

# Grundlagen der Technischen Mechanik

Berliner Hochschule für Technik

Prof. Dr.-Ing. Andreas Fischer

Technische Mechanik 1 / Tragwerkslehre

Wintersemester 23/24



© Foto: Andreas Fischer



## **Vorwort**

Das nachfolgende Skript ist in erster Linie für die Lehrveranstaltungen Technische Mechanik / Tragwerkslehre erarbeitet worden, es soll aber auch dem Arbeiten und Nachlesen in höheren Semestern dienen. Die inhaltliche Reihenfolge ist so gewählt, wie man sie nach Kenntnis des gesamten Stoffumfangs zusammenstellen würde. In der Vorlesung werden wir zwischen den Abschnitten hin und her springen, manches erst kurz anreißen, um es später noch zu ergänzen.

In den Veranstaltungen können viele Themen nur in den Grundlagen dargestellt werden, diese Grundlagen sollen das ingenieurmäßige Denken so weit prägen, dass einerseits spezielle Themengebiete im Selbststudium erarbeitet und andererseits Weiterentwicklungen in der Berufspraxis verfolgt werden können.

Das Skript ist zur Vor- und Nachbereitung der Lehrveranstaltungen konzipiert, es ersetzt auf keinen Fall den Besuch der Veranstaltung selbst, da dort weitere Themen und Hinweise und insbesondere Beispiele behandelt werden. Auch das Studium weiterführender Literatur ist zum Verständnis des Lehrstoffs unabdingbar.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung.....</b>	<b>1</b>
1.1	1	
<b>2</b>	<b>Zentrales Kräftesystem .....</b>	<b>5</b>
2.1	Addition und Zerlegung von Kräften in der Ebene .....	5
2.2	Reaktionskräfte .....	9
2.3	Einführung der Vektorrechnung für zentrale Kräftesysteme .....	12
<b>3</b>	<b>Allgemeines Kräftesystem .....</b>	<b>15</b>
3.1	Einführung des Momentes .....	19
3.2	Gleichgewichtsbedingungen .....	22
3.3	Lagerung von Bauteilen .....	23
3.4	Vektorrechnung für allgemeine Kräftesysteme .....	30
<b>4</b>	<b>Schwerpunkt .....</b>	<b>35</b>
4.1	Arten von Schwerpunkten .....	35
4.2	Massenschwerpunkt.....	35
4.3	Flächenschwerpunkt .....	37
4.3.1	Flächenschwerpunkt geometrischer Grundformen.....	37
4.3.2	Schwerpunkt zusammengesetzter Flächen.....	38
4.4	Größe und Schwerpunktlage von Streckenlasten .....	41
<b>5</b>	<b>Tragwerke, Idealisierung und Berechnung .....</b>	<b>43</b>
5.1	Unterscheidung Bauwerke, Bauteile, Tragwerke, Tragwerkselemente .....	43
5.2	Idealisierungen des Tragwerks für die statische Berechnung .....	43
5.3	Freischneiden von Systemkomponenten .....	44
5.4	Einführung in die Festigkeitslehre (entfällt leider seit einigen Semestern) .....	46
<b>6</b>	<b>Schnittgrößen und Verformungen .....</b>	<b>52</b>
6.1	Schnittgrößen von ebenen, stabförmigen Tragwerken .....	52
6.2	Funktionale Abhängigkeiten zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment .....	53
6.3	Zusammenhang zwischen Biegemomentenlinie und Biegelinie (Biegefunktion).....	58
6.4	Verformungsfunktionen einfacher Systeme .....	59
6.5	Kurze Einführung in das Sicherheitskonzept .....	61
6.6	Schnittgrößen von räumlichen, stabförmigen Tragwerken (optional) .....	63
<b>7</b>	<b>Einführung Tragwerke.....</b>	<b>64</b>
7.1	Einteilige, statisch bestimmte Tragwerke .....	64
7.2	Einteilige, statisch unbestimmte (überbestimmter) Tragwerke .....	66
7.3	Mehrteilige Tragwerke .....	67
7.4	Verformungen von einteiligen, statisch bestimmten Tragwerken .....	68
<b>8</b>	<b>Fachwerke .....</b>	<b>71</b>
8.1	Aufbau von Fachwerken.....	71
8.2	Idealisierung von Fachwerken .....	72
8.3	Berechnung der Stabkräfte .....	72
8.3.1	Knotenschnittverfahren .....	73
8.3.2	Regeln für Nullstäbe und andere Sonderfälle .....	73
8.3.3	RITTERSches Schnittverfahren .....	75
8.4	Fachwerkformen.....	75
<b>9</b>	<b>Seile und Bögen.....</b>	<b>76</b>
9.1	Einführung .....	76
9.2	Seiltragwerk, belastet durch Gleichstreckenlast .....	78
9.3	Bogentragwerk, belastet durch Gleichstreckenlast .....	80
9.4	Mathematische Funktion für das Eigengewicht des Seils (der Kette).....	80

---

9.5	Stützlinien/Seillinien für andere Beanspruchungen .....	81
9.6	Optimierte Tragsysteme für Gleichlasten .....	82
<b>10</b>	<b>Mehrteilige Tragwerke (TM2) .....</b>	<b>83</b>
10.1	Einführung .....	83
10.2	Einfach aufgebaute, mehrteilige Systeme ebener Tragwerke .....	83
10.3	Der Gelenkträger oder Gerberträger .....	83
10.4	Der Dreigelenkrahmen .....	83

**Literatur**

# 1 Einführung

## 1.1

### Newton-Axiome

Isaac Newton (1643-1727)

#### 1. Axiom: Trägheitsprinzip

Ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, beharrt in seinem momentanen Bewegungszustand.

#### 2. Axiom: Grundgesetz der Dynamik

Eine auf einem Körper mit der Masse  $m$  wirkende Kraft  $F$  bewirkt seine Beschleunigung.

$$F = m \cdot a \text{ [N]} \quad \text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

$$G = m \cdot g \text{ [N]} \quad \text{Gewichtskraft} = \text{Masse} \times \text{Erdbeschleunigung}$$

#### 3. Axiom: Prinzip von *actio* und *reactio*

Auf jede Kraft wirkt eine betragsmäßig gleiche Gegenkraft in entgegengesetzte Richtung.

$$F_{1,2} = - F_{2,1}$$

Kräfte sind nicht sichtbar, man kann nur Ihre Wirkung beobachten. Zum besseren Verstehen stellen wir Kräfte als Pfeile dar.



Bild 1-1 Bedeutung der Vorzeichen von Kräften

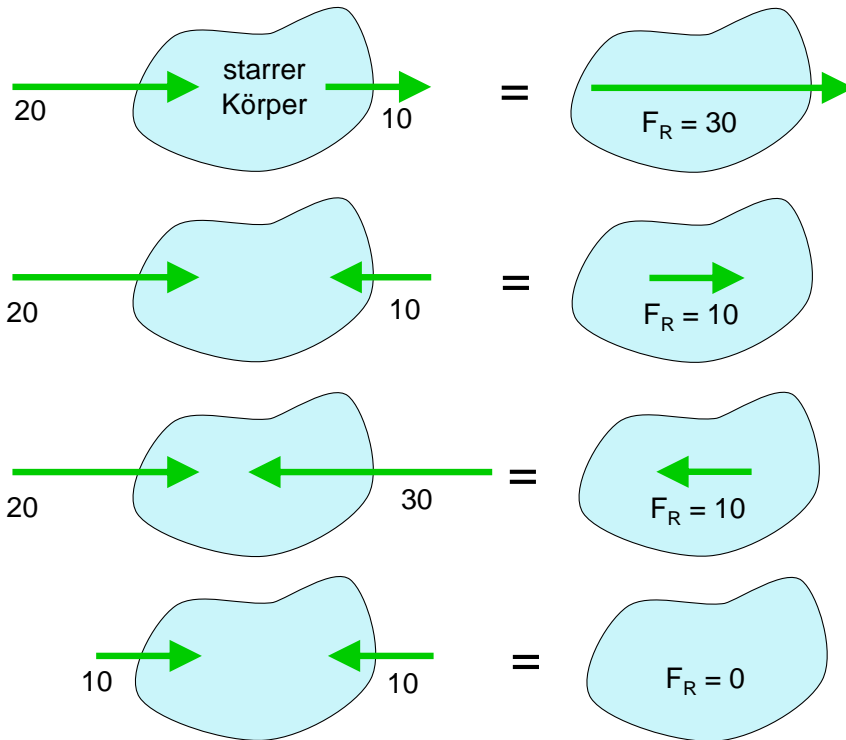
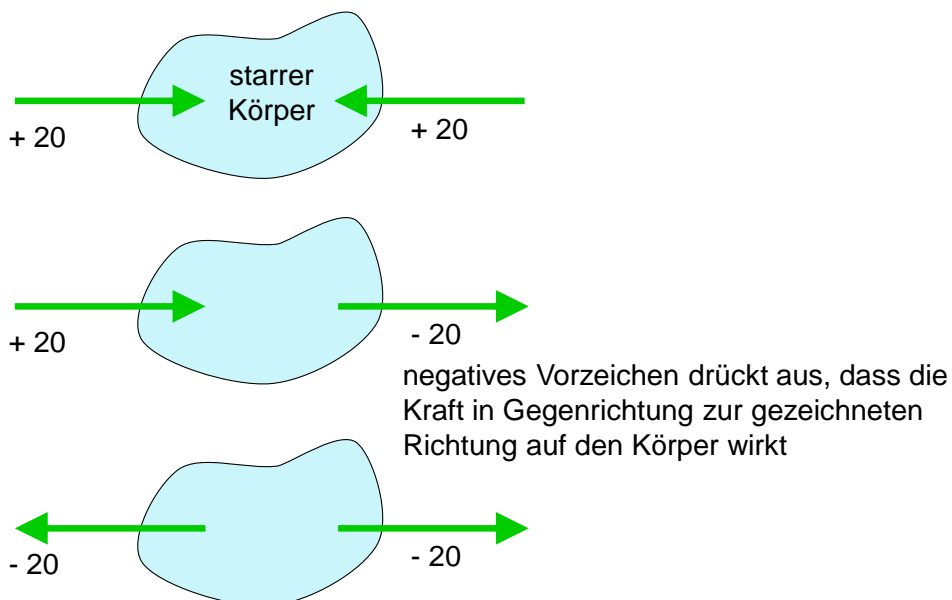


Bild 1-2 einfache Kräfteaddition

Der letzte Körper wird nicht beschleunigt. Er befindet sich in einem Gleichgewichtszustand!



