,0	12,0	12,0
	s_y	18,3	17,7	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5
	f_x	37,3	30,3	25,3	22,0	19,5	17,7	16,4	15,4	14,6	13,9	13,4	10,2
	f_y	33,6	34,1	35,1	37,3	39,8	43,1	46,6	52,3	55,5	60,5	66,1	*
	s_x	18,3	15,4	13,5	12,2	11,2	10,6	10,1	9,7	9,4	9,0	8,9	8,0
	s_y	16,2	14,8	13,9	13,3	13,0	12,7	12,6	12,5	12,4	12,3	12,3	11,2
	f_x	36,8	30,2	25,7	22,7	20,4	18,7	17,5	16,5	15,7	15,1	14,7	12,0
	f_y	36,8	38,1	40,4	43,5	47,1	50,6	52,8	54,5	56,1	57,3	58,3	*
	s_x	19,4	17,1	15,5	14,5	13,7	13,2	12,8	12,5	12,3	12,1	12,0	12,0
	s_y	19,4	18,4	17,9	17,6	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5

B1.2 Bemessung

B1.2.1 Bemessung im GZT für Biegung

B1.2.2 Bemessung im GZT für Querkraft

B1.2.3 Nachweise im GZG (Spannungen, Rissbreiten, Verformungen)

B1.3 Konstruktion

B2 Stützen und Rahmen

B2.1 Tragverhalten und Schnittgrößen

Rahmen sind Tragwerke, die aus verschiedenen stabförmigen Bauteilen, Balken und Stützen, genannt Riegel und Stiele, zusammengesetzt sind und sowohl durch Biegemomente und Querkräfte als auch durch Normalkräfte beansprucht werden. Die Verbindung der Stäbe ist im Stahlbetonbau meist biegesteif. Wir unterscheiden räumliche und ebene Rahmensysteme. Seit Euklid den rechten Winkel erfunden hat, werden viele Baukonstruktionen rechtwinklig ausgebildet, daher sind auch die Rahmenstäbe meistens rechtwinklig miteinander verbunden. In vielen Fällen bestehen also Rahmen aus horizontalen Balken, genannt Rahmenriegel, und vertikalen Stützen, genannt Rahmenstiele. Wir kennen einschiffige und mehrschiffige Rahmen, letztere sind quasi aus mehreren einschiffigen Rahmen aneinandergesetzt, sowie eingeschossige und mehrgeschossige Rahmen (s. Bild B2-1 und Bild B2-2).

In den folgenden Abschnitten beschränken wir uns auf ebene Rahmensysteme.

Wir unterscheiden **verschiebliche** und **unverschiebliche** Rahmen. Bei unverschieblichen Rahmen werden die Rahmenriegel aller Geschosse als jeweils horizontal gehalten angesehen, die Knotenpunkte können sich also seitlich nicht verschieben. Horizontal angreifende Beanspruchungen werden in jeder Riegelebene von den horizontalen Halterungen aufgenommen. Die horizontale Halterung wird durch die Deckenscheiben realisiert, die ihrerseits durch aussteifende Wände und/oder Kerne (Treppenhäuser, Aufzugsschächte) seitlich gestützt werden.

In den meisten unverschieblichen Rahmensystemen werden die Riegel durch Geschosslasten überwiegend auf Biegung beansprucht, die Normalkräfte sind häufig vernachlässigbar klein. Bei den Stielen ist es umgekehrt.

Vorüberlegungen zur Berechnung von Rahmensystemen

Für die nachfolgenden Systeme sollen die Biegeverformungen und die Momentenlinien qualitativ ermittelt werden. Dabei wird insbesondere Wert auf die Darstellung der Wendepunkte gelegt. In Bild B2-3 und Bild B2-4 werden zusätzlich die Momente quantitativ entsprechend einer Verteilung nach Biegesteifigkeiten bestimmt.

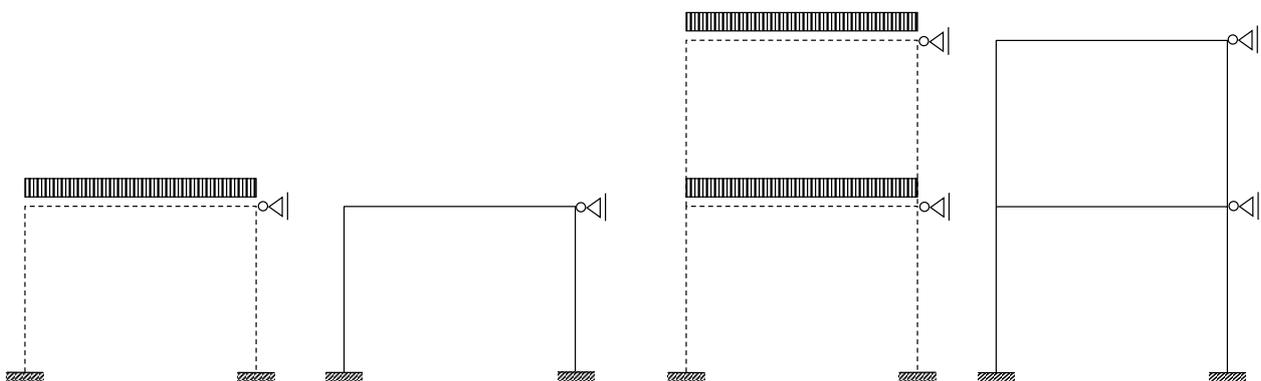


Bild B2-1 Biegeverformungen mit Wendepunkten und Momentenverläufe einschiffiger Rahmen (bitte in Skizzen eintragen)

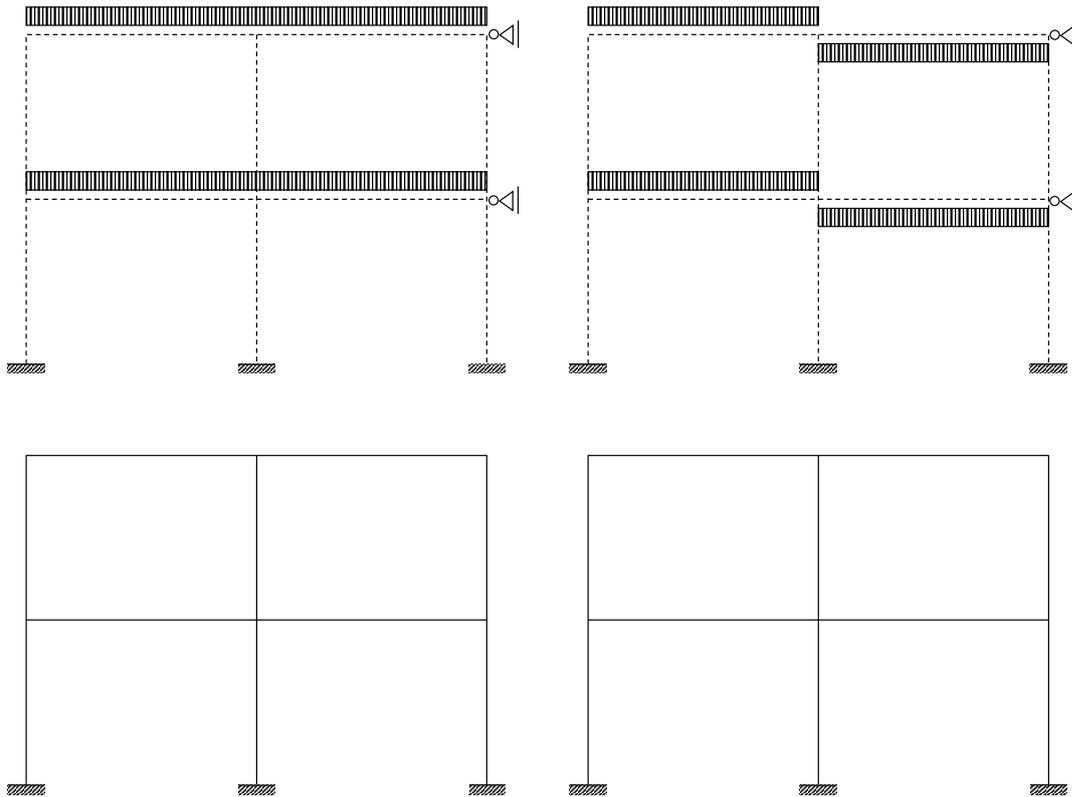
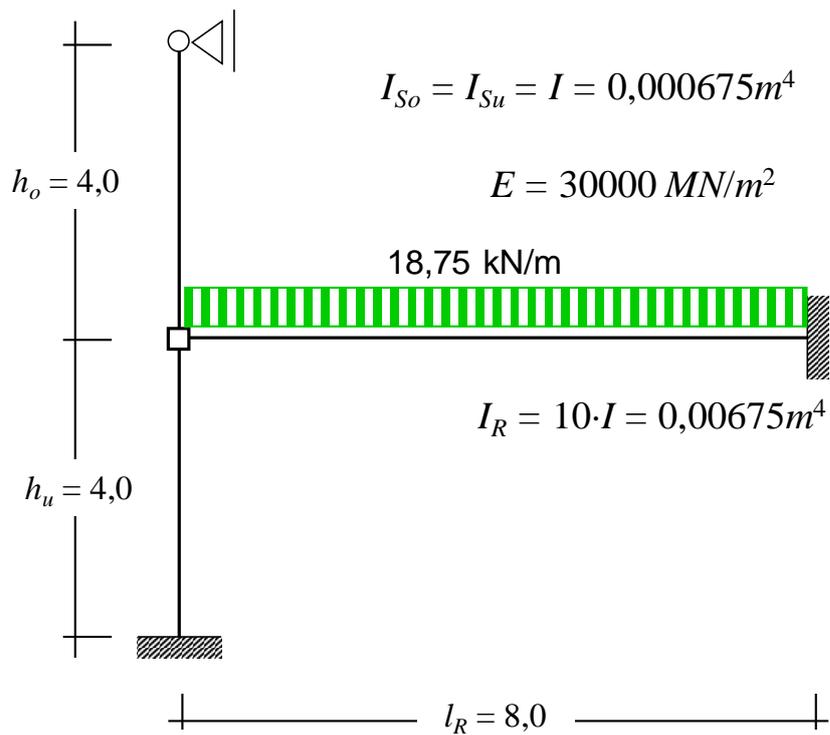
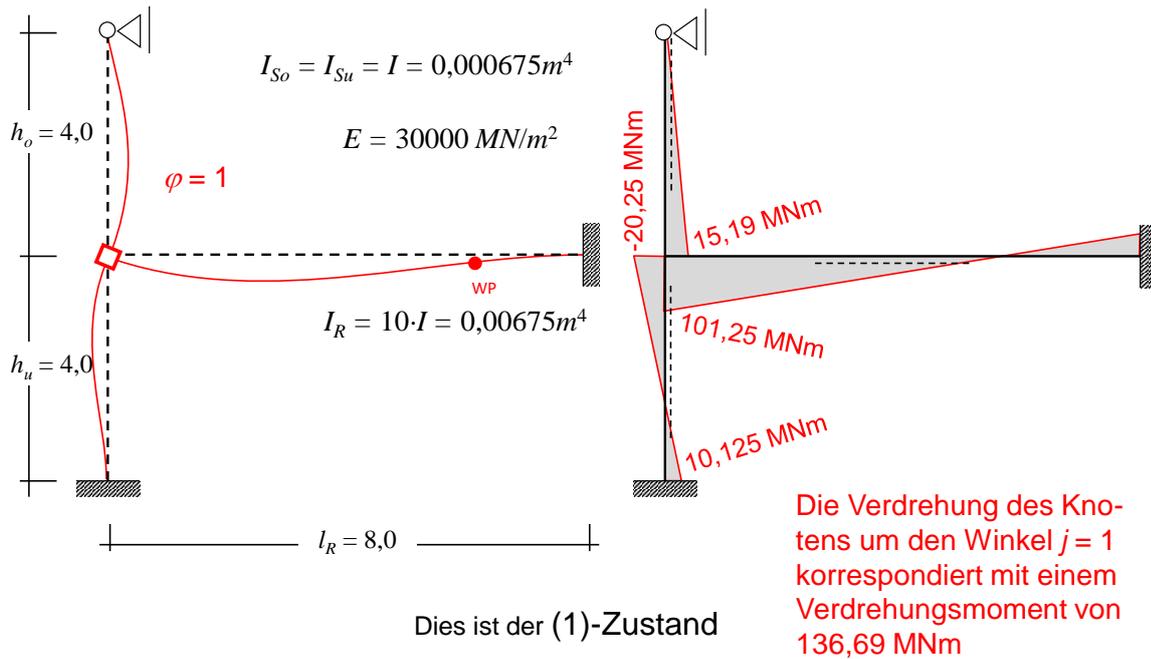


Bild B2-2 Biegeverformungen mit Wendepunkten und Momentenverläufe mehrschiffiger Rahmen (bitte in Skizzen eintragen)

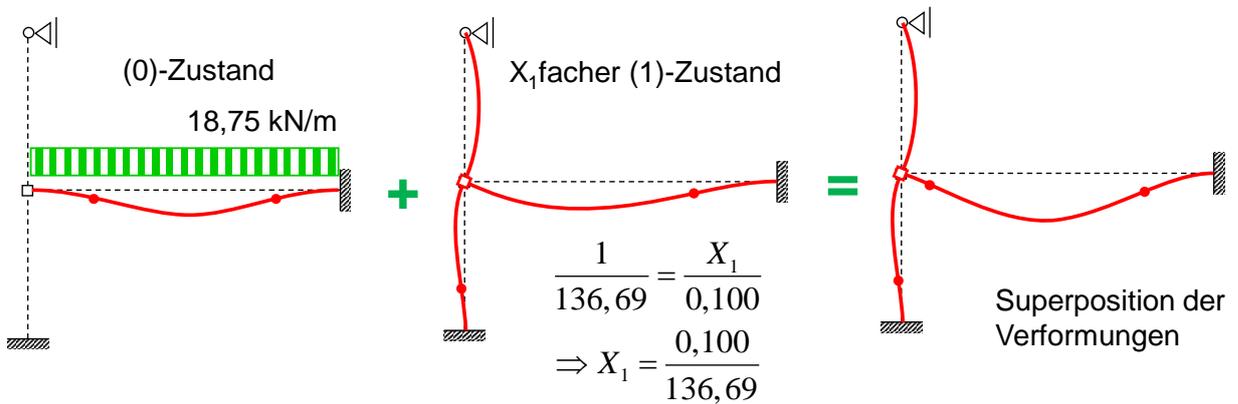
Gesucht wird der Momentenverlauf in den Stützen und in





Die Verdrehung des Knotens um den Winkel $j = 1$ korrespondiert mit einem Verdrehungsmoment von 136,69 MNm

Bild B2-3 Biegeverformungen mit Wendepunkten, Momentenverläufe und Momentenverteilung



Abmessungen und Steifigkeiten wie auf vorheriger Folie

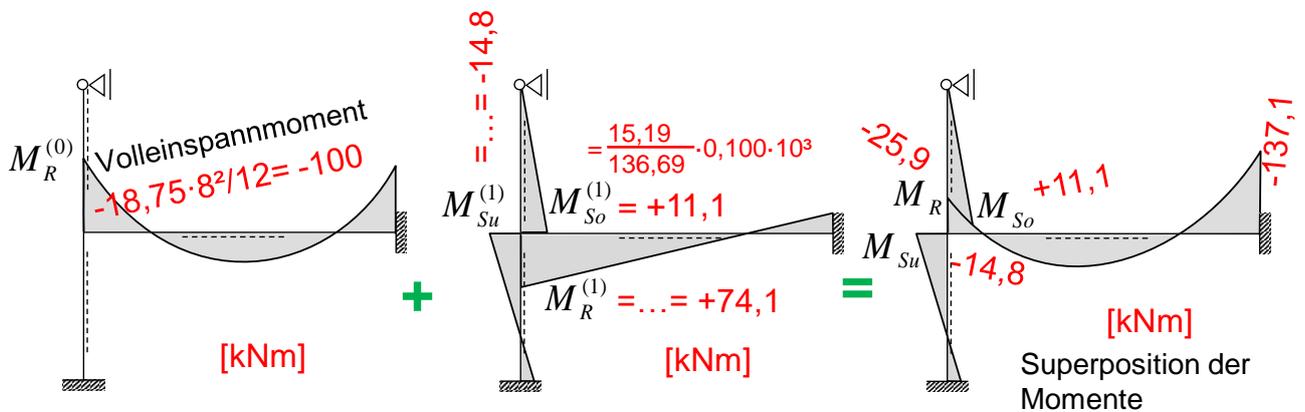


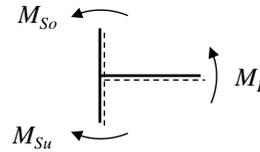
Bild B2-4 Biegeverformungen mit Wendepunkten, Momentenverläufe und Momentenverteilung

Das Moment am Fuß der oberen Stütze ergibt sich für dieses Beispiel etwas allgemeiner:

$$M_{S_o} = 0 + \frac{\frac{3EI_{S_o}}{h_o}}{\frac{3EI_{S_o}}{h_o} + \frac{4EI_{S_u}}{h_u} + \frac{4EI_R}{l_R}} \cdot (-M_R^{(0)})$$

Das Moment am Kopf der unteren Stütze kann entsprechend ermittelt werden.

Das Moment am Riegelanschnitt ergibt sich am besten über das Knotengleichgewicht.



Die **Verteilung von Momenten nach der Biegesteifigkeit** der am Knoten angeschlossenen Stäbe kann für einfach geometrisch unbestimmte Systeme analog zu dem Modell von parallel geschalteten Federn leicht nachvollzogen werden. Bei mehrfach geometrisch unbestimmten Systemen wurden früher (in der Zeit vor der Verbreitung des Computers) iterative Berechnungsverfahren (Cross-Verf., Kani-Verf.) eingesetzt. Als Grundlage von Rahmenprogrammen kann die Berechnung geometrisch unbestimmter Systeme analog zu statisch unbestimmten Systemen anstelle mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens mit dem Verschiebungsgrößenverfahren durchgeführt werden. Heutige Rahmenprogramme basieren auf der Finite-Element-Methode, eine Weiterentwicklung des Verschiebungsgrößenverfahrens.

Für die Berechnung unverschieblicher Rahmensysteme wird im folgenden Abschnitt ein Verfahren vorgestellt, welches eine einfache Handberechnung erlaubt. Es kann zum Beispiel zur Kontrolle von Programmerngebnissen verwendet werden. Das Kennenlernen des Verfahrens dient dabei auch dem Verständnis für das Tragverhalten unverschieblicher Rahmensysteme.

B2.1.1 Unverschiebliche Rahmensysteme

B2.1.1.1 Einführung

Die Berechnung von mehrfeldrigen Rahmensystemen ist relativ aufwändig, da verschiedene Lastfallkombinationen untersucht werden müssen, um die extremalen Bemessungsschnittgrößen aufzuspüren. Bei den Rahmenstielen muss grundsätzlich die M-N-Interaktion berücksichtigt werden. Für Rahmen stehen entsprechende Rahmenprogramme zur Verfügung. Die nachfolgenden Abschnitte verschaffen eine Übersicht für unverschiebliche, mehrfeldrige Rahmensysteme. Zunächst werden die möglichen Lastfallkombinationen erörtert, anschließend wird ein auf der sicheren Seite liegendes Näherungsverfahren für regelmäßige Rahmensysteme abgeleitet. Für unregelmäßige Rahmensysteme wird aufbauend auf den Ansätzen der Näherungslösung gezeigt, wie Durchlaufträger-Programme zur Berechnung genutzt werden können.