**Alle drei Körper werden identisch beansprucht!**  
(alle drei befinden sich in einem Gleichgewichtszustand)

Bild 1-3 Bedeutung der Vorzeichen von Kräften



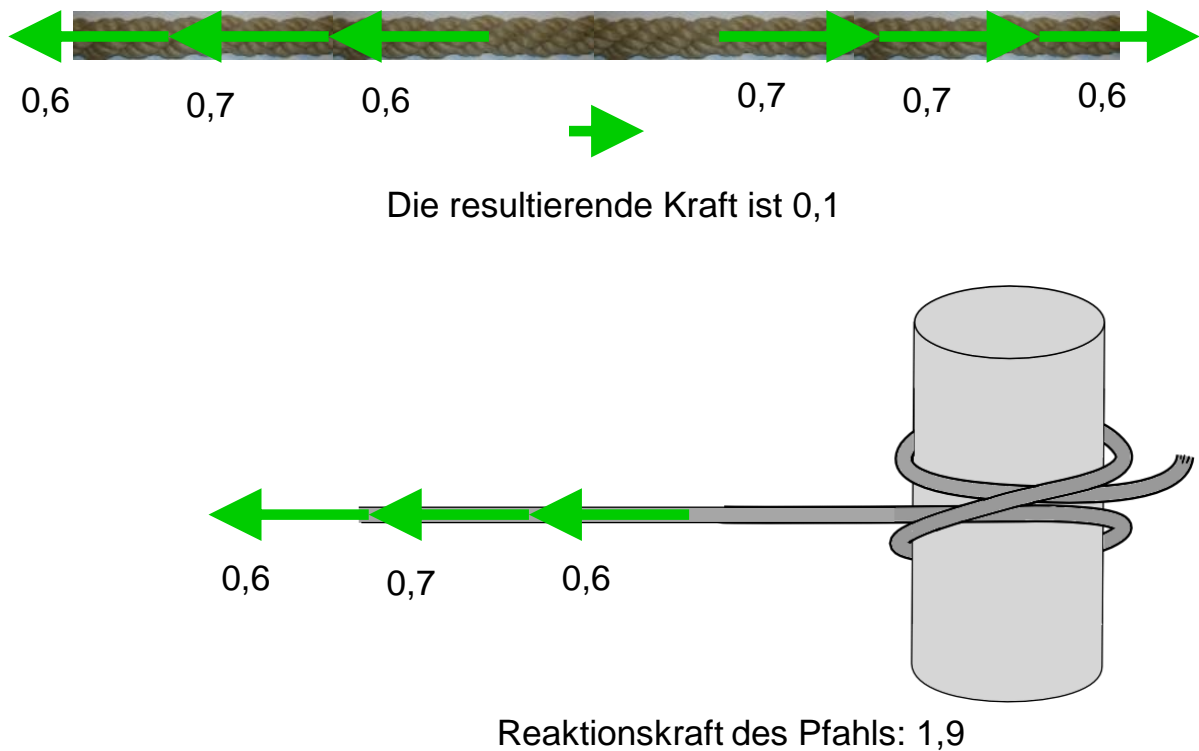
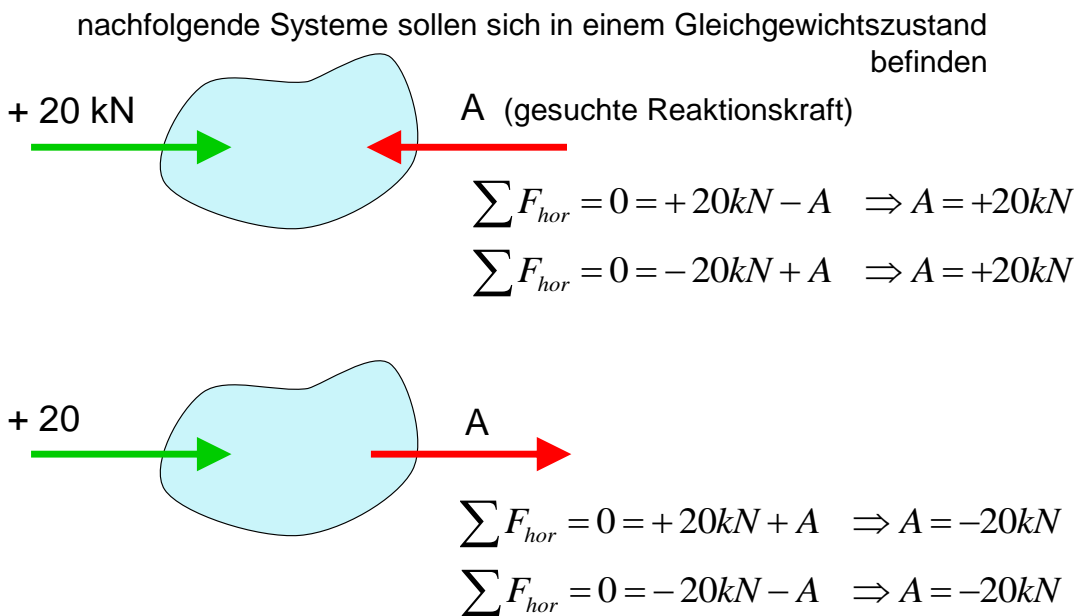


Bild 1-4 wirksame Kräfte in einem Seil



Das negative Vorzeichen im Ergebnis zeigt, dass die Wirkungsrichtung (Pfeilrichtung) der Reaktionskraft auf den Körper entgegengesetzt ist.

Bild 1-5 Kräftebestimmung in einfachen Gleichgewichtssituationen

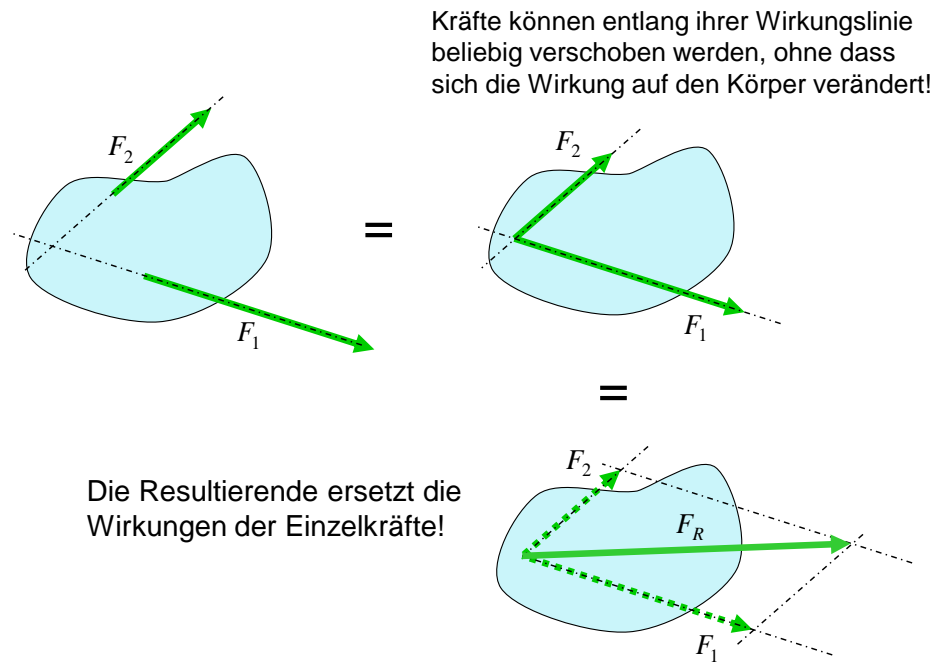


Bild 1-6 Kräfteaddition mit Kräfteparallelogramm

## 2 Zentrales Kräftesystem

Bei einem zentralen Kräftesystem schneiden sich die Wirkungslinien verschiedener Kräfte in einem Punkt. Dieser Schnittpunkt kann innerhalb oder außerhalb eines Körpers liegen. Schneiden sich die Wirkungslinien in mehreren Punkten, dann liegt ein allgemeines Kräftesystem vor (s. Abschnitt 3).

### 2.1 Addition und Zerlegung von Kräften in der Ebene

Steht ein Körper unter der Wirkung einer einzigen Kraft, dann erfährt er eine Änderung seiner Bewegung (Beschleunigung/Verzögerung und/oder Richtungswechsel).

Wirken auf einen Körper zwei Kräfte ein, so können diese durch eine einzige Kraftwirkung, durch die Wirkung der resultierenden Kraft, ersetzt werden. Die Resultierende ergibt sich aus dem Kräfteparallelogramm.

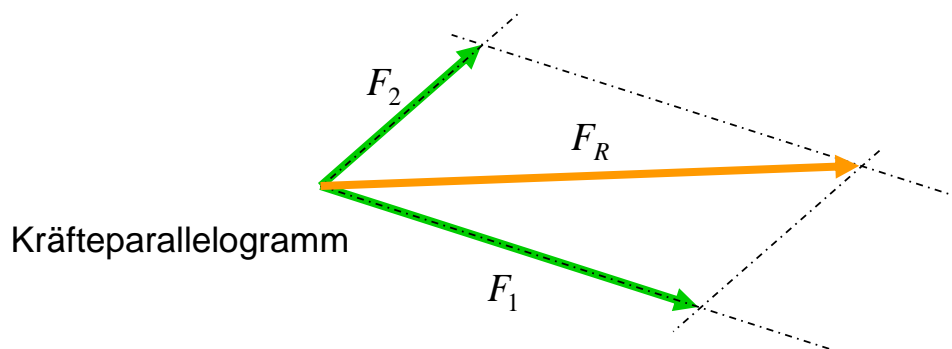


Bild 2-1 graphische Addition von zwei Kräften in der Ebene

Wirken mehr als zwei Kräfte auf einen Körper und schneiden sich ihre Wirkungslinien in einem Punkt, dann kann die resultierende Kraft schrittweise mit Hilfe von Zwischenresultierenden ermittelt werden (Bild 2-2). Die Reihenfolge, in der die einzelnen Kräfte addiert werden, ist beliebig.

Wirken die Kräfte nicht in einer Ebene, dann ist eine graphische Addition im dreidimensionalen Raum zwar nach den gleichen Prinzipien möglich, aber nur sehr aufwendig darzustellen oder zu berechnen. Hierfür kann man die Vektorrechnung als ein sinnvolles Hilfsmittel einsetzen (siehe Abschnitt 2.3).

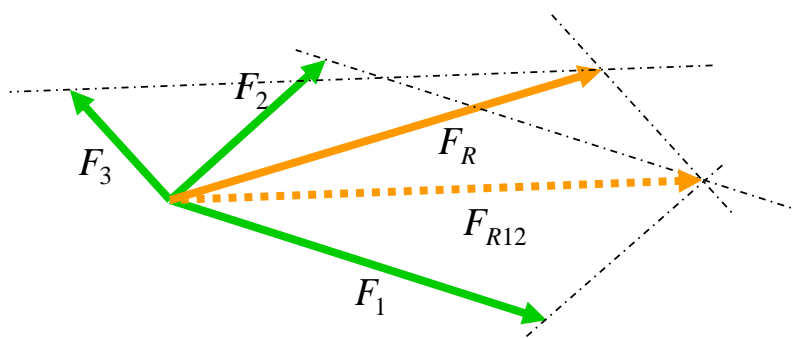


Bild 2-2 graphische Addition von mehr als zwei Kräften in der Ebene

Wenn bei der Addition von zwei, drei oder mehr Kräften, die auf einen Körper wirken, die Gesamtresultierende Null ist, dann befindet sich der Körper in einem Gleichgewichtszustand (s. Bild 2-3).

Auf den folgenden Körper wirken 3 Kräfte:

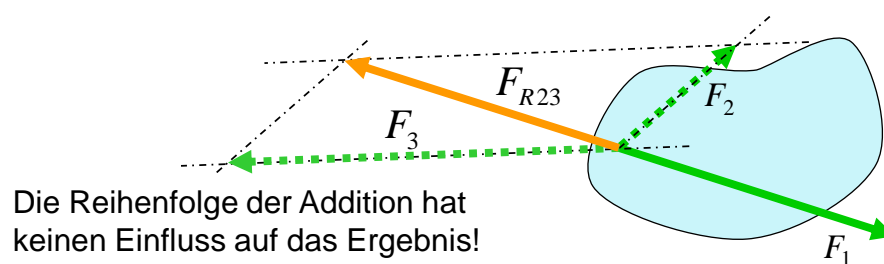
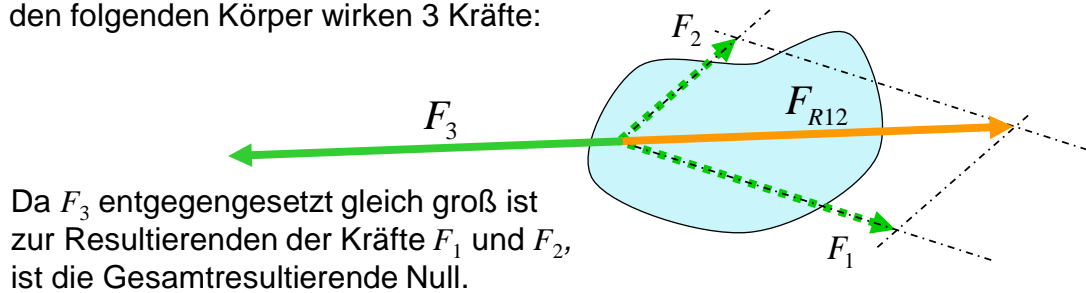


Bild 2-3 Gleichgewichtszustand bei 3 angreifenden Kräften

Die **Zerlegung einer Kraft** in zwei Richtungskomponenten ist häufig erforderlich. Sie ergibt sich aus der Umkehrung der Addition aus dem Kräfteparallelogramm (Bild 2-4). Eine eindeutige Zerlegung einer Kraft ist in ebenen Systemen nur in genau zwei Kräfte mit unterschiedlichen Wirkungslinien möglich, in räumlichen Systemen nur in genau drei Kräfte mit jeweils unterschiedlichen Wirkungsrichtungen.

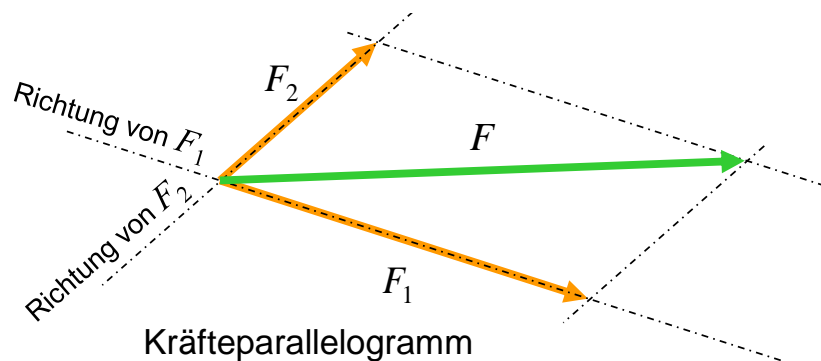


Bild 2-4 graphische Zerlegung einer Kraft in der Ebene

### Merksätze für Kräfte in einer Ebene:

- Bei der Addition zweier Kräfte ergibt sich die Resultierende über das Kräfteparallelogramm.
- Wenn die Resultierende Null ergibt, dann befindet sich der betrachtete Körper oder Teilkörper im Hinblick auf eine Verschiebung in einem Gleichgewichtszustand
- Die Kräftezerlegung ist die Umkehrung der Kräfteaddition. Eine eindeutige Zerlegung ist nur in zwei Richtungen möglich.

Sollen die resultierende Kraft und ihre Wirkungsrichtung nicht nur graphisch, sondern auch rechnerisch bestimmt werden, dann können hierfür trigonometrische Sätze und Beziehungen verwendet werden (Bild 2-5). Da hierfür zunächst eine etwa maßstäbliche Darstellung der Kräfte notwendig ist, kann man für diesen Lösungsweg den Begriff „grafoanalytisch“ verwenden. Das gilt in gleicher Weise für die Zerlegung einer Kraft (Bild 2-6).