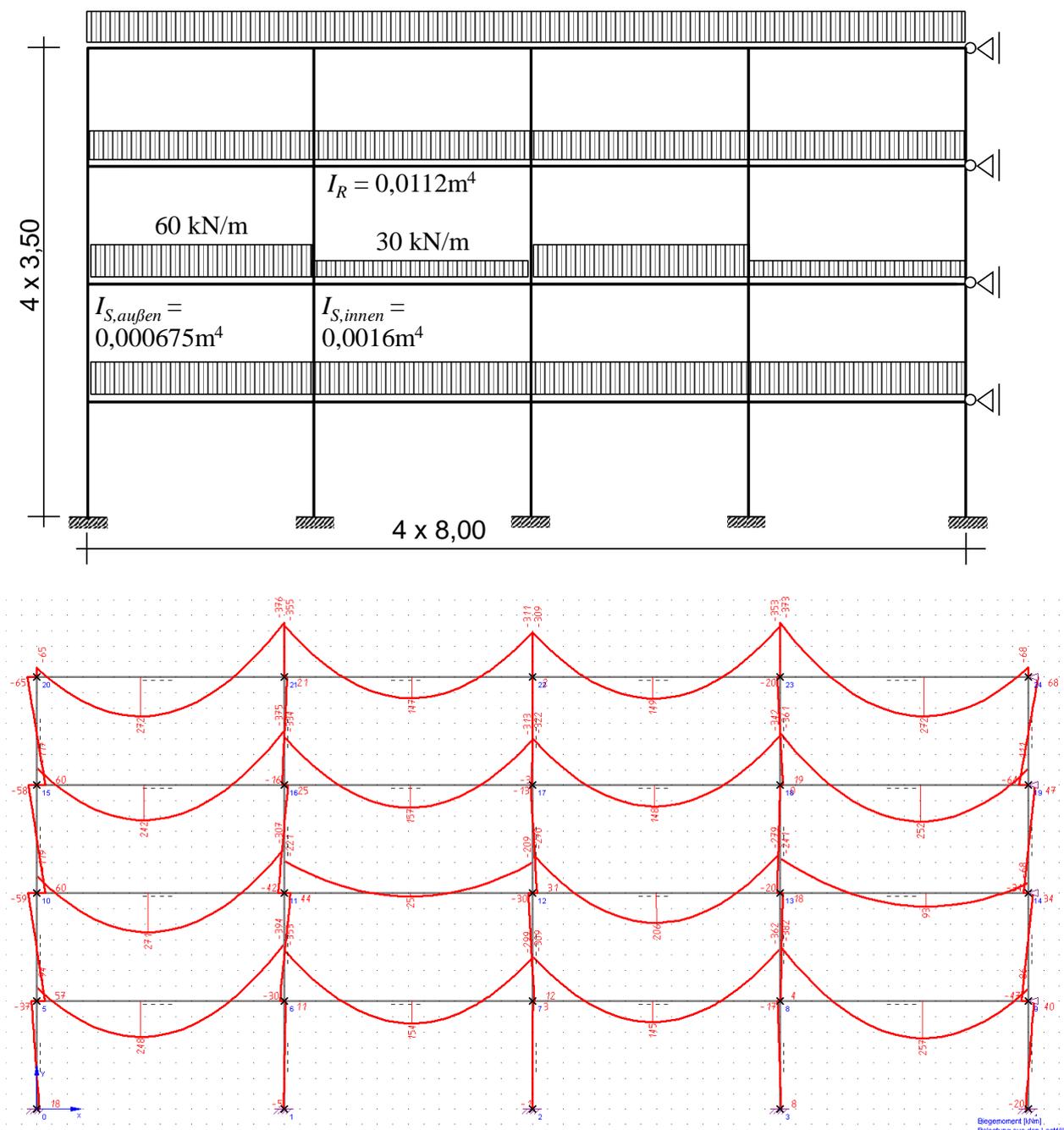


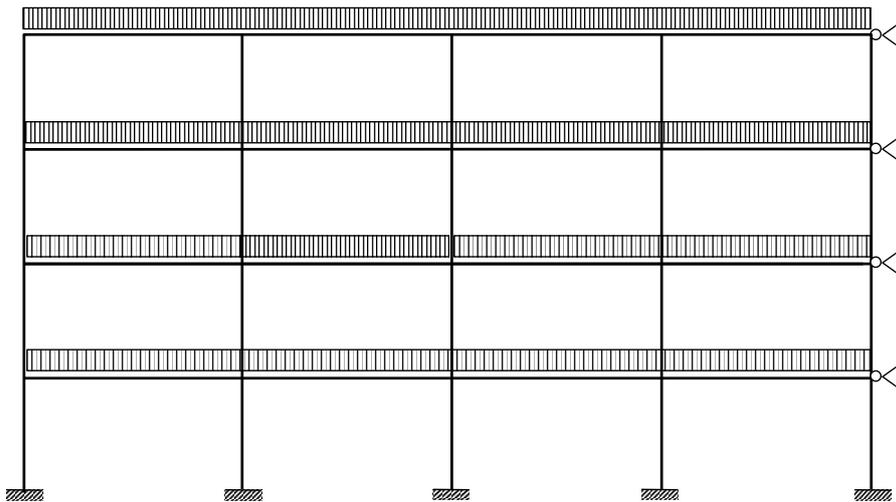
Bild B2-5 Biegemomente eines mehrfeldrigen Rahmensystems mit feldweise wechselnder Nutzlast in einem Geschoss, berechnet mit Stab2d-nl (<http://www.u-pfeiffer.de/>)

In Bild B2-5 ist die Momentenlinie als Ergebnis einer Rahmenberechnung gezeigt. Die Nutzlast wurde mit 50% der Gesamtlast angenommen, was für Massivbautragwerke schon ein großer Nutzlastanteil ist. Die Nutzlast wurde nur in einem Geschoss feldweise wechselnd angenommen, diese Annahme liegt eigentlich ausreichend auf der sicheren Seite. Man erkennt, dass die Innenstiele sehr geringe Biegemomente aufweisen, so dass diese Biegemomente aus lotrechter Belastung der Rahmenriegel im Allgemeinen vernachlässigt werden dürfen (gilt für regelmäßige Stützweiten bis $0,8 \leq l_i/l_{i+1} \leq 1,25$). Daher können alle Biegemomente für den Rahmenriegel mit Ausnahme der Endfelder näherungsweise wie für einen Durchlaufträger mit gelenkiger Lagerung ermittelt werden. Die Biegemomente in den Randstützen und die Auswirkungen auf das Riegelendfeld müssen gesondert berechnet werden.

B2.1.1.2 Berechnung der Biegemomente in den Randstielen und im Riegelendfeld

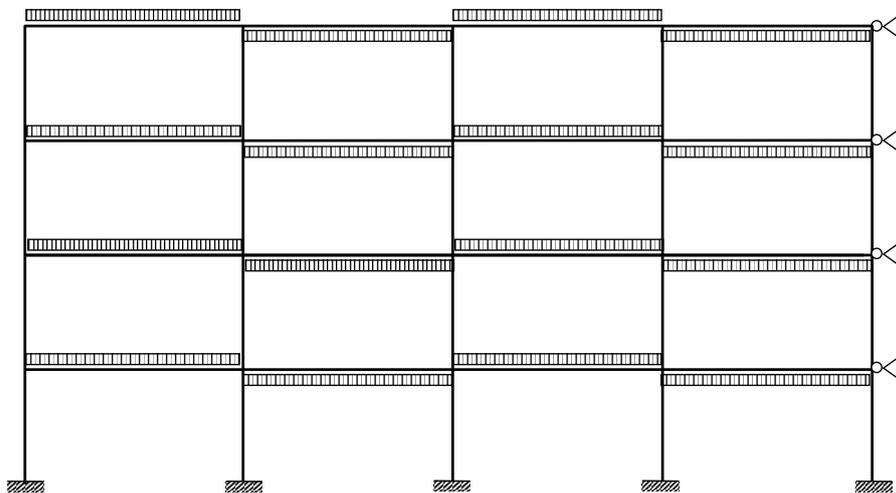
Bei der Berechnung der Biegemomente in den Randstielen und am Riegelende müssen die Lastfälle mehrfach ungünstig kombiniert werden, damit sich a) das betragsmäßig größte Knotenmoment für den Stiel und das Riegelende, b) das betragsmäßig größte Biegemoment etwa im mittleren Drittel des Stieles und c) das kleinste Biegemoment am Riegelende für die Ermittlung des maximalen Feldmomentes im Riegelendfeld ergibt. Um die Anzahl von Kombinationen übersichtlich zu halten und um ggf. mit einfachen Ersatzsystemen rechnen zu können, ist es sinnvoll, die Nutzlasten in jedem Geschoss gleichzeitig feldweise wechselnd anzunehmen, obwohl eine solche Lastanordnung relativ unrealistisch ist. Der Einfluss aus den wechselnden Nutzlasten in anderen Geschossen ist in der Regel gering, so dass diese Annahme nicht auf Kosten der Wirtschaftlichkeit geht.

Das **Prinzip der Belastungsumordnung** kann im Falle regelmäßiger Feldbelastung (alle Felder sind etwa mit gleichem Eigengewicht und gleicher Nutzlast beansprucht) auch hier sinnvoll angewendet werden. Für den Lastanteil $\pm qd/2$ ergeben sich zwei alternative Anordnungsmuster, wie in Bild B2-6 dargestellt ist.



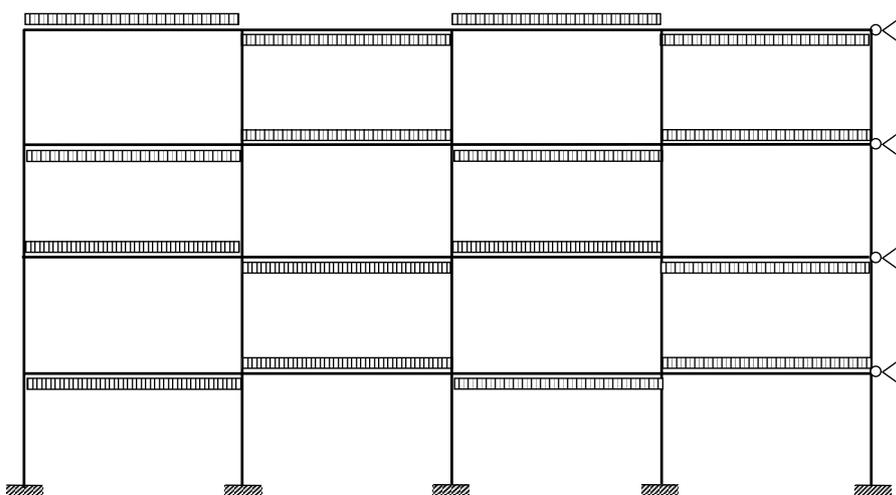
Lastfall

$$r'_d = g_d + \frac{q_d}{2}$$



und entweder
Lastfall

$$r''_d = \pm \frac{q_d}{2}$$

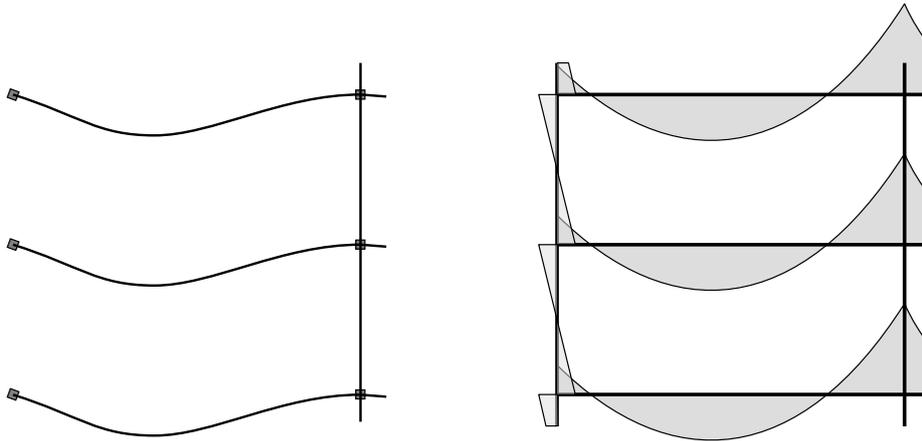


oder alternativ
Lastfall

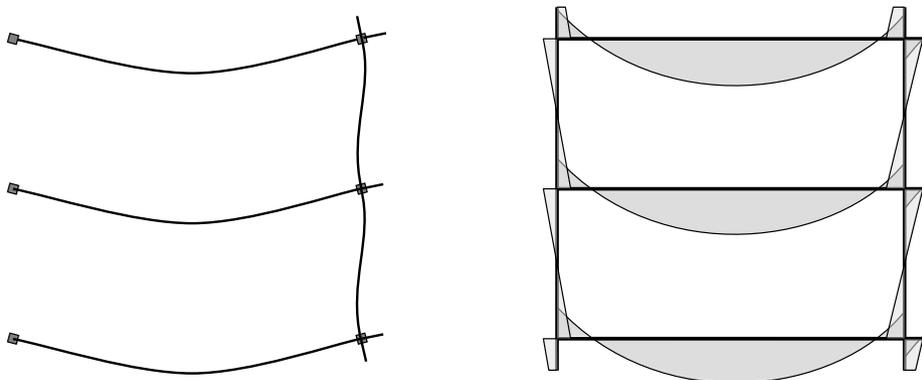
$$r'''_d = \pm \frac{q_d}{2}$$

Bild B2-6 Lastfälle nach der Belastungsumordnung, der Lastanteil r'''_d wird meist nicht maßgebend und bleibt daher unberücksichtigt

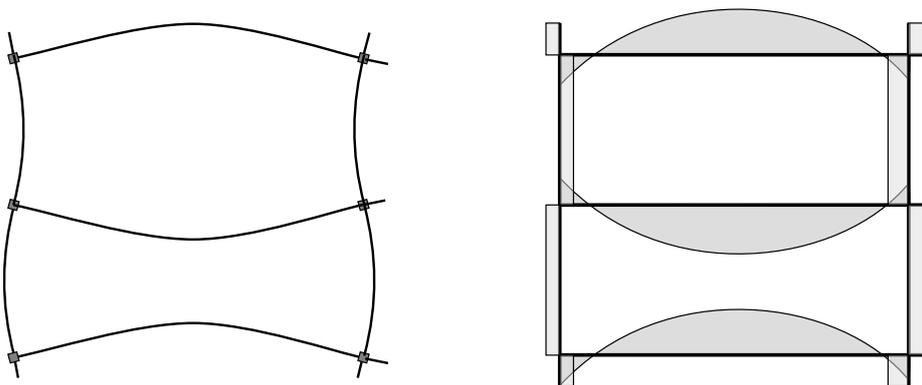
In Bild B2-7 a) bis c) sind für die verschiedenen Belastungsanteile die Biege- und Momentenlinien qualitativ dargestellt, aus denen sich dann leicht ersatzweise die Teilrahmensysteme entsprechend Bild B2-8 a) bis c) ableiten lassen.



a) Verformungsbild (bitte ergänzen) und Momentenverlauf infolge des Lastanteiles r_d^I



b) Verformungsbild (bitte ergänzen) und Momentenverlauf infolge des Lastanteiles r_d^{II}

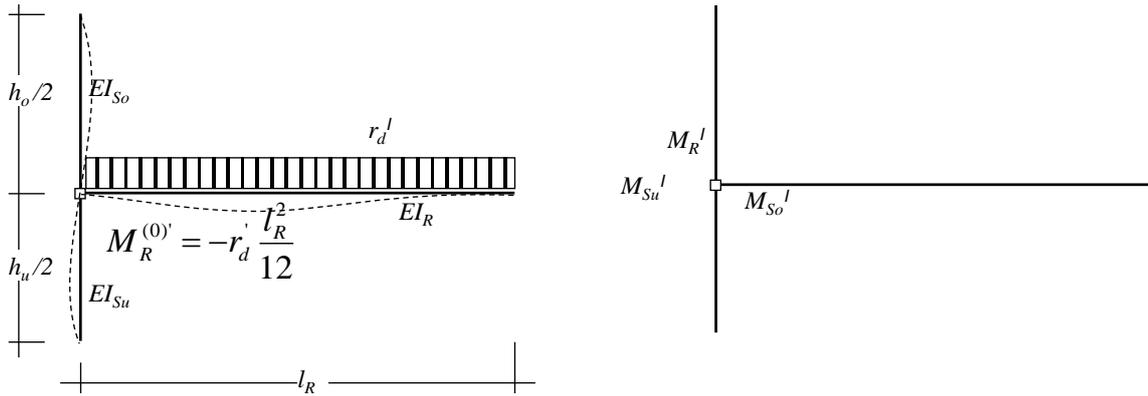


c) Verformungsbild (bitte ergänzen) und Momentenverlauf infolge des Lastanteiles r_d^{III} , jedoch ohne weitere Betrachtung

Bild B2-7 Verformungs- und Momentenlinien für die einzelnen Lastanteile

Für entsprechende Ersatzsysteme können nun nach den in Abschnitt B2.1 kennengelernten Überlegungen die Biegemomente nach der Verteilung der Stabsteifigkeiten ermittelt werden (Verschiebungsgrößenverfahren, hier einfach geometrisch unbestimmt):

a) Ersatzsystem für den Lastfall r_d^I (bitte Lagerungen und Momente ergänzen)

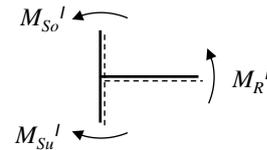


$$M_{So}^I = \frac{-\frac{3EI_{So}}{h_o/2}}{\frac{3EI_{So}}{h_o/2} + \frac{3EI_{Su}}{h_u/2} + \frac{4EI_R}{l_R}} \cdot M_R^{(0)'}$$

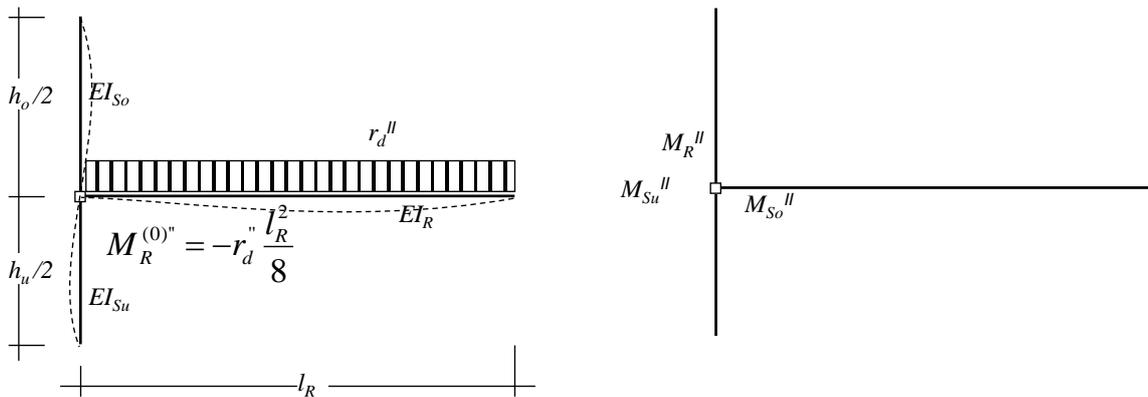
entsprechend:

$$M_{Su}^I = \frac{\frac{3EI_{Su}}{h_u/2}}{\frac{3EI_{So}}{h_o/2} + \frac{3EI_{Su}}{h_u/2} + \frac{4EI_R}{l_R}} \cdot M_R^{(0)'}$$

$$M_R^I = M_{Su}^I - M_{So}^I \quad \text{aus dem Knotengleichgewicht:}$$



b) Ersatzsystem für den Lastfall r_d^{II} (bitte Lagerungen und Momente ergänzen)