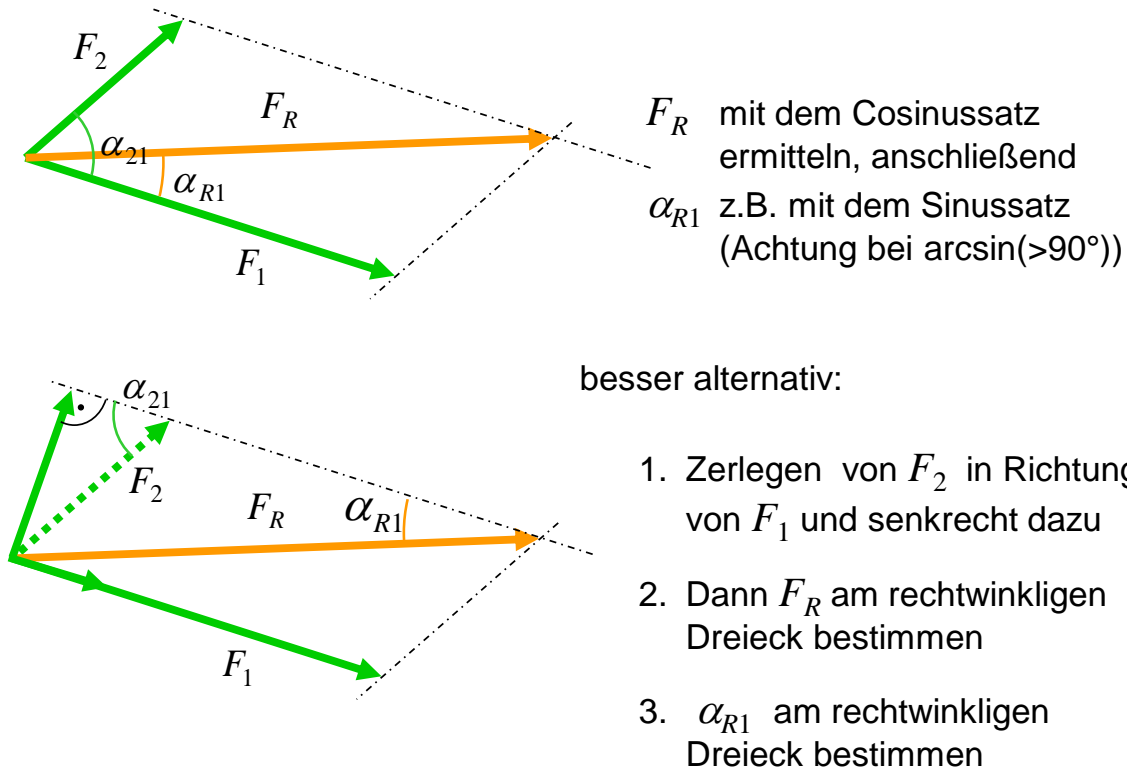


Bild 2-5 „grafoanalytische“ Addition von Kräften in der Ebene

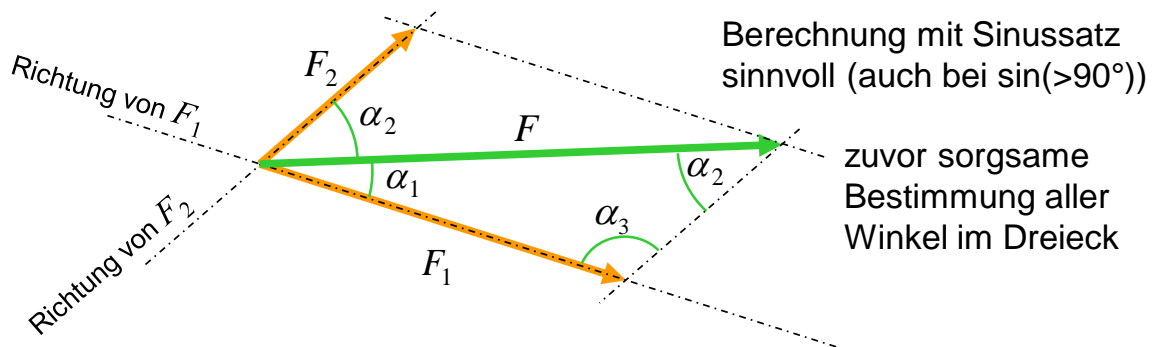
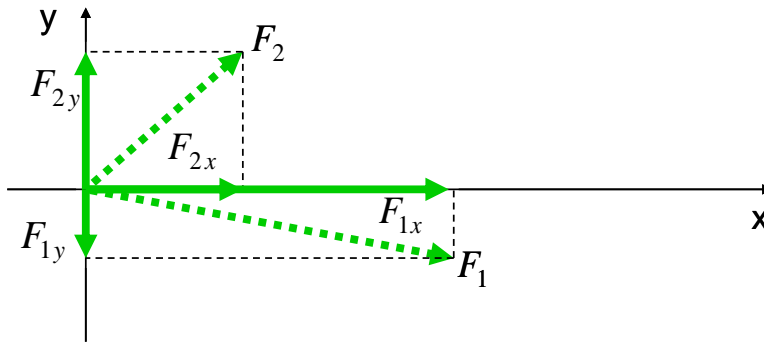


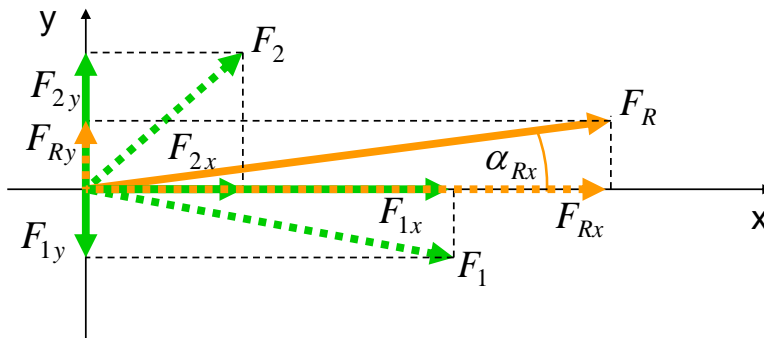
Bild 2-6 „grafoanalytische“ Zerlegung einer Kraft in der Ebene

Eine weitere Berechnungsmöglichkeit für die Addition von zwei oder mehr Kräften besteht in der Addition ihrer Komponenten in einem vorgegebenen oder gewählten Koordinatensystem, z.B. x,y-System (Bild 2-7). Nach jeweiliger Addition der x- und y-Komponenten (Zerlegungsanteile der Ausgangskräfte) kann die Resultierende gemäß Bild 2-8 ermittelt werden.



zunächst  $F_1$  und  $F_2$  in die Komponenten in x- und y-Richtung zerlegen

Bild 2-7 analytische Addition von Kräften in der Ebene mit Hilfe ihrer Komponenten



für  $F_{Rx}$  die Komponenten in x-Richtung addieren,

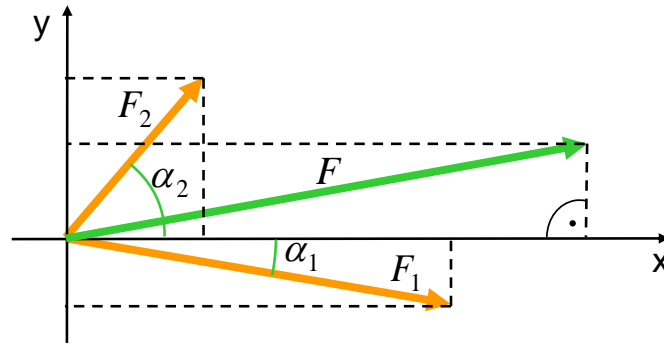
für  $F_{Ry}$  die Komponenten in y-Richtung addieren

anschließend  $F_R$  über Pythagoras ermitteln

$\alpha_{Rx}$  über arctan bestimmen, dabei Vorzeichen von  $F_{Rx}$  und  $F_{Ry}$  beachten

Bild 2-8 analytische Addition von Kräften in der Ebene mit Hilfe ihrer Komponenten

Bei der Zerlegung einer Kraft in einem beliebig gewählten Koordinatensystem entstehen zwei lineare Gleichungen mit den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  als den zwei Unbekannten (Bild 2-9).



Komponenten von  $F$  bestimmen

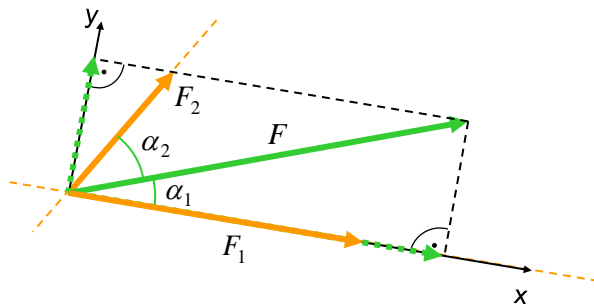
$$F_{1x} + F_{2x} = F_x$$

$$F_{1y} + F_{2y} = F_y$$

Die Komponenten als sin-/ cos-Anteile von  $F_1$  und  $F_2$  bestimmen, dann verbleiben zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten  $F_1$  und  $F_2$ .

Bild 2-9 analytische Zerlegung einer Kraft in der Ebene mit Hilfe ihrer Komponenten

Wählt man stattdessen ein Koordinatensystem, bei dem eine Koordinatenrichtung mit einer Kraft- richtung übereinstimmt (Bild 2-10), dann kann die andere Kraft sofort aus der einen Komponente der Kraft  $F$  berechnet werden.



Komponenten von  $F$  bestimmen

dann  $F_2$  im kleinen rechtwinkligen Dreieck bestimmen.

Anschließend  $F_1$  als Differenz/Summe aus  $F_x$  und  $F_{2x}$  ermitteln

Bild 2-10 analytische Zerlegung einer Kraft in der Ebene mit Hilfe ihrer Komponenten bei geschickter Wahl eines Koordinatensystems

## 2.2 Reaktionskräfte

Reaktionskräfte ergeben sich ganz allgemein durch eine Wechselwirkung zwischen Körpern, z. B. durch Berührung von Körpern oder durch aktivierte Reibungskräfte. Durch eine Reaktionskraft wird die ursprüngliche Kraftwirkung auf einen Körper verändert. Ein einfaches Beispiel: Wenn sich eine Fallschirmspringerin aus einem Flugzeug stürzt, dann wird sie durch die Erdanziehungskraft beschleunigt. Durch ihre anwachsende Geschwindigkeit wird die Fallschirmspringerin einen immer größer werdenden Luftwiderstand spüren. Wenn die Kraft dieses „Gegenwindes“ (Reaktionskraft) nach einiger Zeit genauso groß sein wird wie die Erdanziehungskraft, dann fällt sie mit konstanter Geschwindigkeit. Glücklicherweise werden so auch die Regentropfen abgebremst.

Im Bauwesen haben wir es meistens mit ruhenden Körpern zu tun (hoffentlich!), wir sprechen ja auch von der Statik eines Bauwerkes. Teile eines Bauwerks werden durch wieder andere Bauteile gestützt. Diese Kräfte in den Unterstützungen sind Reaktionskräfte, die sich aus der Belastung der Bauteile durch ihr Eigengewicht, Nutzlasten, Schnee, Wind oder andere Einwirkungen ergeben.

**Bei ruhenden Systemen stehen die einwirkenden Kräfte und die Reaktionskräfte im Gleichgewicht. D. h., die resultierende Kraft (die Summe aller Kräfte) ist Null.**

Aus dieser Gleichgewichtsbedingung können die meist unbekanntenen Reaktionskräfte bestimmt werden (vgl. hierzu Bild 1-5)

Wird zur Berechnung der unbekanntenen Reaktionskräfte oder zur Kontrolle des Gleichgewichts ein Koordinatensystem gewählt, dann müssen sich die Summen der Kraftkomponenten in den jeweiligen Koordinatenrichtungen zu Null ergeben.

Beispielhaft ist in Bild 2-11 eine Walze dargestellt, die durch zwei unterschiedlich stark geneigte Ebenen ruhend gehalten wird. Auf die Walze wirken die Gravitationskraft und die Kontaktkräfte. Diese Kontaktkräfte zwischen der Walze und den beiden Ebenen sind hier die Reaktionskräfte, sie wirken jeweils senkrecht zur Berührungsebene und gehen durch den Walzenmittelpunkt. Es liegt ein zentrales Kräftesystem vor, da die Wirkungslinien aller Kräfte durch einen Punkt laufen. Alle Kräfte verlaufen mit ihren Richtungen in der Zeichenebene, man spricht dann von einem ebenen System.

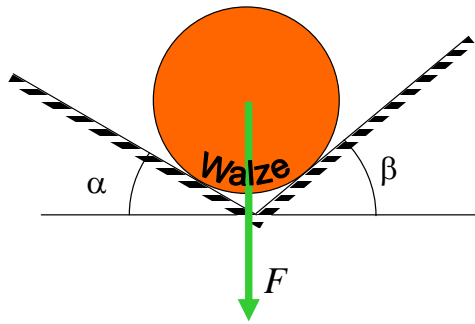
Die Reaktionskräfte sind häufig in einem ruhenden System bzw. an einem ruhenden Körper nicht ohne weiteres in ihrer Größe erkennbar. Die Richtung der Reaktionskräfte kann man meistens aus der Geometrie des Systems erkennen. Durch „Freischneiden“ von den Unterstützungen entsteht ein Freikörperbild, an dem die Reaktionskräfte mit ihrer Wirkungsrichtung, aber mit noch unbekannter Größe angetragen werden.