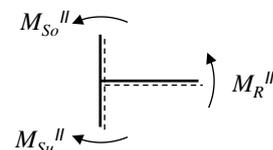


$$M_{So}^{II} = \frac{-\frac{3EI_{So}}{h_o/2}}{\frac{3EI_{So}}{h_o/2} + \frac{3EI_{Su}}{h_u/2} + \frac{3EI_R}{l_R}} \cdot M_R^{(0)''}$$

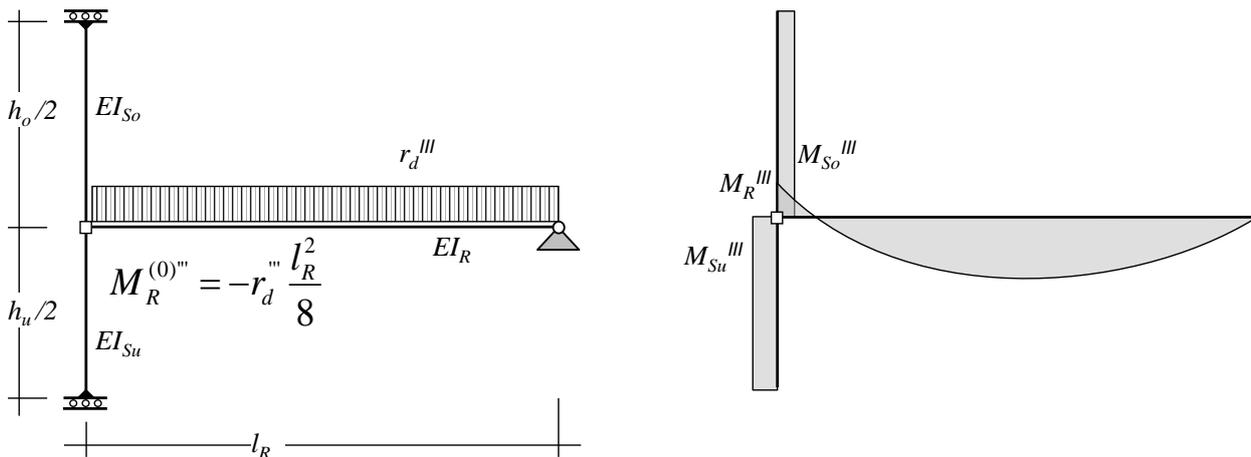
entsprechend:

$$M_{Su}^{II} = \frac{\frac{3EI_{Su}}{h_u/2}}{\frac{3EI_{So}}{h_o/2} + \frac{3EI_{Su}}{h_u/2} + \frac{3EI_R}{l_R}} \cdot M_R^{(0)''}$$

$$M_R^{II} = M_{Su}^{II} - M_{So}^{II} \quad \text{aus dem Knotengleichgewicht:}$$



c) Ersatzsystem für den Lastfall r_d''' , jedoch ohne weitere Betrachtung



$$M_{So}''' = \frac{-\frac{EI_{So}}{h_o/2}}{\frac{EI_{So}}{h_o/2} + \frac{EI_{Su}}{h_u/2} + \frac{3EI_R}{l_R}} \cdot M_R^{(0)'''}$$

entsprechend:

$$M_{Su}''' = \frac{\frac{EI_{Su}}{h_u/2}}{\frac{EI_{So}}{h_o/2} + \frac{EI_{Su}}{h_u/2} + \frac{3EI_R}{l_R}} \cdot M_R^{(0)'''}$$

$$M_R''' = M_{Su}''' - M_{So}'''$$

aus dem Knotengleichgewicht:

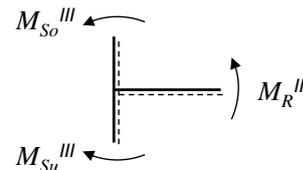


Bild B2-8 Ersatzsysteme und Knotenmomente

Durch unterschiedliche Kombination der Schnittgrößen aus den Belastungsanteilen ergeben sich nun die gesuchten Biegemomente, die für die Stiele zusätzlich noch mit den zugehörigen Normalkräften kombiniert werden müssen. Sinnvoll ist jedoch nur die Kombination mit der minimalen Normalkraft (näherungsweise aus Eigengewicht allein) und der maximalen Normalkraft (näherungsweise aus Volllast), sonst müssten noch weit mehr Lastfallkombinationen betrachtet werden.

Alle angegebenen Biegemomente gelten auch noch näherungsweise für den Sonderfall, dass außen nur ein Rahmenstiel am Knoten vorhanden ist (z.B. im Dachgeschoss). In diesem Fall ist für die entsprechende Stabsteifigkeit der Wert Null einzusetzen.

Schließen Kragarme an die Endfelder an, reduzieren sich die Volleinspannmomente für den Lastanteil r_d^I und erhöhen sich für die Lastanteile r_d^{II} und r_d^{III} . Bei langen Kragarmen (Kragmoment aus r_d^I betragsmäßig größer als das Volleinspannmoment aus r_d^I) entsteht ein Vorzeichenwechsel für die Stielmomente aus allen Lastanteilen, der jedoch wegen der üblichen symmetrischen Bewehrung keine Auswirkungen hat.

Ein ähnliches Näherungsverfahren ist im Heft 240 des DAfStb angegeben. Es wird allgemein als c_o/c_u -Verfahren bezeichnet. Bei üblichen Steifigkeitsverhältnissen fallen die Knotenmomente nach dem c_o/c_u -Verfahren etwas geringer aus, dafür das Moment im mittleren Drittel des Stieles etwas größer. Der Rechenaufwand ist etwas geringer. Nachteilig ist, dass das mechanische Grundmodell beim c_o/c_u -Verfahren im Verborgenen bleibt. Auch die Frage, ob bei mehreren Geschossen die Momente überlagert werden müssen, bleibt unbeantwortet.

B2.1.1.3 Biegemomente für unregelmäßige Rahmensysteme

Bei den regelmäßigen Rahmen ergeben sich für die Lastanteile r_d^I und r_d^{II} die Momentennullpunkte entsprechend dem vorhergehenden Abschnitt in den Stielmitten. Sofern kein Rahmenprogramm zur Verfügung steht, kann für unregelmäßige Rahmen, z. B. mit größeren Stützweitenunterschieden, auch eine Berechnung der Knotenmomente mit einem DLT-Programm durchgeführt werden. Folgendes vereinfachte Ersatzsystem kann näherungsweise gewählt werden (auf die Untersuchung des Lastfalls r_d^{III} kann häufig verzichtet werden, da er meist nicht maßgebend wird):

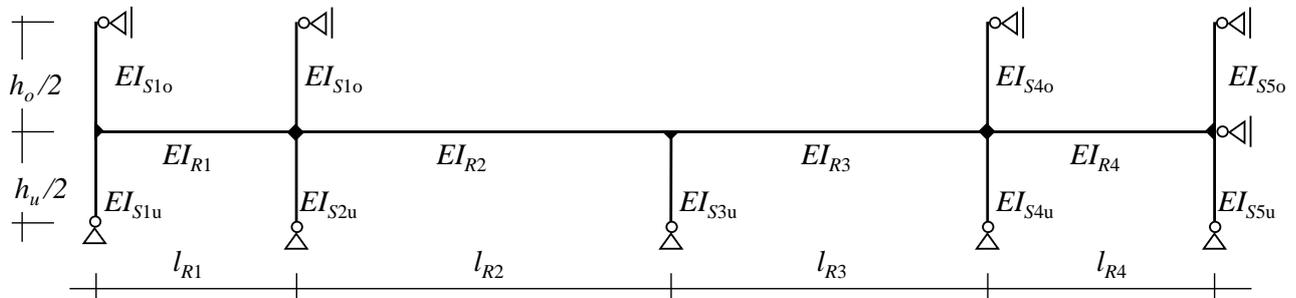


Bild B2-9 Ersatzsystem für eine programmgesteuerte Berechnung unregelmäßiger Rahmensysteme

Wenn die Stielsteifigkeiten nicht direkt bei dem verwendeten Durchlaufträgerprogramm eingegeben werden können, können diese in Drehfedersteifigkeiten in den Auflagerknoten umgerechnet werden:

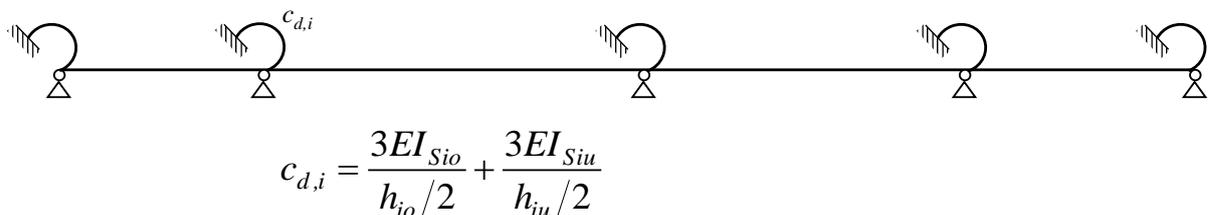


Bild B2-10 Ersatzsystem Durchlaufträger mit Knotendrehfedern

Bei den unregelmäßigen Rahmen müssen selbstverständlich auch die Biegemomente für die Innenstützen nachgewiesen werden.

B2.1.2 Verschiebliche Rahmensysteme

Verschieblichen Rahmensystemen fehlt die horizontale Halterung der Rahmenriegel, daher müssen horizontale Beanspruchungen zusätzlich untersucht werden. Sie erzeugen in den Knoten relativ große Biegemomente, siehe (meist mit wechselnden Vorzeichen, da die üblichen Horizontalkräfte i.d.R. in beiden Richtungen angreifen). Insbesondere für die Stiele sind die Biegemomente bemessungsrelevant. Bild B2-34.

Die Schnittgrößenberechnung nach Theorie I. Ordnung erfolgt überwiegend mit Rahmenprogrammen. In den meisten Fällen wird ein zusätzlicher Stabilitätsnachweis erforderlich, dessen Grundlagen im nachfolgenden Abschnitt erläutert werden. Ein programmgesteuerter Nachweis sollte unbedingt das nichtlineare Werkstoffverhalten berücksichtigen.

B2.2 Nachweis der Stabilität

B2.2.1 Einführung

Ein Stabilitätsproblem liegt vor, wenn in Bauteilen große Druckbeanspruchungen mit meist geringen Biegebeanspruchungen auftreten. Die plötzliche Instabilität infolge eines seitlichen Ausweichens (Ausknickens) kann man unmittelbar bei schlanken, druckbeanspruchten Stäben beobachten.

Mit dem Stabilitätsproblem druckbeanspruchter Stäbe hat sich erstmalig Euler mathematisch auseinandergesetzt. Euler hat eine Differentialgleichung aufgestellt und eine Lösung für Bauteile erarbeitet, die ein lineares Werkstoffverhalten zeigen. In der Statik wurde die Lösung des Stabilitätsproblems inzwischen etwas allgemeiner behandelt und weiterentwickelt. Wir sprechen heute von der Berechnung nach Theorie II. Ordnung (Berechnung am verformten System, die Verformungen werden weiterhin vereinfachend klein gegenüber den Stababmessungen angenommen: Annahme kleiner Winkel, Vernachlässigung der Längenänderung der Stäbe infolge ihrer Biegeverformung und/oder Stauchung; bei großen Verformungen spricht man von Theorie III. Ordnung). Bei der bekannten Berechnung nach Theorie I. Ordnung werden Tragwerksverformungen bei der Ermittlung der Schnittgrößen vernachlässigt (Berechnung am unverformten System). Die Vernachlässigung der Tragwerksverformungen kann bei Stützen zu einer erheblichen Fehleinschätzung der Schnittgrößen führen. Nachfolgend werden am Beispiel einer eingespannten Stütze (Kragstütze) die Verformungen berechnet und der Einfluss der Druckkraft auf die Schnittgrößen sowie die damit verbundene Stabilitätsgefahr verfolgt.

Für die in Bild B2-11 dargestellte Stütze ergibt sich zunächst ein linearer Momentenverlauf M_1 nach Theorie I. Ordnung. Gleichzeitig stellt sich eine Krümmung der Stütze ein, bei linear elastischem Material verläuft sie affin zum Momentenverlauf, hier entsprechend auch linear. Mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte kann die Kopfverformung der Stütze berechnet werden. Bei linearem Krümmungsverlauf stellt sich eine parabelförmige Verformungsfigur für die Stütze ein. Die Verformung wird mit e_1 bezeichnet, es ist die Verformung nach Theorie I. Ordnung. Sie ist gleichzeitig der erste Verformungsanteil der Gesamtverformung nach Theorie II. Ordnung: $e_1 = e_{2,1}$:

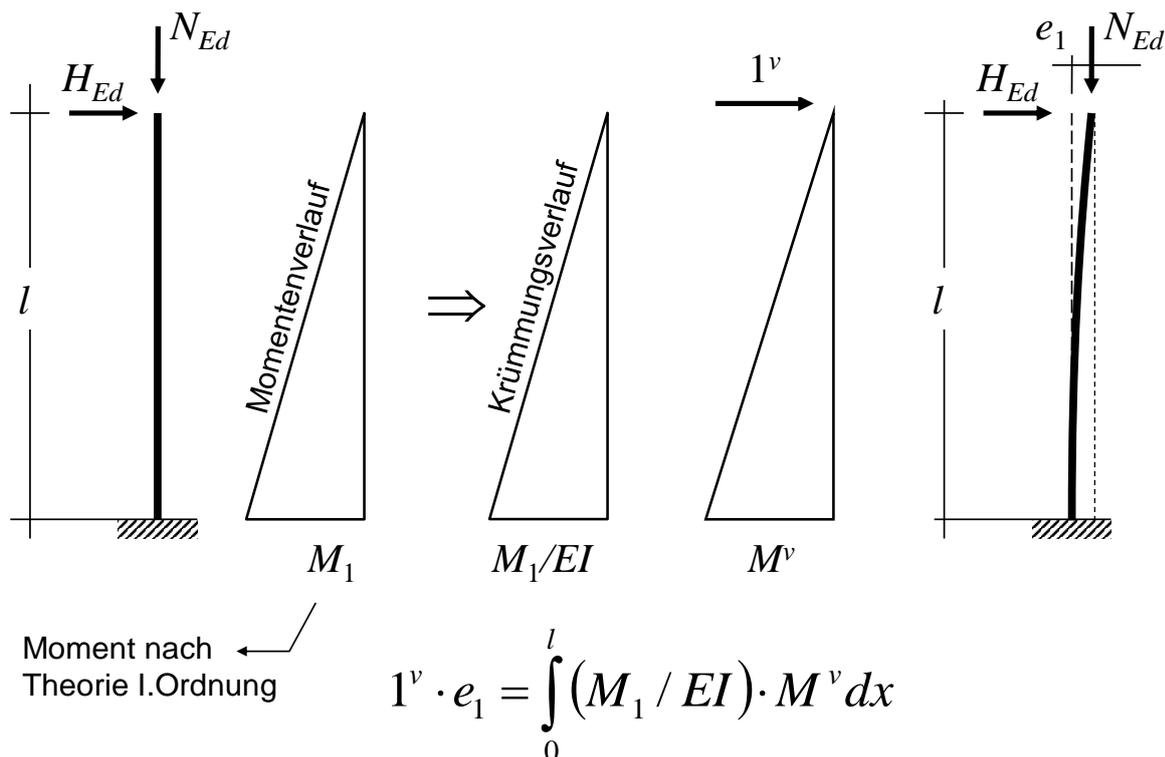


Bild B2-11 Verformung nach Theorie I. Ordnung

Infolge der vertikalen Kraft ergibt sich nun entsprechend dem Verformungsverlauf ein parabelförmiges Zusatzmoment (Tipp: schneiden Sie die Stütze in verschiedenen Höhen frei und ermitteln Sie das Moment!).