Die beiden noch unbekanntenen Kräfte müssen zusammen die Gegenkraft zur einwirkenden Gewichtskraft bilden. Aus der Zerlegung der Gegenkraft in die vorgegebenen Kraftrichtungen ergeben sich die Kraftgrößen eindeutig.

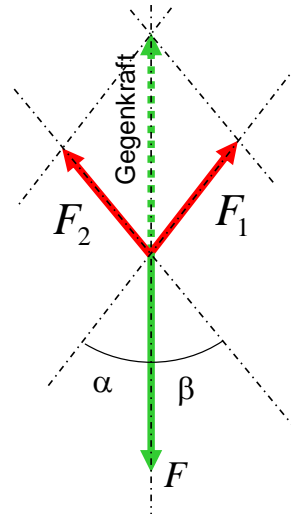
In Bild 2-12 ist die rechnerische Ermittlung der Kräfte angedeutet.



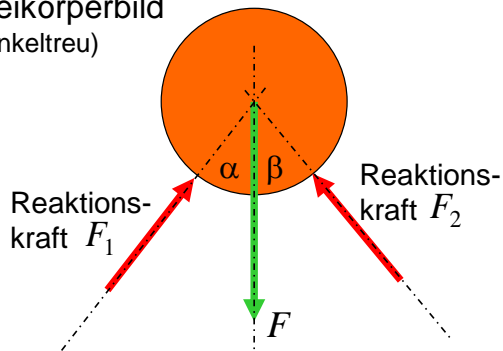
Gesamtsystem



graphisch oder halbgraphisch mit  
Kräfteparallelogramm (maßstäblich)



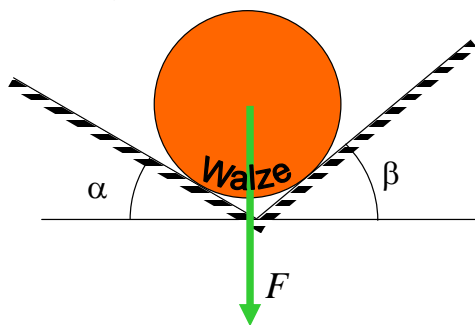
Freikörperbild  
(winkeltreu)



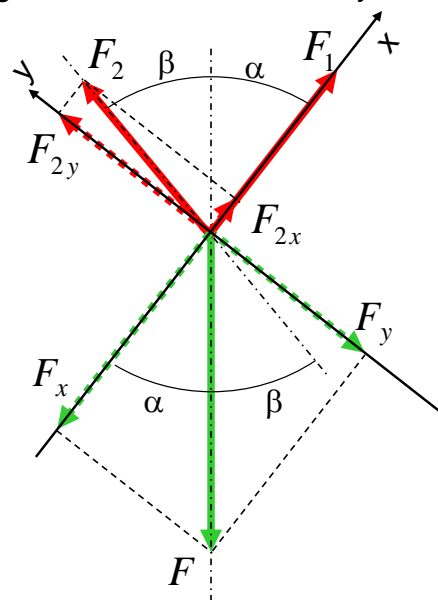
einwirkende Kraft und Reaktionskräfte bilden ein Gleichgewichtssystem

Bild 2-11 Ermittlung von Reaktionskräften für ein ebenes Problem  
a) Erstellen des Freikörperbildes  
b) Darstellung des Kräfteparallelogramms

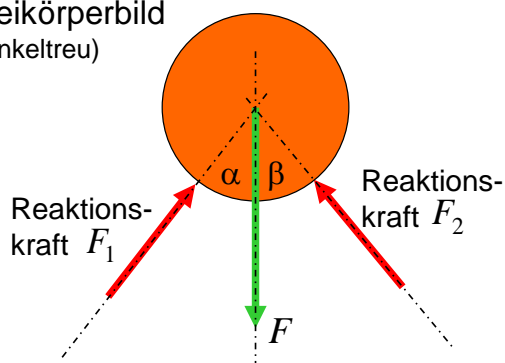
Gesamtsystem



analytisch mit geschickt  
gewähltem Koordinatensystem:



Freikörperbild  
(winkeltreu)



Gleichgewichtsbedingungen :

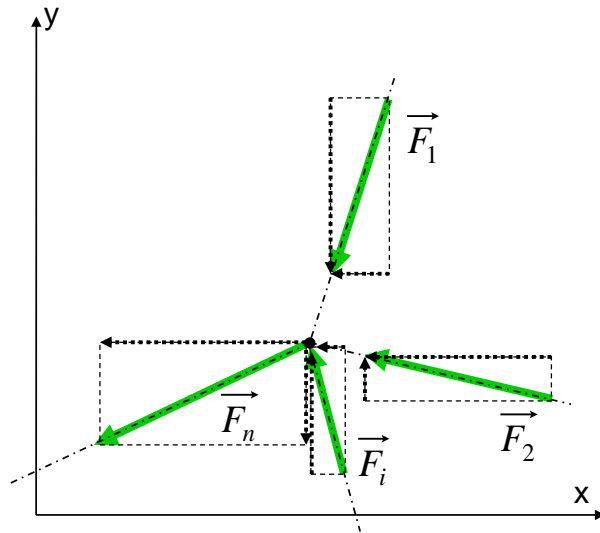
$$F_{2y} - F_y = 0$$

$$F_{2x} + F_1 - F_x = 0$$

Bild 2-12 Ermittlung von Reaktionskräften für ein ebenes Problem  
c) Wahl eines geschickten Koordinatensystems mit anschließender Berechnung der Reaktionskräfte

### 2.3 Einführung der Vektorrechnung für zentrale Kräftesysteme

Mit Hilfe der Vektorrechnung lassen sich insbesondere räumliche Systeme relativ einfach berechnen. Man muss allerdings streng formal vorgehen, um keine Fehler zu machen. Daher ist es sinnvoll, solche Aufgaben mit Computer-Programmen zu lösen. In Bild 2-13 ist die Kräfteaddition und in Bild 2-14 die Kräftezerlegung dargestellt.



In der Ebene ergibt sich die Resultierende Kraft:

$$\begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \end{pmatrix}$$

oder kürzer geschrieben:

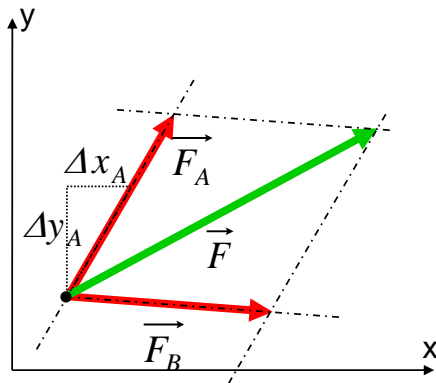
$$\begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum F_{ix} \\ \sum F_{iy} \end{pmatrix}$$

Im Raum gilt:

$$\begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \\ F_{Rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum F_{ix} \\ \sum F_{iy} \\ \sum F_{iz} \end{pmatrix}$$

Bild 2-13 vektorielle Addition von Kräften

Die Kräftezerlegung erfordert zunächst eine vektorielle Beschreibung der unbekanntten Kräfte in ihrer Richtung ohne Kenntnis ihrer Größe. Dazu müssen Einheitsvektoren für die vorgegebenen Richtungen formuliert werden. Die Kraftgrößen ergeben sich aus den skalaren Faktoren der Einheitsvektoren. Hierfür sind für Aufgaben in der Ebene zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen, für räumliche Probleme drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten.



Die Zerlegung ist die Umkehrung der Addition. Von den unbekannt Kräfte ist jeweils nur ihre Richtung bekannt. Die unbekannt Kräfte können als Vielfaches ihrer Einheitsvektoren ausgedrückt werden:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = F_A \cdot \vec{e}_A + F_B \cdot \vec{e}_B = \vec{F}$$

$$F_A \cdot \begin{pmatrix} e_{Ax} \\ e_{Ay} \end{pmatrix} + F_B \cdot \begin{pmatrix} e_{Bx} \\ e_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

Häufig können die Einheitsvektoren nicht direkt angegeben werden, aber ihre Richtung mit Hilfe  $\Delta x$  und  $\Delta y$ -Komponenten. Die Einheitsvektoren werden dann aus den Richtungsvektoren ermittelt:

Richtungs- vektor:	Einheits- vektor:
$\begin{pmatrix} \Delta x_A \\ \Delta y_A \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e_{Ax} \\ e_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_A / \sqrt{\Delta x_A^2 + \Delta y_A^2} \\ \Delta y_A / \sqrt{\Delta x_A^2 + \Delta y_A^2} \end{pmatrix}$

Es sind zwei lineare Gleichungen mit zwei unbekannt Größen zu lösen:

$$F_A \cdot \begin{pmatrix} e_{Ax} \\ e_{Ay} \end{pmatrix} + F_B \cdot \begin{pmatrix} e_{Bx} \\ e_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} F_A \cdot e_{Ax} + F_B \cdot e_{Bx} = F_x \\ F_A \cdot e_{Ay} + F_B \cdot e_{By} = F_y \end{matrix}$$

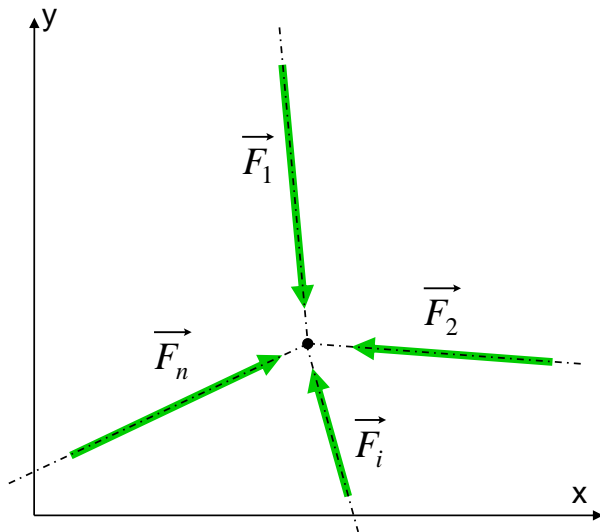
Im Raum sind drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannt zu lösen:

$$F_A \cdot \begin{pmatrix} e_{Ax} \\ e_{Ay} \\ e_{Az} \end{pmatrix} + F_B \cdot \begin{pmatrix} e_{Bx} \\ e_{By} \\ e_{Bz} \end{pmatrix} + F_C \cdot \begin{pmatrix} e_{Cx} \\ e_{Cy} \\ e_{Cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Die Vorzeichen von  $F_A$ ,  $F_B$  und  $F_C$  zeigen an, ob sich der vorgewählte Richtungssinn der Kraft auch einstellt.

Bild 2-14 vektorielle Zerlegung einer Kraft

Zur Überprüfung eines Gleichgewichtszustandes nach Bild 2-15 muss die Summe der Komponenten jeweils Null ergeben. Zur Berechnung von Reaktionskräften nach Bild 2-16 müssen wie bei der Kraftzerlegung die Einheitsvektoren für die Kraftrichtungen aufgestellt werden. Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung können die Reaktionskräfte wieder aus den entsprechenden Gleichungssystemen ermittelt werden.



Im Gleichgewichtsfall müssen die Kräfte insgesamt Null ergeben (muss die Resultierende Null sein) :

$$\begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

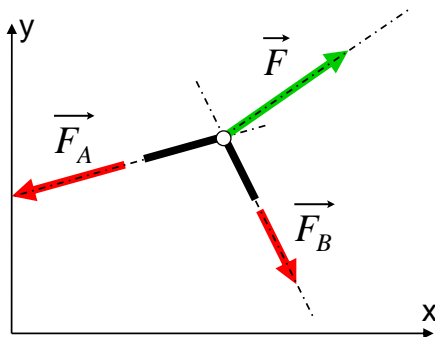
oder kürzer geschrieben:

$$\begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum F_{ix} \\ \sum F_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im Raum herrscht Gleichgewicht für Kräfte am Punkt, wenn:

$$\begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \\ F_{Rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum F_{ix} \\ \sum F_{iy} \\ \sum F_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bild 2-15 vektorielle Prüfung des Kräftegleichgewichtes

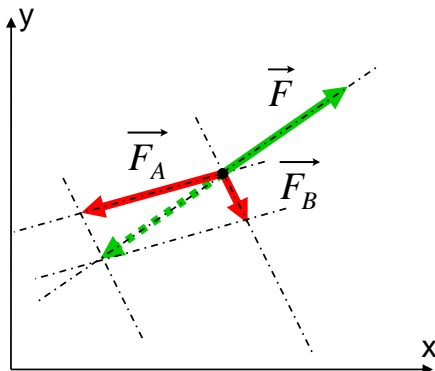


Die unbekannten Reaktionskräfte entsprechen den unbekannten Kräften bei der Kräftezerlegung, daher sind wieder zwei lineare Gleichungen mit zwei unbekanntem Größen zu lösen (Hinweis: der Richtungssinn der unbekanntem Kräfte sollte in Zugrichtung positiv sein):

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = F_A \cdot \vec{e}_A + F_B \cdot \vec{e}_B = -\vec{F}$$

$$F_A \cdot \begin{pmatrix} e_{Ax} \\ e_{Ay} \end{pmatrix} + F_B \cdot \begin{pmatrix} e_{Bx} \\ e_{By} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ggf. die Einheitsvektoren aus Richtungsvektoren (s. Kraftzerlegung) ermitteln.



Im Raum sind drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten zu lösen:

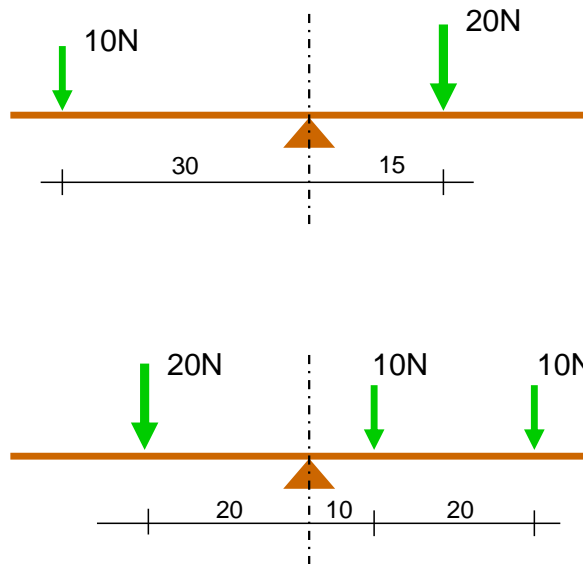
$$F_A \cdot \begin{pmatrix} e_{Ax} \\ e_{Ay} \\ e_{Az} \end{pmatrix} + F_B \cdot \begin{pmatrix} e_{Bx} \\ e_{By} \\ e_{Bz} \end{pmatrix} + F_C \cdot \begin{pmatrix} e_{Cx} \\ e_{Cy} \\ e_{Cz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vorzeichen von  $F_A$ ,  $F_B$  und  $F_C$  zeigen an, ob sich Zug- oder Druckkräfte einstellen.

Bild 2-16 vektorielle Ermittlung von Reaktionskräften

### 3 Allgemeines Kräftesystem

Bei einem allgemeinen Kräftesystem schneiden sich die Wirkungslinien von Kräften nicht mehr in einem Punkt. Dadurch können Verdrehungen entstehen.



**Hebelgesetz** von Archimedes (287 bis 212 v. Chr.)

Am Hebel herrscht dann und nur dann Gleichgewicht, wenn die Summe der Drehmomente der rechtsdrehenden Kräfte gleich ist der Summe der Drehmomente der linksdrehenden Kräfte.

In mathematischer Schreibweise:

$$\sum M_{D,links} = \sum M_{D,rechts} \quad \text{oder}$$

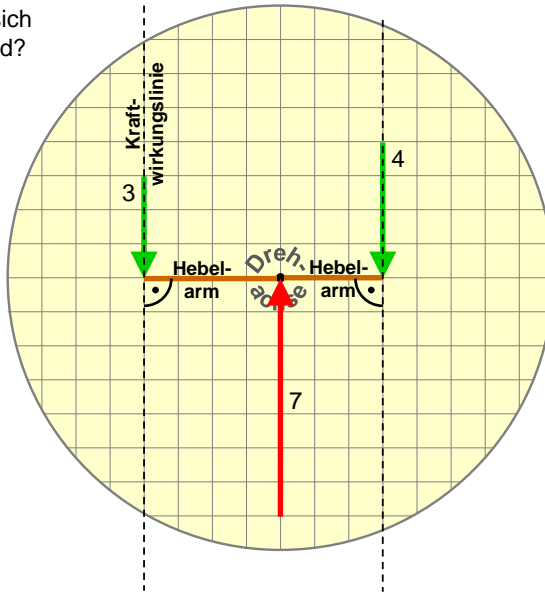
$$\sum M_{D,links} - \sum M_{D,rechts} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\sum M_D = 0$$

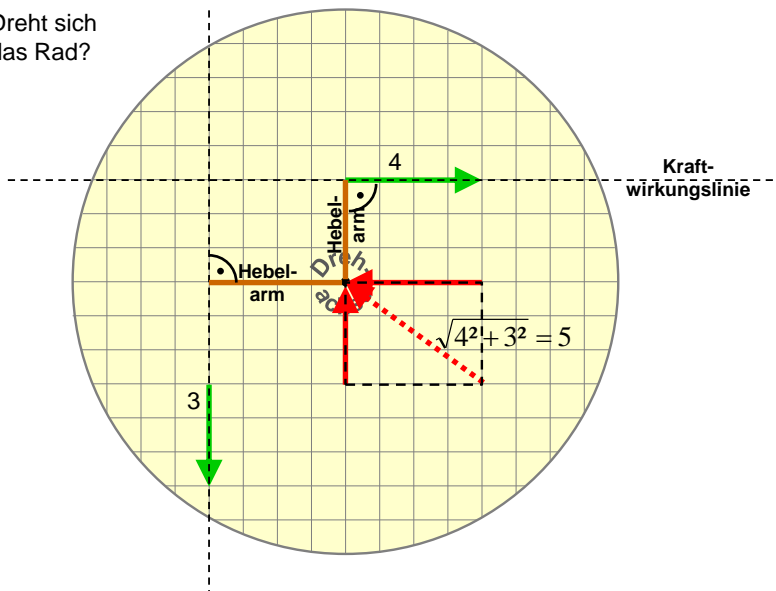
Einführend untersuchen wir zunächst die Wirkung einer Kraft auf einen Körper mit festgelegter Drehachse. Wir beschränken uns dabei auf ebene Systeme. Der räumliche Fall wird dann später wieder mit Hilfe der Vektorrechnung behandelt.

Zur Einführung betrachten wir eine runde, gewichtslose Scheibe, die um eine Drehachse rotieren kann.

Dreht sich  
das Rad?



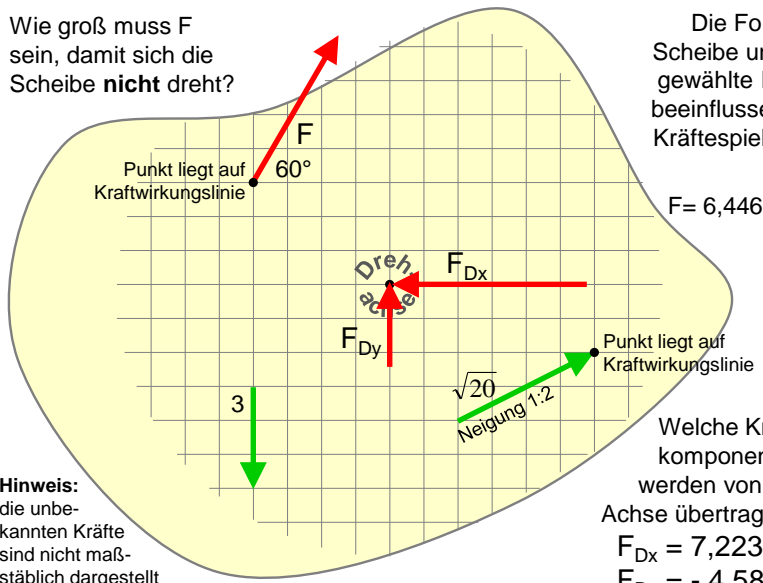
Dreht sich  
das Rad?