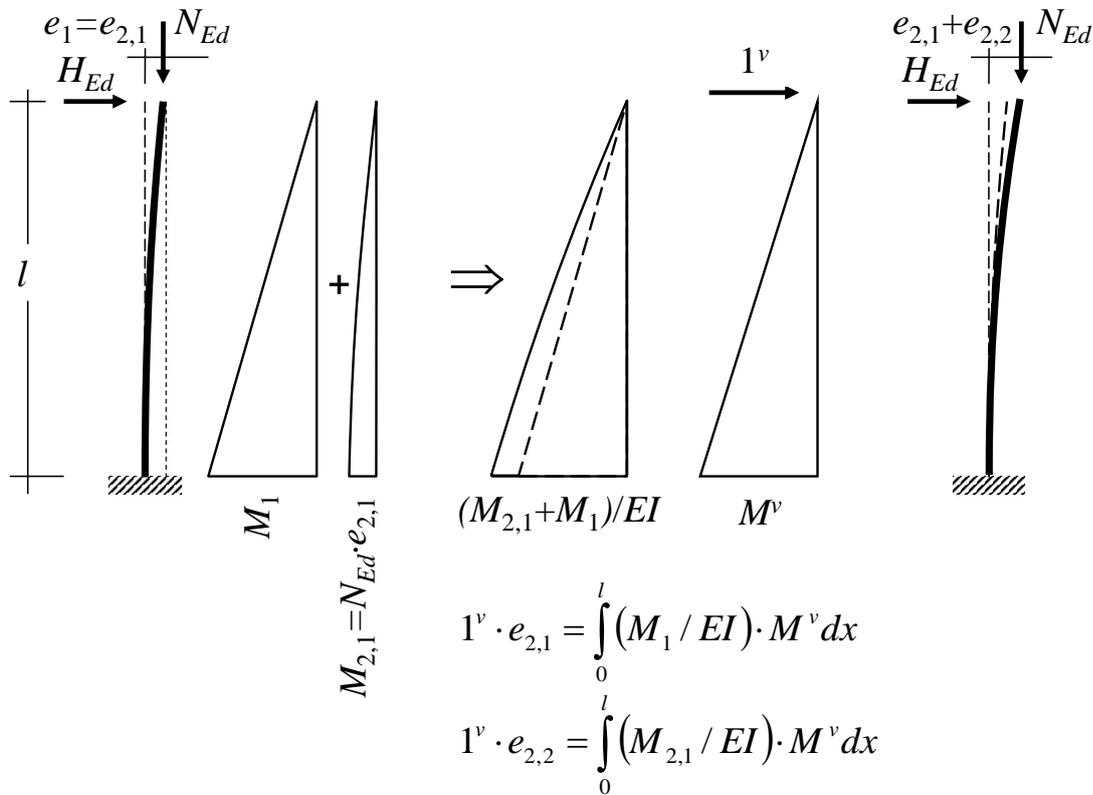


Bild B2-12 erste Zusatzverformung nach Theorie II. Ordnung

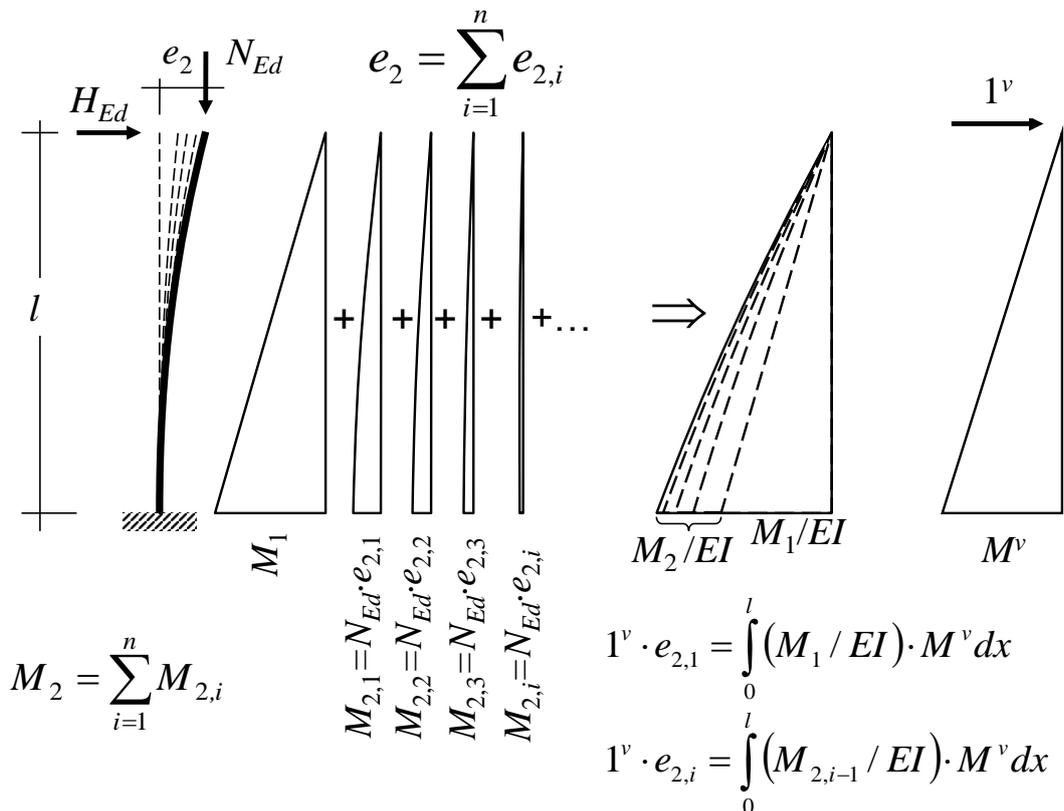


Bild B2-13 Gesamtverformung nach Theorie II. Ordnung

Infolge des Zusatzmomentes ergibt sich nun eine Zusatzkrümmung und eine weitere Verformung $e_{2,2}$ der Stütze. Der Verformungsverlauf entspricht nun einer kubischen Parabel.

Dieser Kreislauf aus Zusatzverformung mit der Folge eines Zusatzmomentes wiederholt sich nun immer wieder. Mit jedem Schritt steigt auch der Exponent der Verformungsfunktion an. Wenn die Gesamtverformung keinen Grenzwert erreicht, liegt ein Stabilitätsproblem vor.

Der Grenzwert der Verformung wird mit e_2 bezeichnet und stellt die Verformung nach Theorie II. Ordnung dar, e_2 beinhaltet auch die Verformung nach Theorie I. Ordnung. Hierbei ist zu beachten, dass das Moment M_2 nur das Zusatzmoment nach Theorie II. Ordnung und nicht das Gesamtmoment analog zu der Gesamtverformung e_2 darstellt.

Eine alternative Möglichkeit der Berechnung besteht darin, die Gesamtverformung einschließlich der Annahme einer Funktion des Verformungsverlaufes vorzuschätzen (der Verlauf kann näherungsweise mit einer quadratischen oder kubischen Parabel, aber auch mit einer Sinus-Funktion angenommen werden). Auch hier muss iterativ so lange gerechnet werden, bis der geschätzte Wert der Verformung mit dem berechneten Wert ausreichend genau übereinstimmt (Bild B2-14). Auch diese Iteration ist mühselig.

alternatives Vorgehen: e_2 vorschätzen und Krümmungsverlauf annehmen

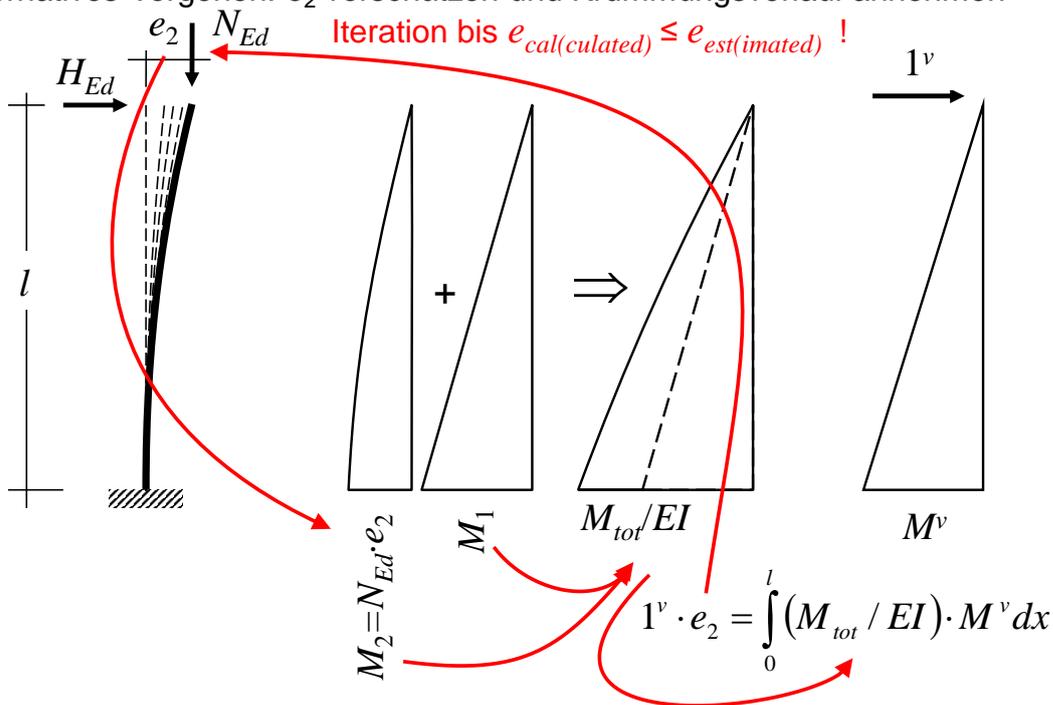


Bild B2-14 Alternative Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit vorgeschätzter Gesamtverformung

Das iterative Vorgehen ist für eine Handberechnung nicht geeignet, es dient hier lediglich der Veranschaulichung des gesamten Prozesses. Das Verhalten der Stütze nach Theorie II. Ordnung nennt man „geometrisch nichtlinear“. Bereits hier hat das **Superpositionsgesetz keine Gültigkeit** mehr zur Überlagerung mehrerer Lastfälle.

Es sei angemerkt, dass für einfache Standardfälle auch geschlossene Lösungen existieren, sie sind jedoch nur bei ideal elastischen Werkstoffen gültig, für die eine lineare Beziehung zwischen Moment und Krümmung („physikalisch linear“) vorliegt, nicht bei gerissenen Bauteilen („**physikalisch nicht-linear**“).

B2.2.1.1 Verformungsberechnung mit Momenten-Krümmungs-Beziehungen

Die Momenten-Krümmungs-Beziehungen verschiedener Werkstoffe wollen wir uns im Folgenden vornehmen.

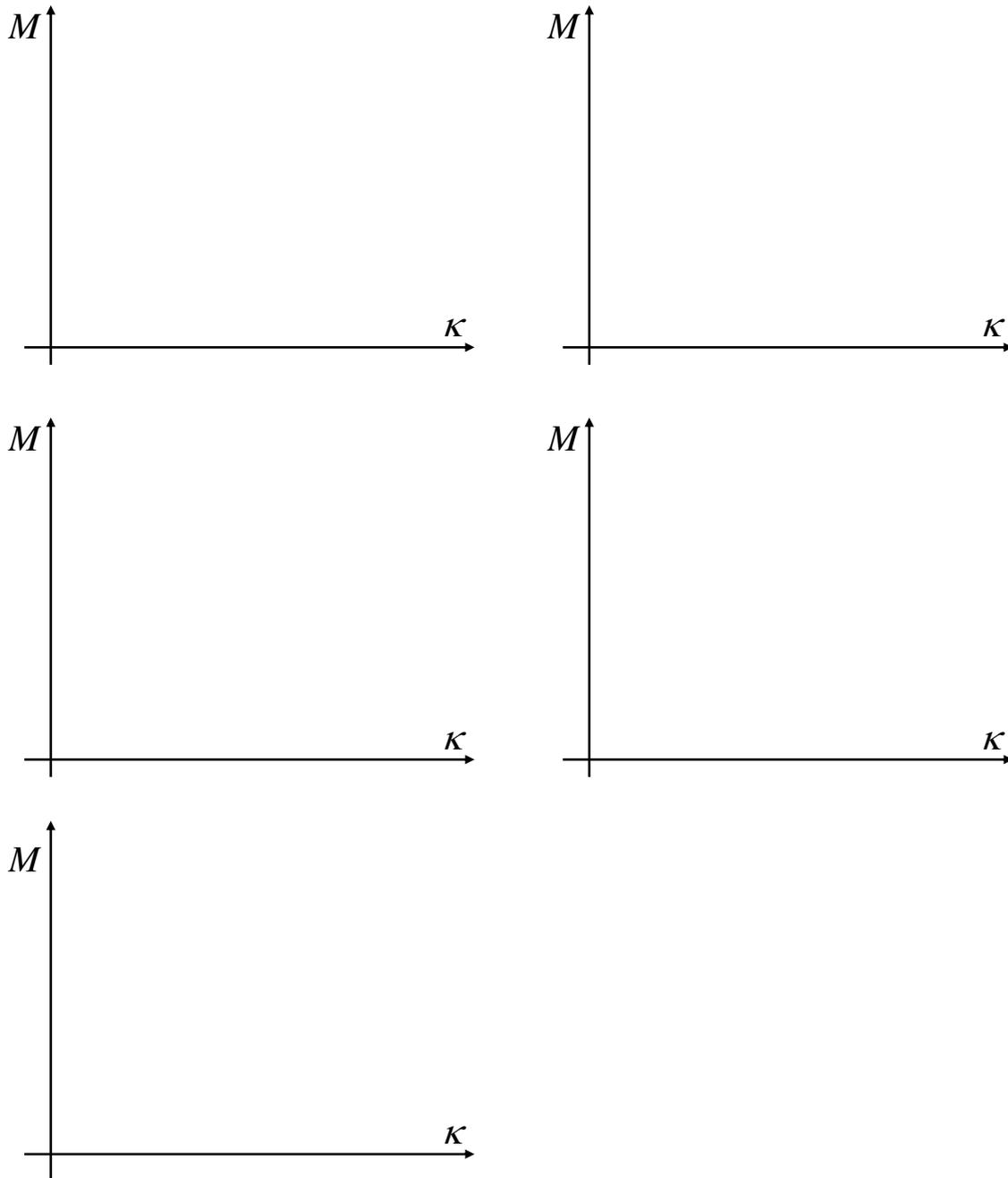


Bild B2-15 Verschiedene Momenten-Krümmungs-Beziehungen (Verläufe bitte eintragen)

Wie berechnet man eigentlich eine $M-N-\kappa$ -Beziehung bei gerissenen Stahlbetonbauteilen?

Die $M-N-\kappa$ -Beziehung ist unter Berücksichtigung des gerissenen Querschnittes auf der Grundlage der nichtlinearen Werkstoffgesetze von Beton und Stahl iterativ durch Vorschätzen der Betonranddehnung und der Stahldehnung und anschließender Kontrolle von Moment und Normalkraft zu ermitteln. Der Einsatz eines geeigneten Programms ist unerlässlich.

Voraussetzung für die Ermittlung einer $M-N-\kappa$ -Beziehung ist die Kenntnis der einzubauenden Bewehrung. Dieser Umstand ist neben allen anderen Schwierigkeiten ein zusätzliches Hindernis, weil üblicherweise die Bewehrung erst bestimmt werden soll.

Nehmen wir mal an, dass uns eine $M-N-\kappa$ -Beziehung für eine Stütze vorliegt, wie kann damit nun die Verformung nach Theorie II. Ordnung ermittelt werden? Das Vorgehen entspricht dem von Bild B2-14, der Unterschied besteht „lediglich“ im Krümmungsverlauf. Dieser hat zur Folge, dass die Integration der Krümmungen deutlich aufwändiger wird.

Anwendung mit nichtlinearer Momenten-Krümmungs-Beziehung:

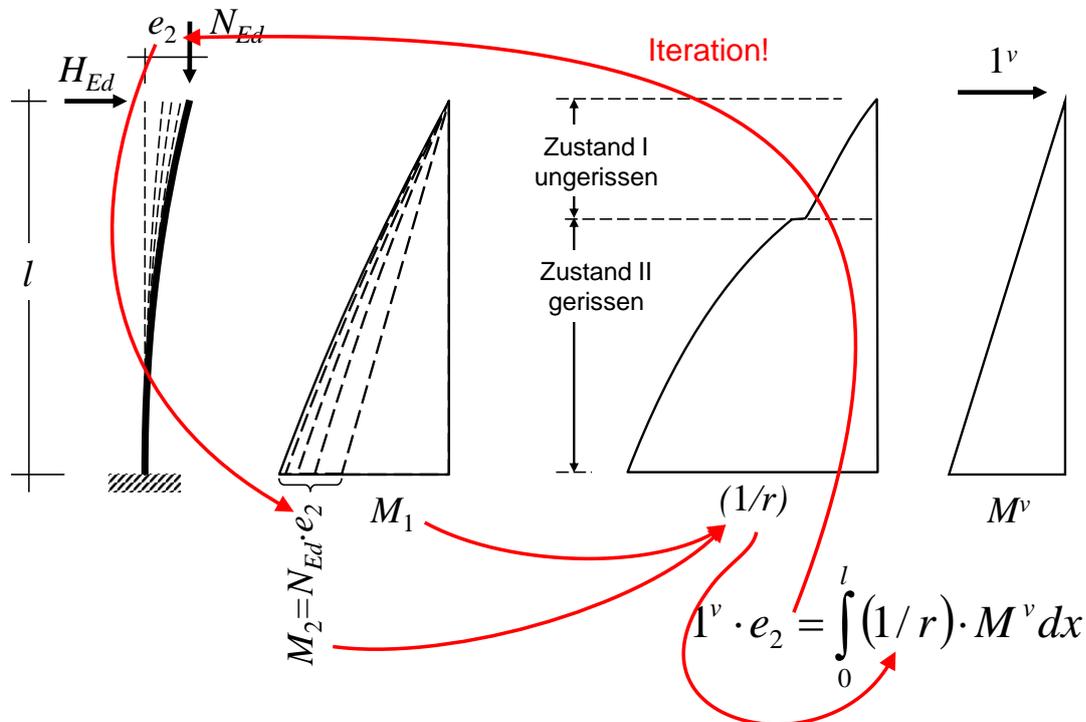


Bild B2-16 Theorie II. Ordnung mit nichtlinearer Momenten-Krümmungs-Beziehung

Zusammenfassend ergibt sich:

- die Bewehrung muss zu Beginn der Berechnung bekannt sein
- die Ermittlung der $M-N-\kappa$ -Beziehung ist sehr aufwändig
- die Integration der Krümmungen kann nicht mit erträglichem Aufwand durchgeführt werden
- vielfache Iterationsprozesse sind zu bewältigen
- das Superpositions-gesetz ist nicht mehr gültig, daher muss jede Lastfallkombination einzeln betrachtet werden.

Schlussfolgerungen:

- Eine „genaue“ Berechnung ist nur mit aufwändigen EDV-Programmen und dem Sachverstand des Anwenders möglich
- besondere Anforderungen an die Programmierung stellen sich bei der Konvergenz der iterativen Prozesse
- Die Wahl geeigneter Werkstoffgesetze zur realistischen Abschätzung der Verformungen ist für das Ergebnis entscheidend.
- Alternativ und zur Plausibilitätskontrolle von Programmen sind einfache Näherungsverfahren wichtig.

Quast hat ein solches Näherungsverfahren entwickelt, es wird in EC2, Abschnitt 5.8.8 behandelt und im folgenden Abschnitt vorgestellt. Es ist ein recht neues Verfahren, was mit der Einführung der DIN 1045-1 im Jahr 2001 erstmalig eine breite Anwendung in Deutschland erfuhr.

B2.2.2 Modellstützenverfahren (Verfahren mit Nennkrümmung)

B2.2.2.1 Herleitung

Die Modellstütze ist die eingespannte Kragstütze, wie sie bisher betrachtet wurde. Zusätzlich wird eine Imperfektion (Abweichung von der planmäßigen Ausführung) angenommen, bei der Modellstütze eine „ungewollte Ausmitte“ der Last. Ebenso hätte eine Vorkrümmung oder eine Schiefstellung gewählt werden können. Die Annahme einer Imperfektion ist wichtig, besonders bei planmäßig nur zentrisch beanspruchten Stützen, da bereits kleine Abweichungen von der planmäßigen Stützenachse Auswirkungen auf das Moment nach Theorie II. Ordnung haben. Die ungewollte Ausmitte wird in Abschnitt B2.2.4 festgelegt.

Ausgehend von Bild B2-16 wird der Krümmungsverlauf bei vorwiegend linearem Momentenverlauf nach Theorie I. Ordnung näherungsweise mit einem vereinfachten Verlauf einer quadratischen Parabel angenommen, die geringere Krümmung im ungerissenen Bereich wird vernachlässigt. Diese Annahmen führen zu rechnerisch größeren Verformungen und damit zu auf der sicheren Seite liegenden Biegemomenten.