Merksätze:

- Ein (Dreh)moment ergibt sich aus dem Produkt von Kraft und Hebelarm
- Der Hebelarm ist der senkrechte Abstand (= kürzester Abstand) vom Drehpunkt zur Kraftwirkungslinie
- Wenn in allgemeinen Kräftesystemen das resultierende Moment Null ergibt, dann befindet sich der betrachtete Körper oder Teilkörper im Hinblick auf eine Verdrehung in einem Gleichgewichtszustand.

Wie groß muss  $F$  sein, damit sich die Scheibe **nicht** dreht?



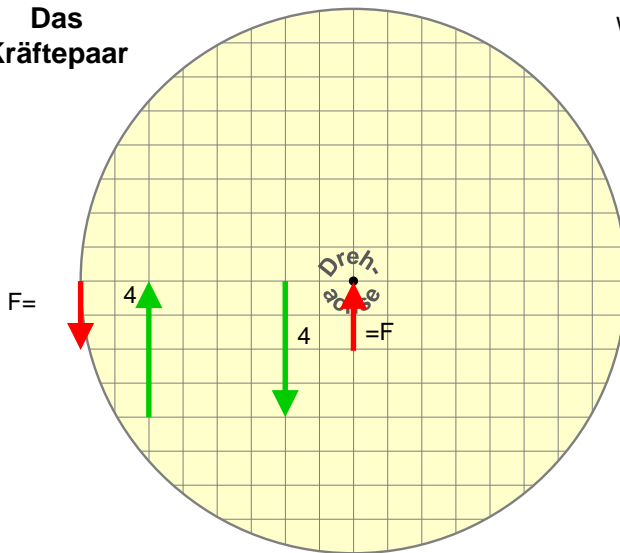
Die Form der Scheibe und das gewählte Raster beeinflussen das Kräftespiel nicht!

$F = 6,446$

**Hinweis:** die unbekanntten Kräfte sind nicht maßstäblich dargestellt

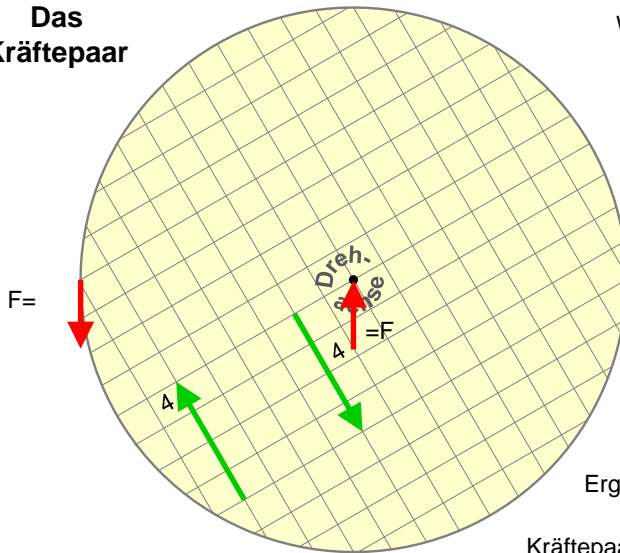
Welche Kraftkomponenten werden von der Achse übertragen?  
 $F_{Dx} = 7,223$   
 $F_{Dy} = - 4,582$

**Das Kräftepaar**



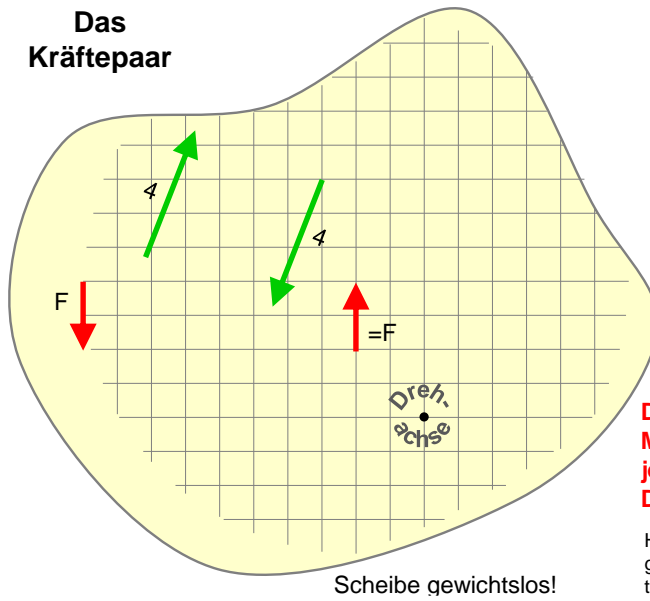
Wie groß muss  $F$  sein, damit sich das Rad **nicht** dreht?

**Das Kräftepaar**



Wie groß muss  $F$  sein, damit sich das Rad **nicht** dreht?

Ergebnis:  
 Die Lage des Kräftepaars beeinflusst die anderen Kräfte nicht



Da in Gleichgewichtssituationen allgemeiner Kräftesysteme nur Kräftepaare auf einen Körper wirken, kann die Drehachse an beliebiger Stelle gewählt werden.

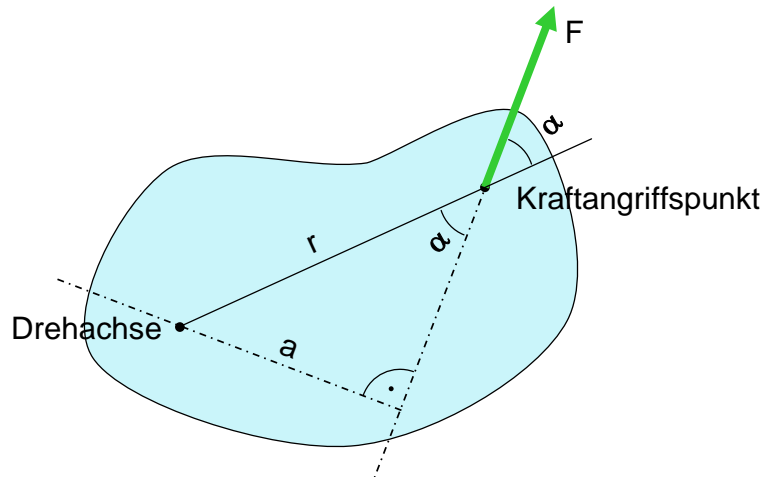
**Die Summe der Momente wird um jede beliebige Drehachse Null!**

Hinweis: an der hier gewählten Drehachse treten keine Kräfte auf



### 3.1 Einführung des Momentes

Greift an einem Körper mit einer festgelegten Drehachse eine Kraft an, deren Wirkungslinie die Drehachse nicht schneidet, dann ergibt sich ein Drehmoment (kurz: Moment), siehe Bild 3-1. Der Kraftangriffspunkt bedarf keiner besonderen Beachtung. Solange die Kraft an irgendeinem Punkt auf ihrer Wirkungslinie angreift, ergibt sich die identische Wirkung auf den Körper.



Ein Moment ergibt sich aus:

**Kraft · senkrechtem Abstand zum Drehpunkt**  $M = F \cdot a = F \cdot r \cdot \sin\alpha$

Bild 3-1 Einführung des Momentes

Die Drehwirkung der Kraft stellt man sehr anschaulich durch einen durch einen Momentenpfeil dar. hierbei muss die Wirkungslinie der Kraft so versetzt werden, dass sie sich mit der Drehachse schneidet. Das Moment nennt man dann auch „Versatzmoment“.