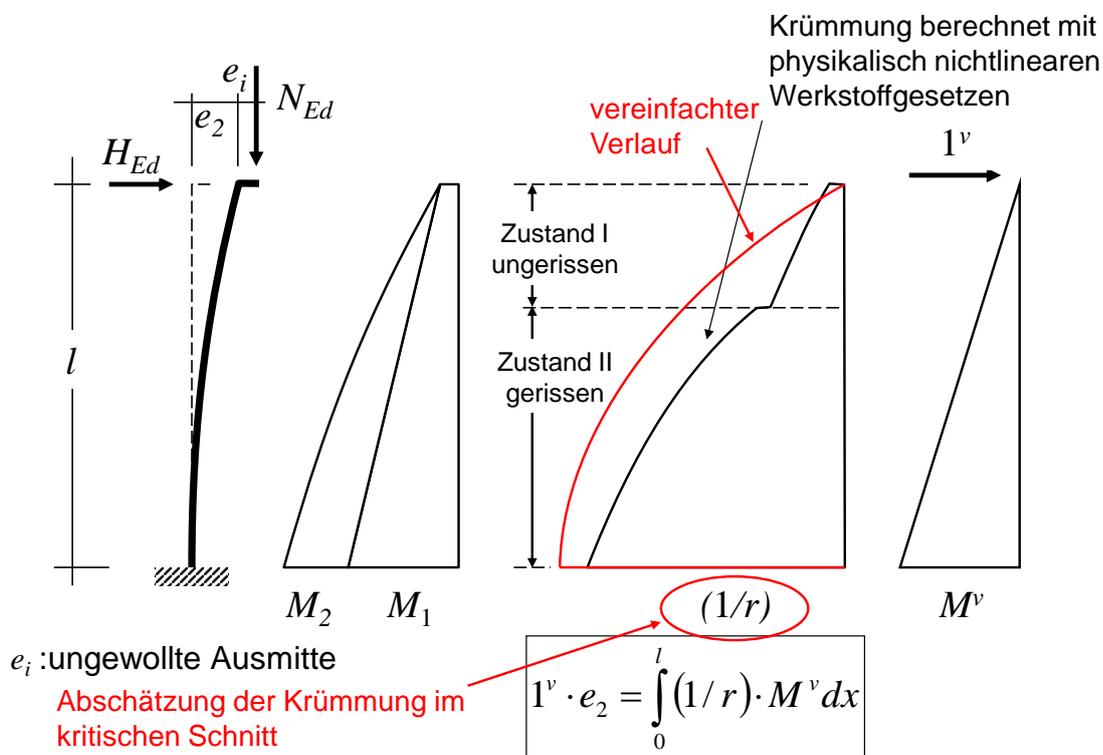


Bild B2-17 Vereinfachte Annahme der Krümmung im kritischen Schnitt und des Krümmungsverlaufs als Grundlage für das Modellstützenverfahren

Damit ergibt sich die Verformung nach Theorie II. Ordnung relativ einfach, wenn der Maximalwert der Krümmung bekannt ist:

$$e_2 = \int_0^l (1/r) \cdot M^v dx = \frac{5}{12} \cdot (1/r) \cdot l^2$$

$$e_2 = \frac{5}{12} \cdot (1/r) \cdot \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 \approx (1/r) \cdot l_0^2 / c$$

$l_0 =$ Ersatzlänge (Knicklänge)

$$e_2 \approx K_1 \cdot (1/r) \cdot l_0^2 / c$$

Bei etwa parabelförmigen Krümmungsverlauf ist $c = 10$

$$0 \leq K_1 = \lambda/10 - 2,5 \leq 1,0$$

zur Anpassung im Bereich $25 \leq \lambda \leq 35$

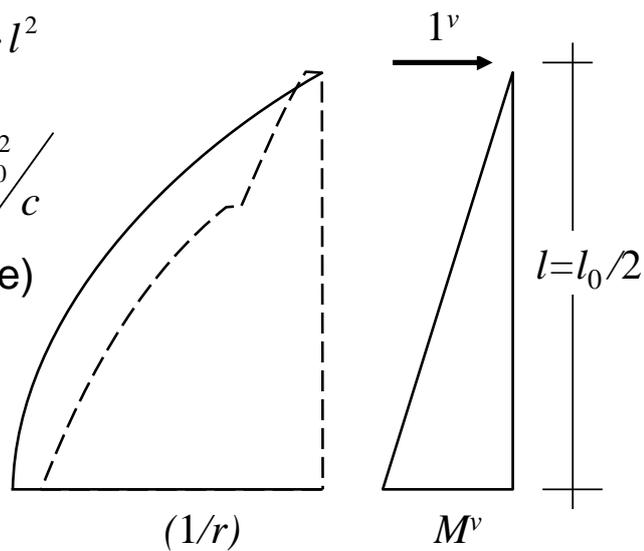


Bild B2-18 Berechnung der Verformung nach dem Modellstützenverfahren

Der Faktor K_1 in Abhängigkeit von der Schlankheit λ erklärt sich erst in Abschnitt B2.2.5, denn für Stützen mit einer Schlankheit bis 25 ist kein Nachweis nach Theorie II. Ordnung erforderlich, also auch keine Berücksichtigung von e_2 . Um den Übergang zur Theorie II. Ordnung nicht sprunghaft, sondern etwas fließender zu gestalten, hat man den Anpassungsfaktor (linearer Übergang) erfunden.

Der Maximalwert der Krümmung der am Fuß eingespannten Modellstütze kann mit einer einfachen Überlegung gut abgeschätzt werden: da wir wirtschaftlich konstruieren, kann man davon ausgehen, dass für die maßgebende Einwirkungskombination der Querschnitt an der Einspannstelle seine Grenztragfähigkeit erreicht. Für Stützen ist die maximale Krümmung erreicht, wenn auf der Biegezugseite die Streckgrenze des Betonstahls gerade erreicht (nicht überschritten) wird (s. Bild B2-19). Ein Überschreiten der Fließgrenze der Bewehrung wie bei Balken hätte eine sehr große Verdrehung im kritischen Schnitt und damit eine sehr große Auslenkung der Stütze zur Folge, was bei stabilitätsgefährdeten Stützen ausgeschlossen werden muss. Auf der Biegedruckseite kann das Erreichen der Fließdehnung ebenfalls als sinnvolle Grenze angesehen werden (diese Festlegung für die Biegedruckseite ist relativ willkürlich, hier hätte man auch die maximale Stauchung am Betonrand z. B mit -3,5‰ annehmen können).

Aus den beiden Dehnungen der Betonstahllagen und ihrem Abstand untereinander kann die maximale Krümmung im kritischen Schnitt für Stützen berechnet werden. In einem M-N-Interaktionsdiagramm nennt man den Punkt der maximalen Krümmung den „balance point“. Die Berechnung der maximalen Krümmung im kritischen Schnitt kann also ohne Kenntnis der Bewehrung vorgenommen werden. Diese Krümmung ist realistisch für Stützen, die ein Zugbruchverhalten zeigen (überwiegend auf Biegung beanspruchte Stützen, vgl. Bild B2-19), bei denen das Versagen auf der Zugseite durch Fließen der Bewehrung eingeleitet wird ($N_{Ed} \leq N_{bal}$).

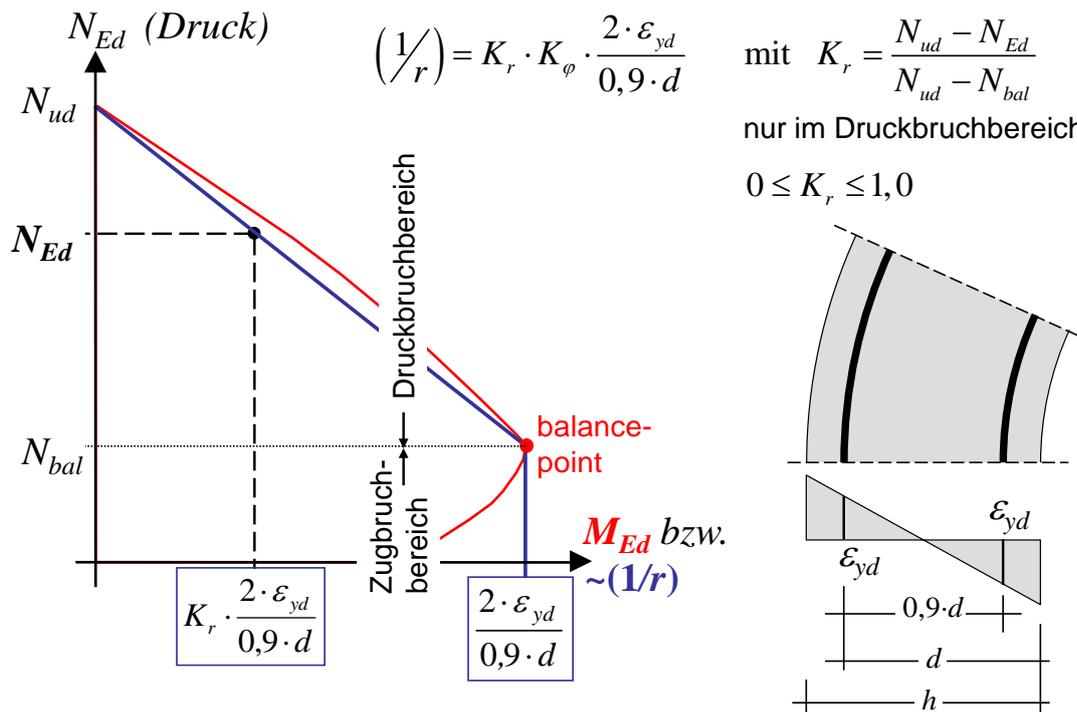


Bild B2-19 Abschätzung der maximalen Krümmung am sogenannten „balance point“. Für Stützen, bei denen die Bewehrung teilweise auch parallel zu der Biegungsebene liegt, gilt: $d=h/2 + i_s$ mit i_s = Trägheitsradius der gesamten Bewehrungsfläche

Für Stützen, deren Versagen auf der Biegedruckseite eintritt ($N_{Ed} > N_{bal}$), wäre die Krümmung deutlich zu unwirtschaftlich abgeschätzt. Hier darf eine lineare Abminderung auf Null zwischen dem Balance-Point und dem Fall des zentrischen Drucks vorgenommen werden. Bild B2-19 zeigt einen Ausschnitt aus einem Interaktionsdiagramm. Für die lineare Abminderung im Druckbruchbereich müssen nun die Hilfwerte N_{ud} und N_{bal} bestimmt werden. Die für zentrischen Druck aufnehmbare Kraft N_{ud} ist hinlänglich bekannt:

$$N_{ud} = f_{cd} \cdot A_c + f_{yd} \cdot A_s \tag{2-1}$$

Leider muss nun auch hier eine Bewehrung vorgeschätzt werden. Wenn A_s größer geschätzt wurde als sich $erfA_s$ aus dem späteren Stabilitätsnachweis ergibt (nicht $gewA_s$, nicht $erfA_s$ aus der Regelbem.), dann liegt die Schätzung auf der sicheren Seite, andernfalls ist eine neue Schätzung erforderlich. Zusätzlicher Hinweis für die Schätzung: N_{ud} muss immer größer als N_{Ed} sein.

Die Balance-Kraft kann für doppelt symmetrische Querschnitte sehr einfach aus dem Dehnungsverlauf entsprechend Bild B2-19 bestimmt werden (Bild bitte ergänzen):

Für Rechteckquerschnitte gilt:

$$N_{bal} = 0,4 \cdot f_{cd} \cdot A_c \tag{2-2}$$

Für die Bestimmung des Kriechfaktors K_ϕ in der Formel für die Krümmung wird auf Abschnitt B.7.2.7 verwiesen.

Mit der Kenntnis aller Parameter kann nun das Gesamtmoment angegeben werden:

$$M_{Ed} = M_{tot} = M_0 + \underbrace{|N_{Ed}| \cdot e_i}_{M_{0Ed}} + \underbrace{|N_{Ed}| \cdot e_2}_{M_2} \quad (2-3)$$

$$M_{Ed} = M_{tot} = M_{0Ed} + M_2$$

oder auch folgendermaßen geschrieben:

$$M_{Ed} = M_{tot} = |N_{Ed}| \cdot (e_0 + e_i + e_2) \quad (2-4)$$

Kriechverformungen werden unglücklicherweise in e_2 berücksichtigt (siehe Abschnitt B2.2.7).

Mit der Gleichung für M_{tot} ist nun die Berechnung nach Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung des Rissverhaltens in eine einfache Querschnittsberechnung überführt worden. **Das Modellstützenverfahren entspricht einer nichtlinearen Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit geschätzter Krümmung im kritischen Querschnitt und einem näherungsweisen Verlauf**, für Stützen mit einem Versagen im Zugbruchbereich sogar ohne vorgeschätzte Bewehrung.

Die Voraussetzungen bzw. Anwendungsgrenzen für das Modellstützenverfahren können aus der Herleitung leicht abgeleitet werden:

- Für Stützen im Druckbruchbereich gilt das Modellstützenverfahren nur bei annähernd rechteck- oder kreisförmigem, über die Stützenlänge unveränderlichem Querschnitt und symmetrischer Bewehrung.
- Die Bewehrung wird über die Stützenhöhe nicht gestaffelt. Bei gestaffelter Bewehrung ist Abschnitt B2.2.8 zu beachten.
- Die Stütze wird durch einfache Biegung beansprucht (Biegemomente nur um eine Achse).
- Das maßgebende Moment entsteht an der Einspannstelle der Modellstütze.
- Bei konstanter Normalkraft bleibt das Superpositionsgesetz erhalten.

In DIN 1045-1, 8.6.5(2) heißt es: Für andere Querschnittsformen und für Lastausmitten $e_0 < 0,1 \cdot h$ ist das Modellstützenverfahren auch anwendbar, jedoch sind andere Näherungen geeigneter (siehe DAfStb-Heft 525). Leider findet sich im Heft 525 nichts zu diesen Themen.

B2.2.2.2 Übertragung auf andere Stabilitätsfälle

Wenn ein Nachweis der Stabilität für ein von der Kragstütze abweichendes System mit dem Modellstützenverfahren geführt werden soll, muss anhand der erwarteten Verformung im Stabilitätsfall der kritische Bereich im Tragwerk identifiziert werden, der mit der Verformung der Modellstütze vergleichbar ist. Alle relevanten Randbedingungen aus dem System einschließlich der Belastung sind dann auf das Ersatzsystem „Modellstütze“ zu übertragen. Die Modellstütze ist sozusagen das idealisierte Berechnungs-„Modell“ anstelle des realen Systems.

Die Stabilitätsverformung einer beidseitig gelenkig gelagerten Stütze (selbstverständlich unver-schieblich gehalten, eine nicht horizontal gehaltene, gelenkige Stütze fällt ziemlich schnell um) kann man sich beispielsweise aus zwei verformten Modellstützen zusammengesetzt denken.

Bild B2-20 Modellstütze bei einer beidseitig gelenkig gelagerten Stütze und einer beidseitig eingespannten Stütze (Bilder bitte eintragen)

Schon bei einer vergleichbar einfachen Stütze, nämlich einer einseitig eingespannten Stütze, die andere Seite gelenkig und horizontal gehalten, ist die Modellstütze nicht mehr eindeutig zu identifizieren.

Bild B2-21 Modellstütze bei einer eingespannten, am Kopf horizontal gehaltenen Stütze nicht bestimmbar (Bild bitte eintragen)

Schon für dieses Beispiel müsste das Modellstützenverfahren gedanklich erweitert werden. Leider hat sich dafür bisher keiner Zeit genommen. Stattdessen müssen wir auf die von *Euler* entwickelte Knicklänge für die Grundfälle und von anderen Forschern entwickelten Erweiterungen für komplexere statische Rahmensysteme zurückgreifen. Die halbe Knicklänge entspricht dann der Länge der Modellstütze.

Diese Vorgehensweise ist sehr bedauerlich, weil die Berechnung nach Theorie II. Ordnung ein gänzlich anderer Ansatz des Stabilitätsnachweises ist als der von *Euler*. Die Theorie II. Ordnung kennt die Begriffe „Knicklänge“ und „Schlankheit“ nicht. Insofern ist der Stabilitätsnachweis mit dem Modellstützenverfahren nach Theorie II. Ordnung über die ersatzweise Berechnung einer Knicklänge eine ziemliche Krücke. Bei älteren Praktikern ist diese allerdings durchaus willkommen, weil sie im EC2 etwas Bekanntes wiedergefunden haben und sich in diesem Punkt nicht umstellen mussten.

Daher müssen wir uns für die nächsten Jahre (hoffentlich nicht Jahrzehnte) noch mit der Ermittlung von Knicklängen bzw. Ersatzlängen, wie sie im Stahlbetonbau häufig genannt werden, beschäftigen.

B2.2.3 Bestimmung der Ersatzlänge von Einzeldruckgliedern

In Bild B2-22 sind Beispiele für verschiebliche und unverschiebliche Einzeldruckglieder dargestellt:

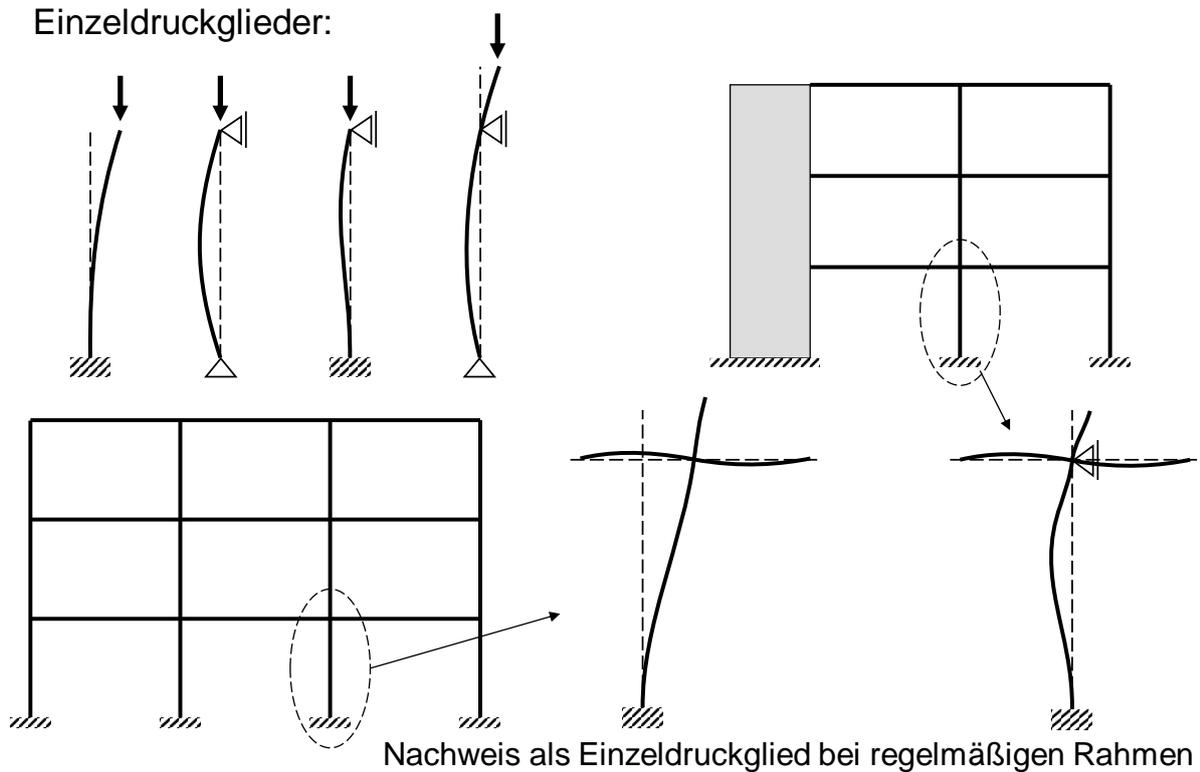


Bild B2-22 Beispiele für verschiebliche und unverschiebliche Einzeldruckglieder

Zunächst sollen die Ersatzlängen für einfache Systeme nach *Euler* zusammengestellt werden Bild B2-23:

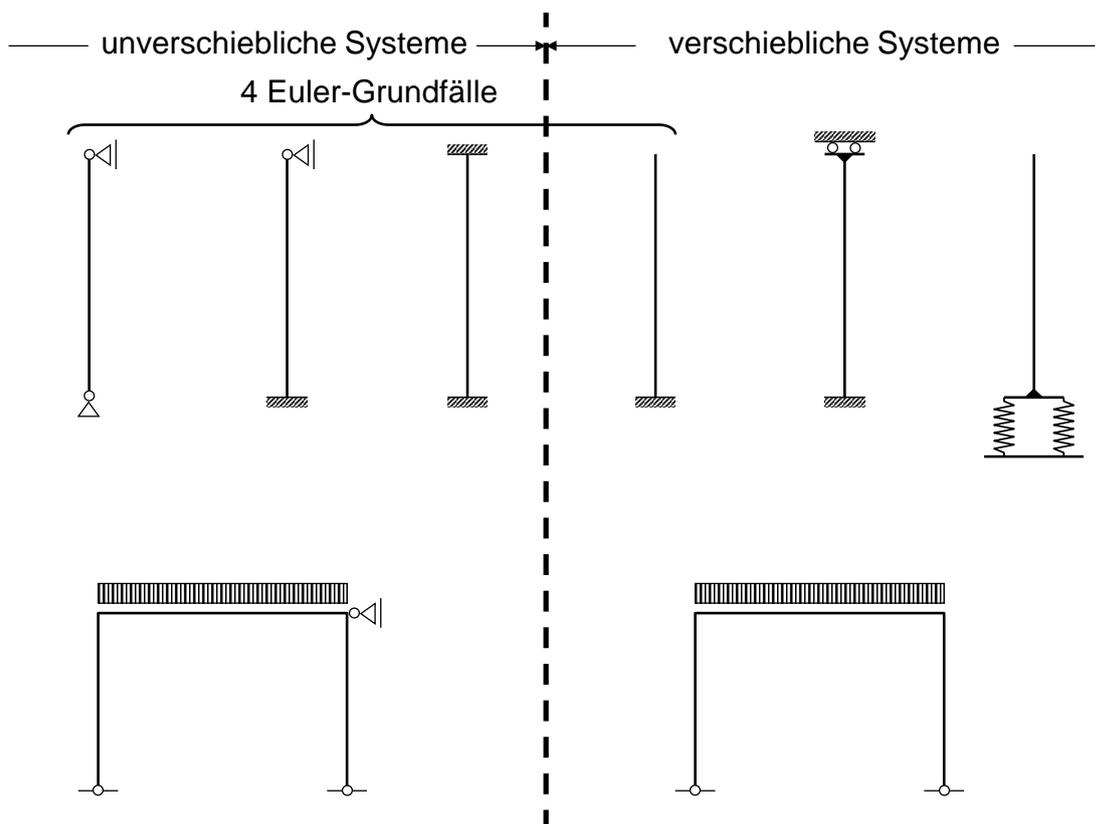


Bild B2-23 Ersatzlängen einfacher Systeme mit linear-elastischem Materialverhalten

Knickbiegelinien werden unabhängig von der Biegebeanspruchung ermittelt, sie unterscheiden sich von Lastbiegelinien (in der Realität und bei Anwendung der Theorie II.Ordnung beeinflussen sich beide gegenseitig). Bei der Konstruktion der Verformungslinien in Bild B2-1 bis Bild B2-4 ergab sich die Verformung der Rahmenstiele jeweils aus der Durchbiegung der Rahmenriegel, dort wurde die Knotenverdrehung durch den Biege­widerstand der Stiele begrenzt. Bei der Konstruktion von Knickbiegelinien ergibt sich umgekehrt die Verformung/Knickausbiegung in den Stielen und die Knotenverdrehung wird durch die Biegesteifigkeit der „unbelasteten“ Riegel begrenzt.

Für Stützen, die an einem oder beiden Enden elastisch eingespannt sind (z.B. durch biegesteifen Anschluss mit Rahmenriegeln) müssen die Knotendrehsteifigkeiten ermittelt werden (für unverschiebliche Systeme nach Bild B2-24 und für verschiebliche Systeme nach Bild B2-26). Mit Hilfe des Ersatzlängenbeiwertes β kann dann die Ersatzlänge berechnet werden. Der Ersatzlängenbeiwert β für eingeschossige Rahmen wird aus dem jeweiligen „Leiternomogramm“ (Bild B2-25) abgelesen.

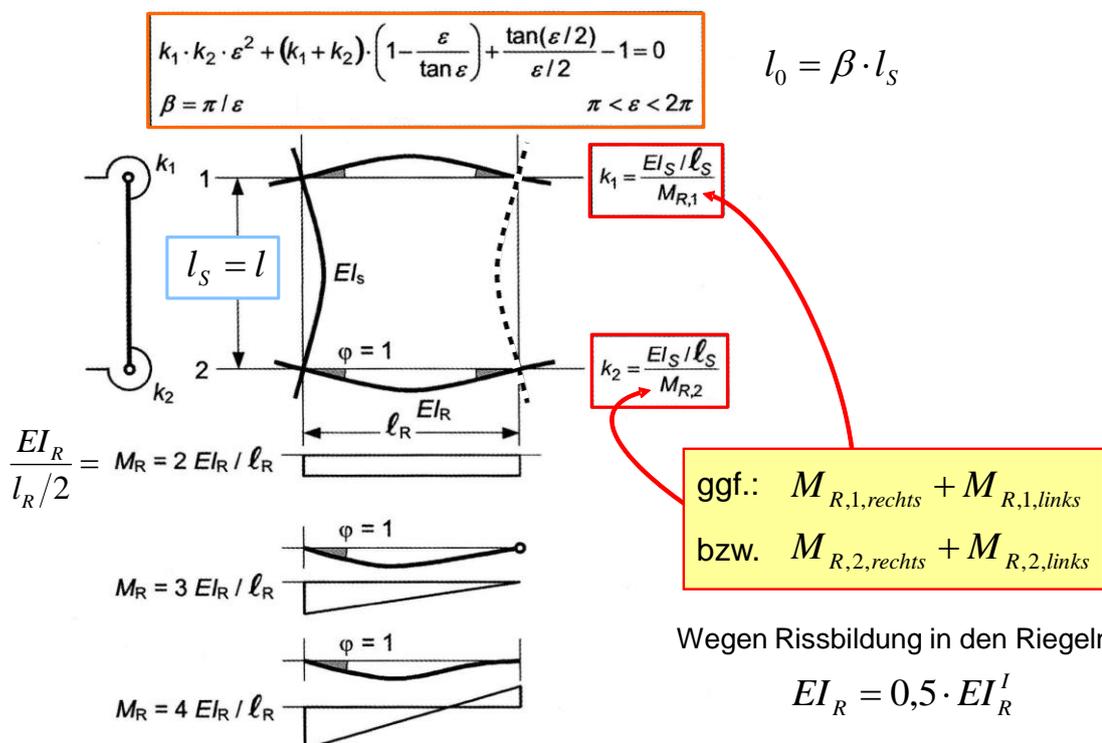


Bild B2-24 Knotendrehsteifigkeiten für eingeschossige Rahmenstützen **unverschieblicher** Rahmen nach Quast [1]

Die k -Werte passen nicht zu dem Begriff Knotendreh„steifigkeiten“, denn je größer der k -Wert, um so weicher ist die Drehfeder (die elastische Einspannung). Die Knotendrehsteifigkeit ist folgendermaßen definiert:

$$k_i = \frac{\text{Stabsteifigkeit der Stütze}}{\text{Summe der am Knoten angeschlossenen Verdrehungswiderstände / - steifigkeiten}} \quad (2-5)$$

Der Verdrehungswiderstand M_R der Rahmenriegel ergibt sich aus deren Biegesteifigkeit EI_R , der Rie­gellänge l_R und der möglichen Verformung der Riegel (der Art der Lagerung am anderen Riegelende). Die Verformung bestimmt den Vorfaktor beim Verdrehungswiderstand M_R . Sind beidseits eines Knotens Riegel angeschlossen, werden ihre Verdrehungswiderstände addiert.

Durch eine Rissbildung in den Riegeln fällt ihre widerstehende Steifigkeit deutlich gegenüber der im ungerissenen Zustand ab. Bei üblich beanspruchten Riegeln muss man von einer Rissbildung ausgehen, ohne weiteren Nachweis darf pauschal die Biegesteifigkeit auf 50% reduziert angenommen werden.

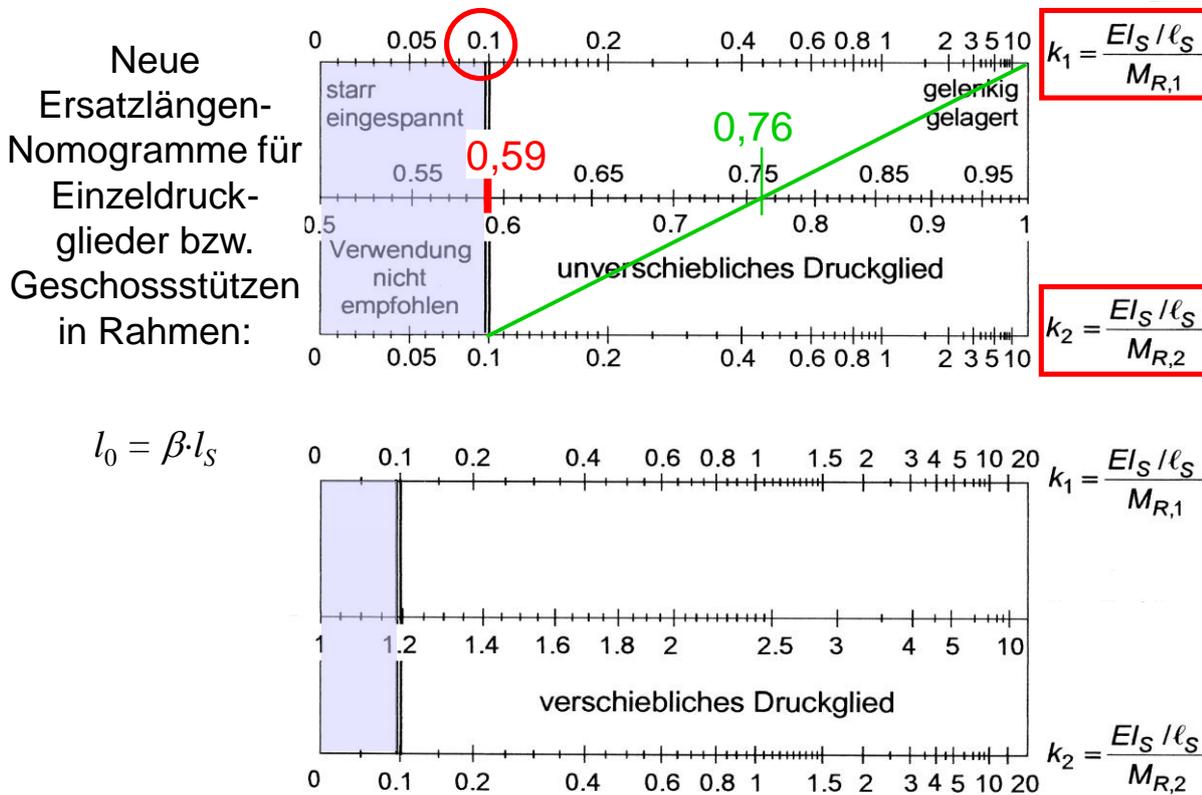


Bild B2-25 Ersatzlängen-Nomogramme für Einzeldruckglieder bzw. Geschossstützen in Rahmen nach Quast [1]

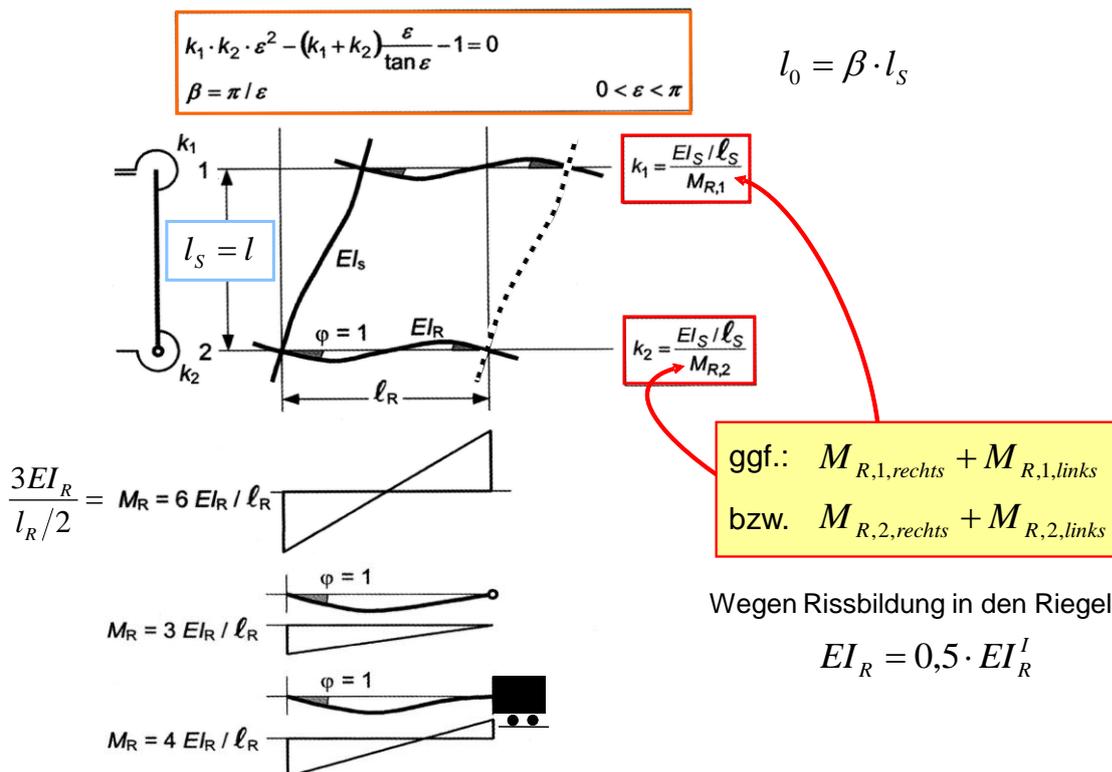


Bild B2-26 Knotendrehsteifigkeiten für eingeschossige Rahmenstützen **verschieblicher** Rahmen nach Quast [1]

Alternativ: vereinfachte Ersatzlängenformeln für Einzeldruckglieder oder Stützen in regelmäßigen, eingeschossigen Rahmen (i.d.R. zur Verwendung in EDV-Programmen):

$$l_0 = 0,5 \cdot l_s \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{0,45 + k_2}\right)}$$

Knicklängenformeln für **unverschiebliche**

$$l_0 = l_s \cdot \max \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + 10 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}} \\ \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right) \end{array} \right.$$

und **verschiebliche**
 Rahmen nach *Quast*:
 Knicklängen, Ersatzlängen, Modellstützen.
 Beton- und Stahlbetonbau
 Heft 5, 2003, S.249

Bild B2-27 Näherungslösungen für Ersatzlängen nach *Quast* [1]

Bei mehrgeschossigen Rahmen wird der Verdrehungswiderstand aus den Rahmenriegeln von beiden an einem Knoten angeschlossenen Stützen in Anspruch genommen. Bei regelmäßigen Systemen steht jeder Stütze nur etwa jeweils die Hälfte der Verdrehungssteifigkeit zur Verfügung, d.h. der k -Wert verdoppelt sich. Die Regelmäßigkeit wird aus dem Verhältnis der sogenannten Stabkennzahlen der am Knoten angeschlossenen Stützen ermittelt (siehe Bild B2-28).

In mehrgeschossigen, verschieblichen oder **unverschieblichen** Rahmensystemen gilt:

$$k_i = \frac{\sum EI_s / l_s}{\sum M_{R,i}}$$

wenn das Stabilitätsversagen übereinander angeordneter Stiele gleichzeitig eintritt. Dies ist näherungsweise gegeben, wenn an jedem Rahmenknoten, an dem ein k_i -Wert berechnet werden muss, gilt:

$$0,8 \leq \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} \leq 1,25 \quad \text{mit } \varepsilon = l_s \cdot \sqrt{\frac{N}{EI_s}} \quad N_{Ek} \text{ oder } N_{Ed} ?$$

Bild B2-28 k -Werte bei mehrgeschossigen, regelmäßigen Rahmen

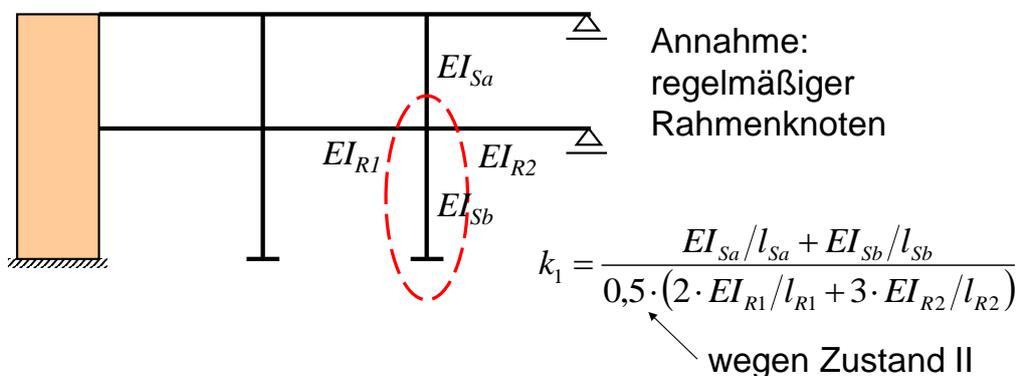
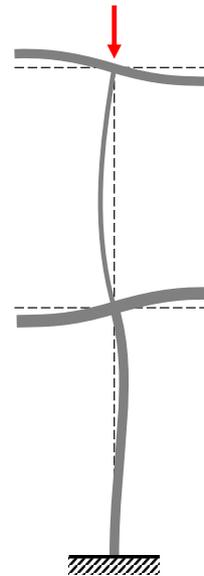


Bild B2-29 Beispiel für die Ermittlung eines k -Wertes bei einem zweigeschossigen, regelmäßigen Rahmen

An **unregelmäßigen Rahmenknoten in mehrgeschossigen**, (verschieblichen oder **unverschieblichen**) Rahmensystemen liegen für die stärker stabilitätsgefährdete Stütze (größerer ε -Wert) die wie vor berechneten k_i -Werte auf der sicheren Seite.

$$k_i = \frac{EI_{Sa}/l_{Sa} + EI_{Sb}/l_{Sb}}{0,5 \cdot (2 \cdot EI_{R1}/l_{R1} + 3 \cdot EI_{R2}/l_{R2})}$$

Für die weniger stabilitätsgefährdete Stütze können die entsprechenden Knoten mit $k_i \Rightarrow \infty$ (gelenkig) auf der sicheren Seite liegend angenommen werden.



An Einspannungen darf $k = 0,1$ angenommen werden.

Bild 2-30 Beispiel wie in vorhergehendem Bild, jedoch mit der Annahme eines unregelmäßigen Rahmens

Mit dem beschriebenen Verfahren können für die im Massivbau häufig vorkommenden Fälle Ersatzlängen ermittelt werden. Die Ersatzlängen dienen zum einen der Anwendung des Modellstützenverfahrens für Systeme, die von der Modellstütze abweichen und zum anderen der Überprüfung, ob überhaupt ein Stabilitätsnachweis geführt werden muss (siehe hierzu Abschnitt B2.2.5).

B2.2.4 Imperfektionen für Einzeldruckglieder

Als Imperfektion für Einzeldruckglieder ist nach EC2, Abschnitt 5.2(7) eine ungewollte Lastausmitte in jeweils ungünstigster Richtung anzunehmen, die bei mehreren Stützen in einem Geschoss abgemindert werden kann:

ungewollte Lastausmitte

$$e_i = \theta_i \cdot l_0 / 2 \quad \theta_i = \theta_0 \cdot \alpha_h = \frac{1}{200} \cdot \frac{2}{\sqrt{l}} \quad \text{mit } l \text{ in m, } l \geq 4,0m$$

Bei aussteifenden Bauteilen (Stützen oder Wänden) darf die Schiefstellung θ_i abgemindert werden, sofern mehrere vertikal lastabtragende Bauteile vorhanden sind, und zwar mit

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{1+1/m}{2}}$$

Für m zählen nur Bauteile mit einer Längskraft von mindestens $0,7 \cdot N_{Ed,m} = 0,7 \cdot F_{Ed}/n$

n Anzahl aller lotrecht lastabtragenden Bauteile eines Geschosses

F_{Ed} Längskraftsumme eines Geschosses

$N_{Ed,m}$ Mittelwert der Normalkraft aller lastabtragenden Bauteile

Bild B2-31 Ermittlung der Imperfektion

B2.2.5 Entfall des Nachweises nach Theorie II. Ordnung

Bei jedem komplizierten Nachweis ist es immer wichtig zu fragen: unter welchen Bedingungen kann ich auf einen Nachweis verzichten? (Bauingenieure sind faul, andere sind noch fauler!). Als allgemein sinnvolle Regel wird in EC2, Abschnitt 5.8.2 (6) vorgeschlagen:

Die Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung dürfen vernachlässigt werden, wenn der Unterschied weniger als 10 % zu den entsprechenden Auswirkungen nach Theorie I. Ordnung beträgt.

Eine ebenso einleuchtende wie unpraktische Formulierung, denn um eine solche Aussage treffen zu können, muss man ja die aufwändige Berechnung nach Theorie II. Ordnung durchgeführt haben. Zusätzlich bleibt die Frage offen, wie man feststellt, wann sich bei der Kombination von Biegung und Längskraft die Beanspruchung um 10% erhöht hat (siehe Bild B2-32)?

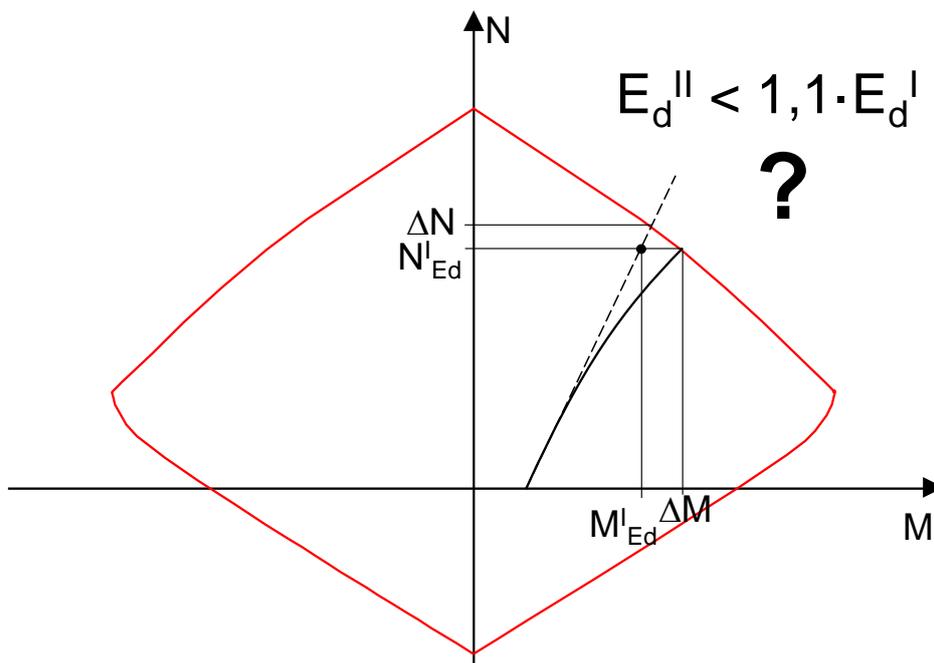


Bild B2-32 Zur Klärung der Bedingung für den Entfall des Nachweises nach Theorie II. Ordnung

Glücklicherweise finden wir in EC2, Abschnitt 5.8.3.1: alternativ zu 5.8.2 (6) dürfen die Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung vernachlässigt werden, wenn die Schlankheit λ unterhalb eines Grenzwertes λ_{lim} liegt.

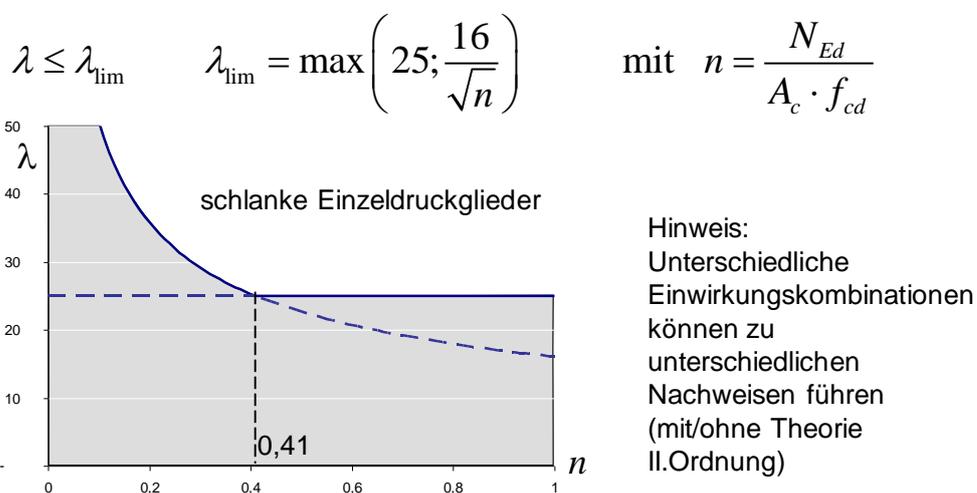


Bild B2-33 Ermittlung von λ_{lim}

Die Schlankheit λ ist uns von *Euler* bekannt:

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (2-6)$$

mit:

l_0 Ersatzlänge (Knicklänge)

i Trägheitsradius

In Abschnitt B2.2.2.1 wurde der Faktor K_1 zur Anpassung der Ausmitte e_2 nach Theorie II. Ordnung im Bereich $25 < \lambda \leq 35$ eingeführt. Mit ihm soll ein sprunghafter Anstieg der Momente von Theorie I. Ordnung ($\lambda \leq 25$) am Übergang zur Theorie II. Ordnung vermieden werden.

B2.2.6 Kritische Schnitte und maßgebende, planmäßige Momente

Im Abschnitt B2.2.2.2 haben wir kurz angedeutet, wie man Stützen behandelt, deren statisches System von dem der Modellstütze abweicht. Entweder kann man die Modellstütze in einem komplexeren System identifizieren und die Randbedingungen auf die Modellstütze übertragen oder man ermittelt sich die Ersatzlänge nach Abschnitt B2.2.3 und führt mit ihr den Stabilitätsnachweis an der Modellstütze.

Bei üblich beanspruchten **verschieblichen** Systemen (durch Vertikal- und Horizontallasten, letztere in den Knoten angreifend) wird das maßgebende Moment nach Theorie II. Ordnung in den Systemknoten auftreten. Das maximale Moment nach Theorie I. Ordnung, das in den Knoten (Rahmenecken) auftritt, wird durch die Wirkung der Vertikalkräfte am verformten System vergrößert (Bild B2-34).

Für verschiebliche Rahmensysteme liegt der **kritische Schnitt** i. d. R. im Rahmenknoten. Die anschließenden **einspannenden Bauteile** (Fundament, Riegel) müssen für das vergrößerte Moment bemessen werden.

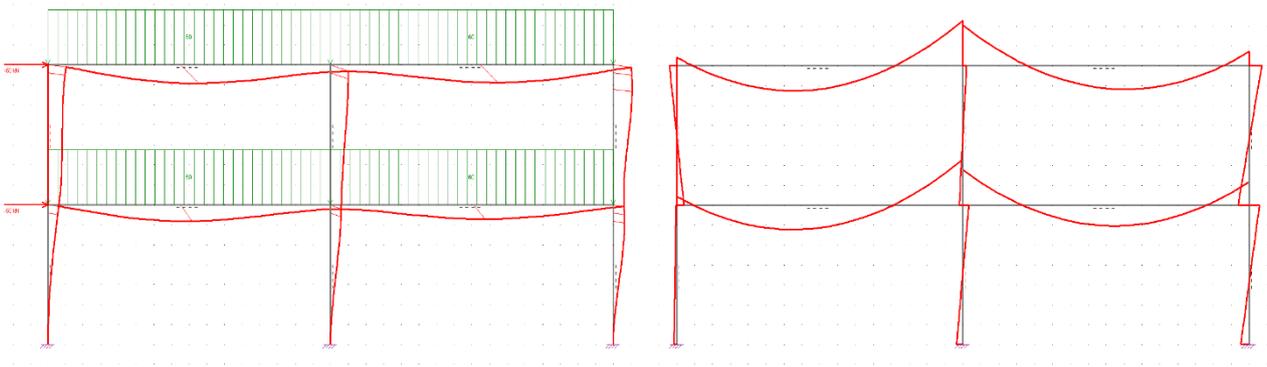


Bild B2-34 Verformungen und Biegemomente eines verschieblichen Rahmens, berechnet mit Stab2d-nl (<http://www.u-pfeiffer.de/>)

Bei üblich beanspruchten **unverschieblichen** Systemen (nur Vertikallasten auf Riegeln und Knoten, keine Querlasten an der Stütze angreifend) entsteht nach Theorie I.Ordnung in der Regel ein linearer Momentenverlauf. Es kann im Stabilitätsfall eine Verformungsfigur entstehen, die nicht der aus der Lastbiegung entspricht.

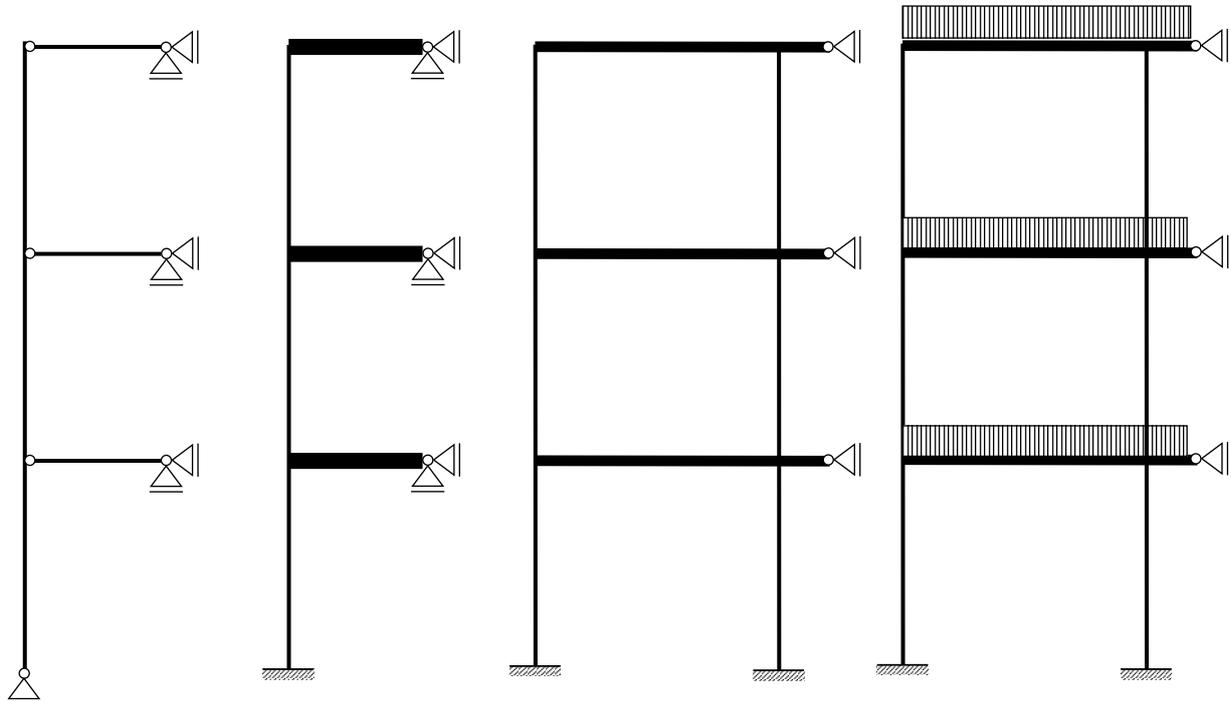


Bild B2-35 Unterschied zwischen Knickbiegeline und Lastbiegeline (die Verformungsbilder bitte nachtragen)

Es gibt auch Situationen, bei denen Knickbiegeline und Lastbiegeline sehr ähnlich sind:

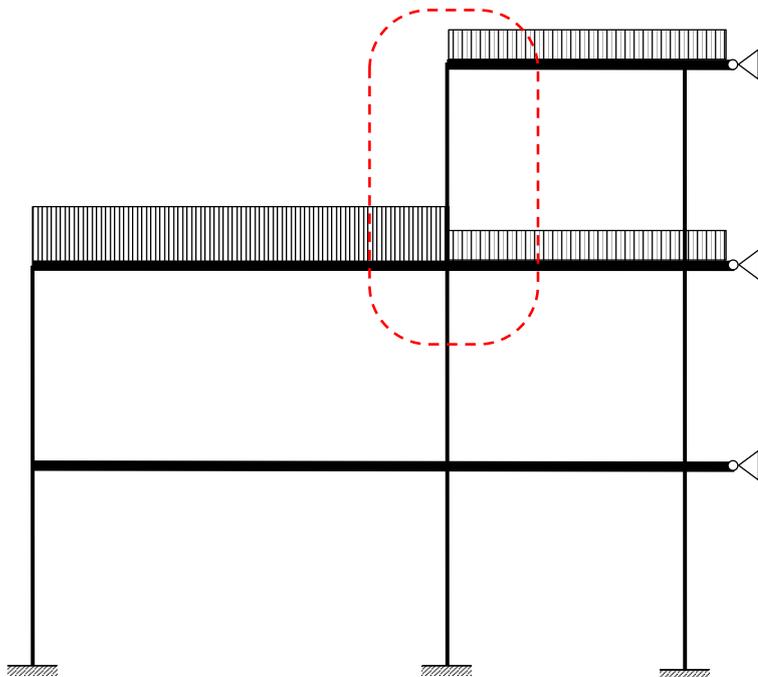


Bild B2-36 System, bei dem sich Knickbiegeline und Lastbiegeline sehr ähnlich sind (die Verformungsbilder bitte nachtragen)

Die Knickbiegeline wird unabhängig von der Belastung ermittelt. Für die Knickbiegelines können maßgebende Momente im mittleren Bereich zwischen zwei Geschossknoten der Stütze entstehen. Für

diesen mittleren Bereich muss nun ein planmäßiges Moment als Grundlage des Stabilitätsnachweises bestimmt werden. Nach EC2, Abschnitt 5.8.8.2(2) darf bei unterschiedlichen Momenten M_{01} und M_{02} an den Stabenden für Stützen ohne Querlasten zwischen den Stabenden nachfolgendes äquivalentes Moment angesetzt werden:

$$\begin{aligned} M_{0e} &= 0,6 \cdot M_{02} + 0,4 \cdot M_{01} \\ &\geq 0,4 \cdot M_{02} \end{aligned} \quad (2-7)$$

M_{02} ist stets das betragsmäßig größte Moment. Unterschiedliche Vorzeichen müssen dabei beachtet werden.

B2.2.7 Kriechauswirkungen

Kriechauswirkungen dürfen unberücksichtigt bleiben, wenn die gleichzeitig drei Bedingungen eingehalten sind:

$$\varphi(\infty, t_0) \leq 2 \quad \lambda \leq 75 \quad \frac{M_{0Ed}}{N_{Ed}} \geq h$$

Dabei ist h die Querschnittshöhe in der betrachteten Richtung. Kriechauswirkungen dürfen entsprechend dem nationalen Anhang zum EC2 auch unberücksichtigt bleiben, wenn die Stützen an beiden Enden monolithisch mit lastabtragenden Bauteilen verbunden sind oder wenn bei verschieblichen Tragwerken die Schlankheit des Druckgliedes $\lambda < 50$ und gleichzeitig die bezogene Lastausmitte $e_0/h > 2$ ist

$$\frac{M_{0Ed}}{N_{Ed}} \geq 2h$$

bzw.

Die effektive Kriechzahl wird folgendermaßen ermittelt:

$$\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0) \cdot \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}} \quad (2-8)$$

M_{0Edp} Moment nach Theorie I. Ordnung aus quasi-ständiger Einwirkungskombination incl. Imperfektionen im GZG

M_{0Ed} Moment nach Theorie I. Ordnung unter Bemessungs-Einwirkungskombination einschließlich Imperfektionen im GZT

$\varphi(\infty, t_0)$ Endkriechzahl gemäß EC2, 3.1.4

Wenn der Verhältniswert der beiden Momente in einem Bauteil variiert, darf er für den Querschnitt mit dem maximalen Moment berechnet oder als „repräsentativer Mittelwert“ ermittelt werden.

Zur Bestimmung der Krümmung nach dem Modellstützenverfahren ist ein Kriechbeiwert zu bestimmen:

$$k_\varphi = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} \quad (2-9)$$

Dabei ist:

φ_{ef} die effektive Kriechzahl

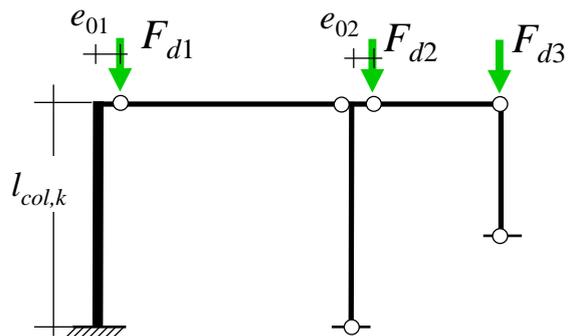
$$\beta = 0,35 + f_{ck} / 200 - \lambda / 150$$

Dieser Ansatz passt nicht ganz in das Modellstützenverfahren, weil bei der Ausmitte e_2 die kritische Krümmung bereits erreicht ist und diese mit einem Vergrößerungsfaktor überschritten würde. Richtiger wäre es, die Kriechausmitte nach Theorie I. Ordnung abzuschätzen und zu der ungewollten Lastausmitte hinzu zu addieren. Dieses Vorgehen würde insbesondere bei Stützen mit geringem planmäßigen Moment ein realistischeres Ergebnis erzielen.

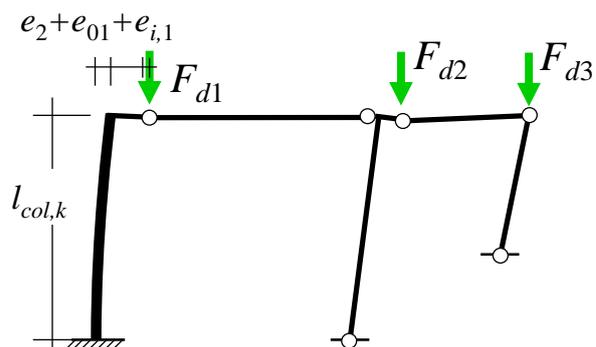
B2.2.8 Erweiterung des Modellstützenverfahrens

„Angehängte Pendelstützen“

Für aussteifende Bauteile ist die Wirkung der auszu**z**usteienden Bauteile (angehängten Pendelstützen) zu berücksichtigen.

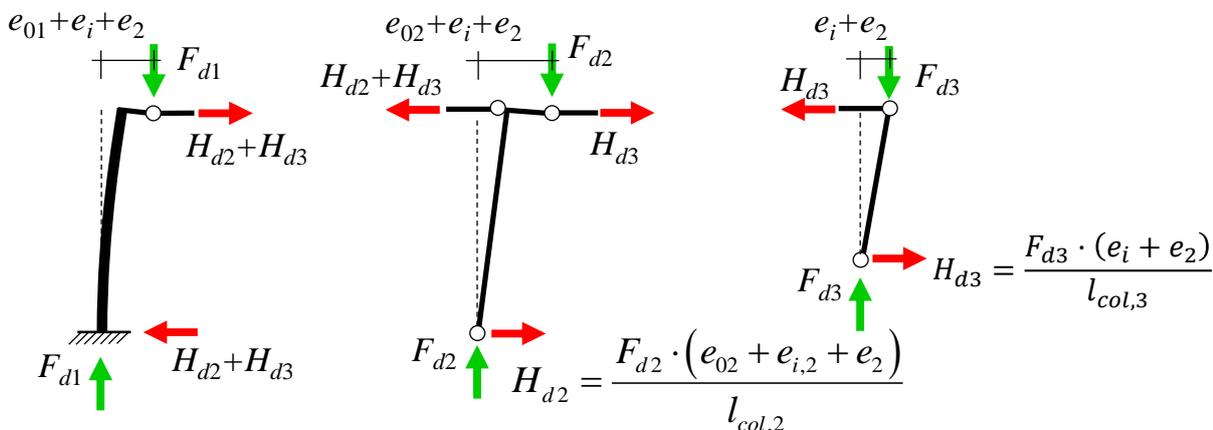


Das Gesamtmoment $M_{Ed,tot}$ ergibt sich aus der Betrachtung am verformten System. Ggf. sind weitere Lastfälle (z.B. Wind) zu berücksichtigen. Die planmäßigen Lasten können vereinfacht auch vorab am unverformten System berechnet werden.



Bei der Imperfektion kann die Abminderung für mehrere Stützen in Ansatz gebracht werden.

Hinweis: bei einer nachgiebigen Einspannung an der aussteifenden Stütze sind gesonderte Betrachtungen erforderlich.



$$M_{Ed,tot} = F_{d1} \cdot (e_{01} + e_i + e_2) + (H_{d2} + H_{d3}) \cdot l_{col,1}$$

oder:

$$M_{Ed,tot} = F_{d1} \cdot (e_{01} + e_i + e_2) + F_{d2} \cdot (e_{02} + e_i + e_2) \cdot \frac{l_{col,1}}{l_{col,2}} + F_{d3} \cdot (e_i + e_2) \cdot \frac{l_{col,1}}{l_{col,3}}$$

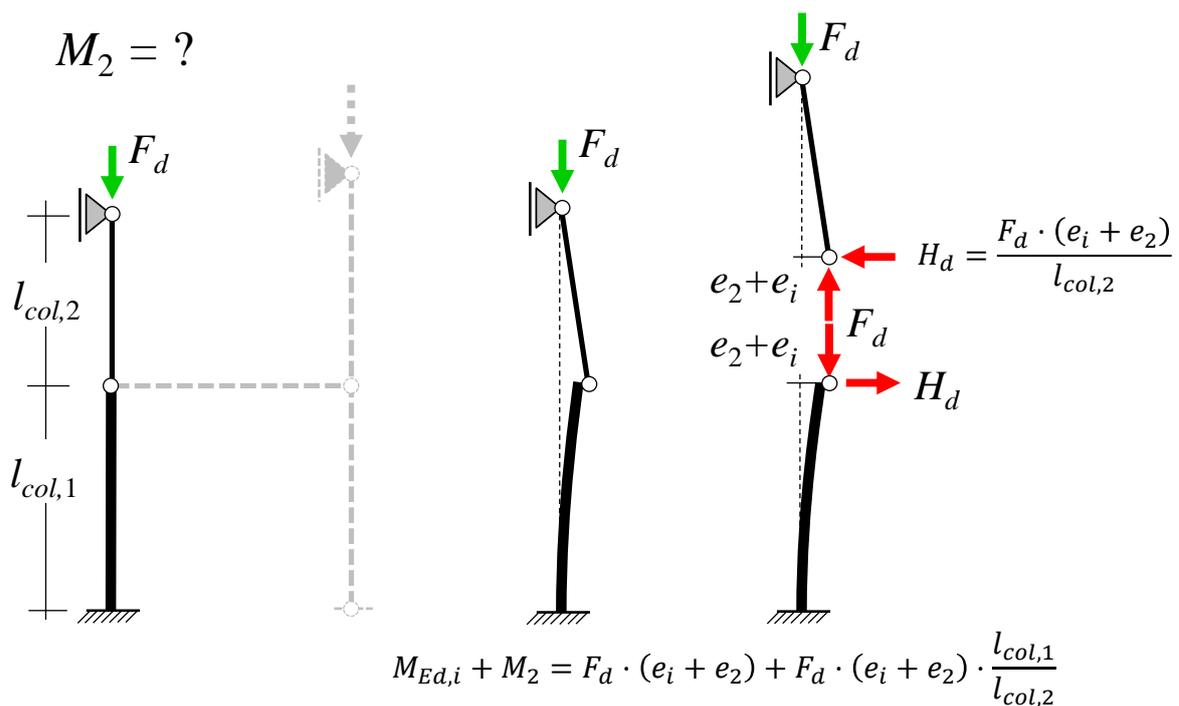
Die angehängten Stützen können jeweils andere Längen als die einspannende Stütze haben (ist bei der Berechnung der H-Kräfte einfach zu berücksichtigen).

Problematisch im Zusammenhang mit den angehängten Pendelstützen ist die Ermittlung der Schlankheit für die Entscheidung, ob ein Stabilitätsnachweis erforderlich ist. Die Stabilitätsgefahr erhöht sich auf jeden Fall durch die angehängten Pendelstützen. Bei der Ersatzlänge von $l_0 = 2 \cdot l_{col}$ kommt das allerdings nicht zum Ausdruck.

In den meisten Fällen dieser Art ist der Stabilitätsnachweis ohnehin erforderlich. Bevor nun eine umfangreiche Umrechnung der Schlankheit (Umrechnung des Momentenzuwachses aus den Pendelstützen in eine äquivalente Gesamtnormalkraft für die Einzelstütze) für die wenigen Fälle erfolgt, bei denen auf den Nachweis verzichtet werden kann, sollte generell der Nachweis geführt werden. Bleibt der Schnittgrößenzuwachs ggf. unter 10% bleibt, resultiert daraus keine unwirtschaftliche Bemessung.

noch ein **Hinweis**: die angehängten Pendelstützen müssen auch einzeln gegen Stabilitätsversagen nachgewiesen werden, sofern dies erforderlich wird. Hierfür können sie als horizontal unverschiebliche Stützen betrachtet werden.

Für weitere Beispiele wird auf [2], Abschnitt 3.5 verwiesen.



B2.2.9 Druckglieder mit zweiachsiger Lastausmitte

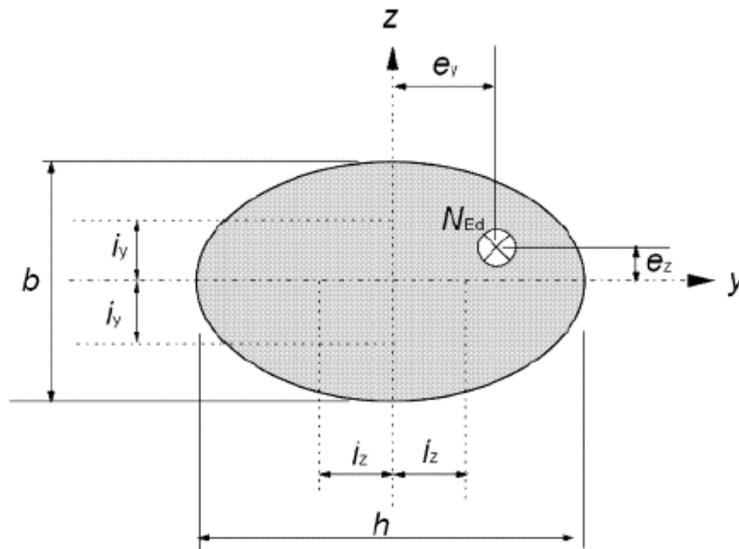
Es ist erforderlich, das Tragverhalten in jeder der beiden Hauptachsenrichtungen zu betrachten, ggf. muss der kritische Querschnitt für die Kombination beider Fälle nachgewiesen werden. Für beide Richtungen können an den Enden des Bauteils unterschiedliche Randbedingungen vorliegen. Diese Bedingungen müssen in einer geeigneten Weise erfasst werden.

Im ersten Schritt sollen getrennte Nachweise in den Richtungen der beiden Hauptachsen y und z (siehe EC2, Bild 5.8) geführt werden. Wenn $0,5 \leq \lambda_y / \lambda_z \leq 2$ **und gleichzeitig** das Verhältnis der

bezogenen Lastausmitten e_y/h_{eq} und e_z/b_{eq} eine der folgenden Bedingungen erfüllt, dann bedarf es keiner weiteren Nachweise.

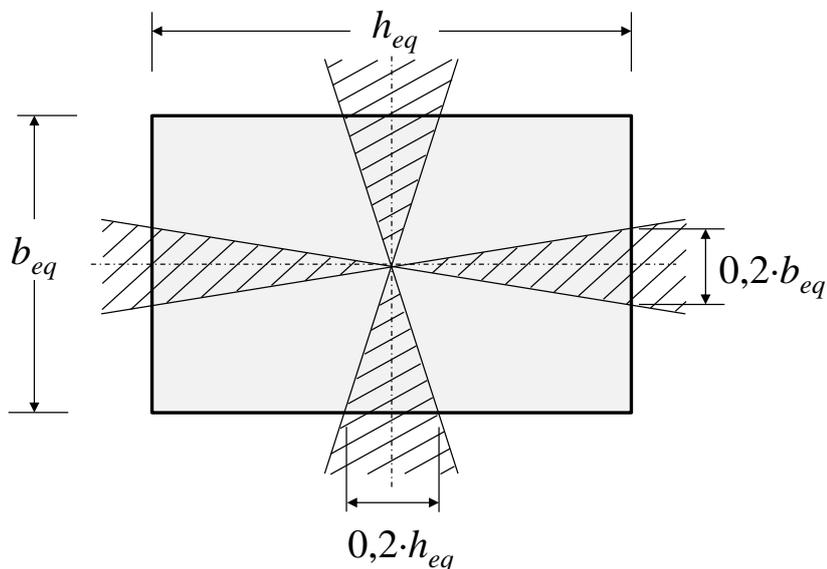
$$\frac{e_y/h_{eq}}{e_z/b_{eq}} \leq 0,2 \quad \text{oder:} \quad \frac{e_z/b_{eq}}{e_y/h_{eq}} \leq 0,2 \quad e_y, e_z \quad \text{die jeweilige Lastausmitte nach Theorie II. Ordnung in Richtung der Querschnittsseiten } h \text{ bzw. } b$$

$$h_{eq} = i_z \cdot \sqrt{12} \quad \text{und} \quad b_{eq} = i_y \cdot \sqrt{12} \quad \text{für einen gleichwertigen Rechteckquerschnitt}$$



EC2, Bild 5.8 — Definition der Lastausmitten e_y und e_z

Gleichwertig zu Bild 5.8 in Verbindung mit den Lastausmitten:

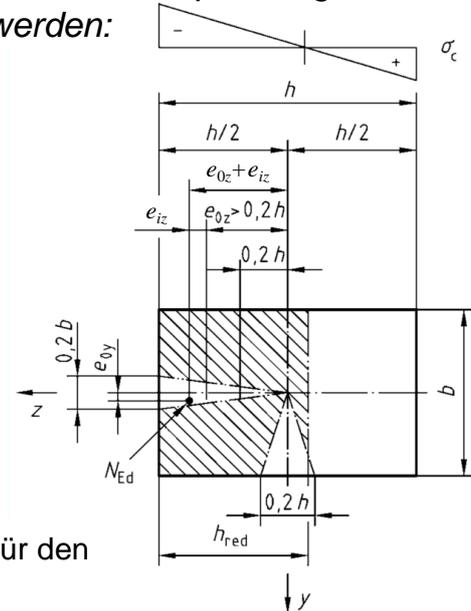


Wenn die resultierende Normalkraft im schraffierten Bereich liegt (ggf. auch außerhalb der äquivalenten Stütze),

Für Druckglieder mit rechteckigem Querschnitt und mit $e_{0z} > 0,2 \cdot h$ dürfen getrennte Nachweise nur dann geführt werden, wenn der Nachweis der **Biegung über die schwächere Hauptachse z** des Querschnitts auf der Grundlage der reduzierten Querschnittsdicke h_{red} nach Bild NA.5.8.1 geführt wird. Der Wert h_{red} darf unter der Annahme einer linearen Spannungsverteilung nach folgender Gleichung ermittelt werden:

$$h_{red} = \frac{h}{2} \cdot \left(1 + \frac{h}{6 \cdot (e_{0z} + e_{iz})} \right) \leq h$$

- h die größere der beiden Querschnittsseiten
- e_{iz} die Zusatzausmitte zur Berücksichtigung geometrischer Ersatzimperfectionen in z-Richtung
- e_{0z} die Lastausmitte nach Theorie I. Ordnung in Richtung der Querschnittsseite h



EC2, Bild NA.5.8.1: Reduzierte Querschnittsdicke h_{red} für den getrennten Nachweis in y-Richtung bei $e_{0z} > 0,2 \cdot h$

Bild B2-37 Bedingungen für den getrennten Nachweis bei Beanspruchung in zwei Richtungen und Beachtung einer ggf. reduzierten Querschnittsfläche infolge Querbiegung (Achtung: y- und z-Richtung gegenüber EC2, Bild 5.8 vertauscht!)

Bei getrennten Nachweisen darf die Bewehrung jeweils vollständig für jede Richtung in Rechnung gestellt werden.

B2.3 Bemessung

B2.3.1 Bemessung im GZT für Normalkraft und Biegung

Die Bemessung kann für Rahmenriegel und -stützen nach den bekannten Grundlagen durchgeführt werden. Da Stützen häufig symmetrisch bewehrt werden, empfiehlt sich eine Bemessung mit dem Interaktionsdiagramm. Bei den Stützen ist besonderes Augenmerk auf die verschiedenen Einwirkungskombinationen zu werfen. Die maßgebende Einwirkungskombination kann häufig nicht direkt angegeben bzw. ermittelt werden. Es sind insbesondere auch die Kombinationen mit den 1,0fachen ständigen Einwirkungen zu beachten, bei überwiegender Biegung ($N_{Ed} \leq N_{bal}$) können sich hier größere Bewehrungsmengen ergeben.

Die Bemessung muss zunächst als sogenannte Regelbemessung nach Theorie I. Ordnung durchgeführt werden. Wenn eine Bemessung nach Theorie II. Ordnung (Stabilitätsnachweis) erforderlich wird, ist dieser Stabilitätsnachweis zusätzlich zu betrachten.

Die an stabilitätsgefährdete Bauteile anschließenden Bauteile müssen für vergrößerte Momente nach Theorie II. Ordnung bemessen werden (i.d.R. monolithisch angeschlossene Rahmenriegel oder Fundamente).

B2.3.2 Bemessung im GZT für Querkraft

Die Rahmenriegel werden wie übliche Balken oder Plattenbalken im GZT für Querkraft bemessen. Ggf. müssen Erhöhungen der Querkräfte infolge vergrößerter Momente nach Theorie II. Ordnung berücksichtigt werden.

Für Stützen von unverschieblichen Rahmen sind die Querkräfte i.d.R. so gering, dass vielfach auf einen Nachweis verzichtet werden kann, oftmals sind sie sogar vollständig überdrückt, wodurch sich der Querkraftwiderstand zusätzlich vergrößert.

Für Stützen in verschieblichen Rahmen, die überwiegend auf Biegung beansprucht werden, sollte ein Nachweis im GZT für Querkraft geführt werden.

B2.3.3 Nachweise im GZG (Spannungen, Rissbreiten, Verformungen)

Die Rahmenriegel sind wiederum wie Balken und Plattenbalken zu behandeln. Für Stützen sind Nachweise der Spannungen und der Rissbreiten i.d.R. entbehrlich, Kopfverschiebungen von verschieblichen Rahmen, insbesondere von eingespannten Stützen, die überwiegend auf Biegung beansprucht werden, sollten im gerissenen Zustand nachgewiesen werden, um unzulässige Verformungen zu vermeiden. Hierfür gelten die gleichen Grundlagen wie bei der Verformungsberechnung von Decken und Balken.

B2.4 Konstruktion

Die Rahmenriegel sind wiederum wie Balken und Plattenbalken zu behandeln. Für die konstruktive Ausbildung der Stützen gelten die nachfolgenden Abschnitte. Die Rahmenknoten (Rahmenecken) werden entsprechend dem Sonderthema „Bemessung mit Stabwerkmodellen“ bemessen und konstruiert.

Literatur

- [1] Quast, U.: Knicklängen, Ersatzlängen, Modellstützen. Beton-und Stahlbetonbau Heft 5, 2003, S.249 bzw. BK2 2004, S. 411ff
- [2] Quast,U.: Stützenbemessung, in Betonkalender 2004, Teil 2, Berlin: Ernst und Sohn, 2004
- [3] König, G., Tue, N.: Grundlagen des Stahlbetonbaus – Einführung in die Bemessung nach EC 2. Stuttgart: Teubner, 1998
- [4] Zilch, K., Zehetmaier, G.: Bemessung im konstruktiven Betonbau, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006
- [5] Zilch, K., Rogge, A.: Bemessung der Stahlbeton- und Spannbetonbauteile nach DIN 1045-1. In: Betonkalender 2002, Teil 1. Berlin: Ernst und Sohn, 2002