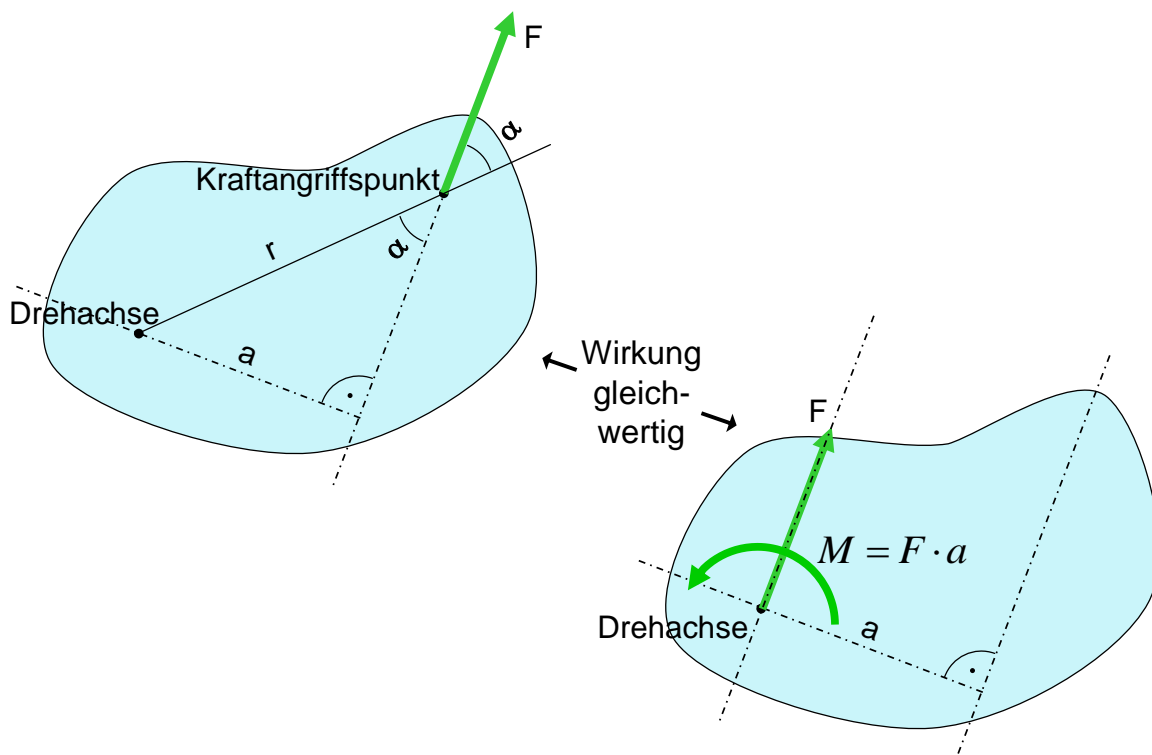
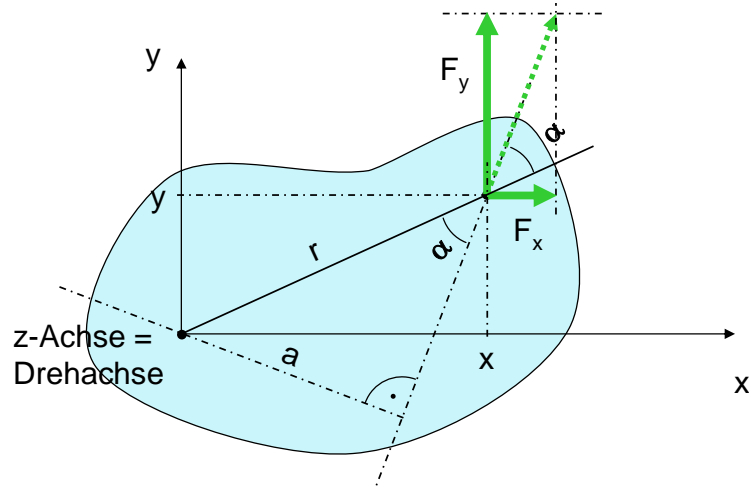


Bild 3-2 Ersatz der exzentrisch angreifenden Kraft durch eine zentrische Kraft mit Versatzmoment

In Bild 3-3 ist die gleiche Situation wie in Bild 3-1 dargestellt. Zur mathematischen Beschreibung wurde zusätzlich ein Koordinatensystem eingefügt. Die ursprüngliche Kraft kann nun durch ihre x,y-Komponenten ersetzt werden. Aus der so formulierten Lösung ergibt sich wieder eine Verwandtschaft zur Vektorrechnung, hier zum Vektorprodukt, das auch Kreuzprodukt genannt wird.



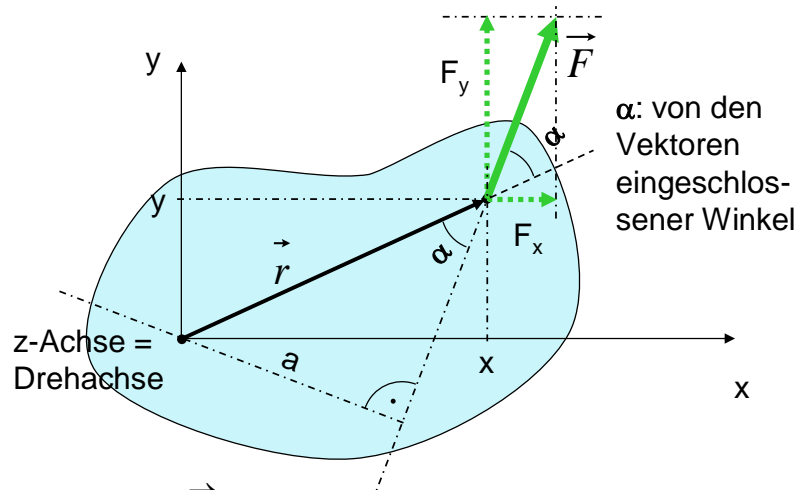
Nach Einführung eines Koordinatensystems und Zerlegung der Kraft lässt sich das Moment folgendermaßen formulieren:

$$\mathbf{M} = F_y \cdot \mathbf{x} - F_x \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \cdot \sin \alpha$$

Diese Formulierung entspricht dem Vektorprodukt (Kreuzprodukt).

Bild 3-3 Momentenwirkung bei Einführung eines Koordinatensystems

In Bild 3-4 wird das Vektorprodukt zur Beschreibung eingeführt. Dazu muss zusätzlich zum Kraftvektor der Ortsvektor aufgestellt werden.



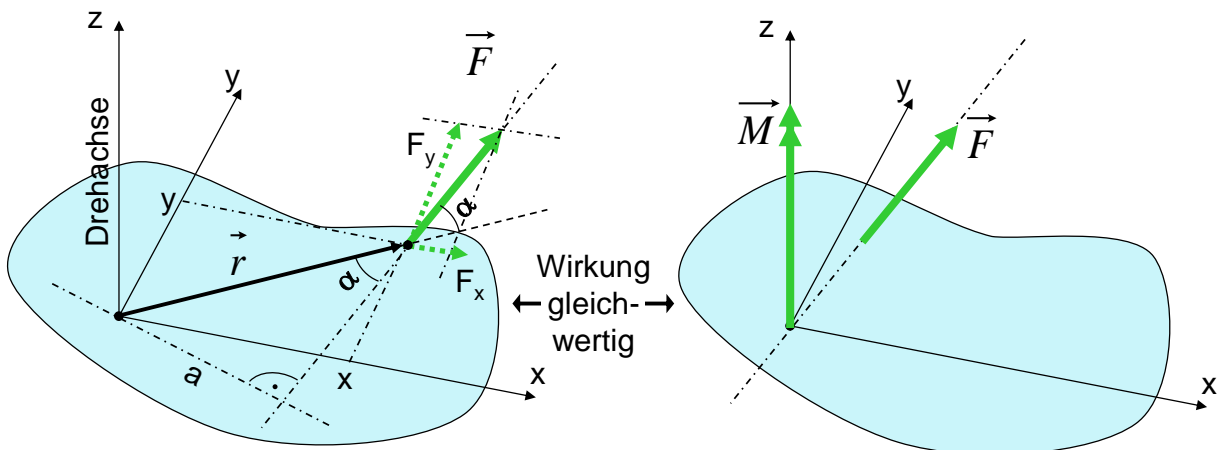
Vektorprodukt mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$  :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{pmatrix} = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$$

Bei einer Vertauschung der Vektoren beim Kreuzprodukt entsteht das gleiche Moment, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen.

Bild 3-4 Moment als Ergebnis eines Vektorproduktes

Das Ergebnis des Vektorproduktes ist wieder ein Vektor, dieser steht senkrecht auf der durch die Ausgangsvektoren aufgespannten Ebene. In Bild 3-5 verläuft dieser Momentenvektor in z-Richtung. Zur Unterscheidung von einem Kraftvektor erhält er in seiner Darstellung eine Doppelspitze. Im Gegensatz zum Kraftvektor ist der Momentenvektor ein freier Vektor, der Parallel im Raum verschoben werden kann, er hat also keinen Angriffspunkt und keine durch einen Punkt verlaufende Drehachse.

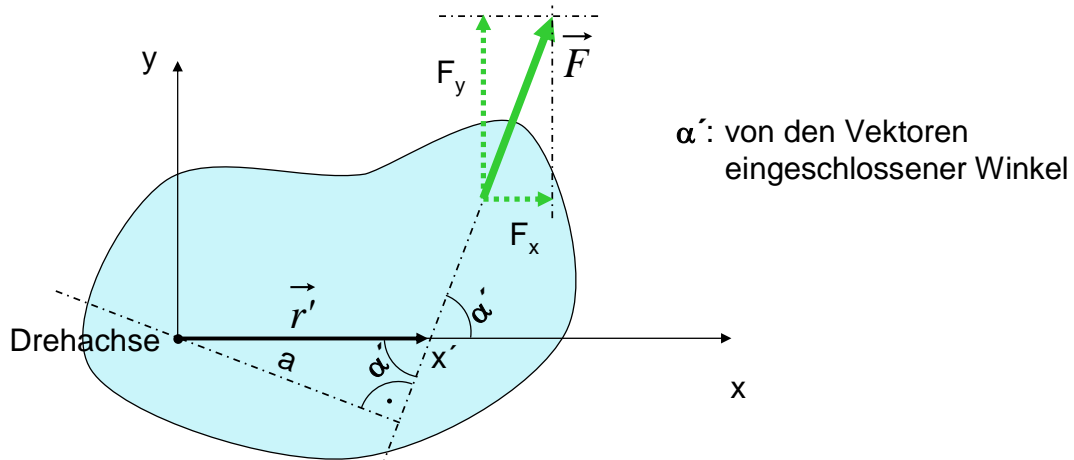


Als Ergebnis des Vektorproduktes ergibt sich ein Vektor, der senkrecht zur Ebene der Ausgangsvektoren liegt. Dieser Vektor ist kein Kraftvektor (Darstellung mit Doppelpfeilspitze), sondern ein Momentenvektor. Dieser hat keinen Angriffspunkt und kann beliebig im Raum verschoben werden.

Der Momentenvektor zusammen mit dem versetzten Kraftvektor ergeben die gleiche Gesamtwirkung auf den Körper wie die ursprüngliche Kraft. Man spricht daher auch von einem Versatzmoment.

Bild 3-5 räumliche Darstellung des Momentenvektors

Der für das Vektorprodukt benötigte Ortsvektor kann zu einem beliebigen Punkt auf der Kraftangriffslinie gerichtet werden, ohne dass sich das Ergebnis des Vektorproduktes verändert. In vielen Fällen kann so eine einfache Formulierung des Ortsvektors genutzt werden (Bild 3-6).



Da Kräfte auf ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden können, kann auch der Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt auf der Wirkungslinie geführt werden, hier z. B. zum Schnittpunkt der Wirkungslinie mit der x-Achse. Das entstehende Moment  $M = F \cdot a$  bleibt unverändert.

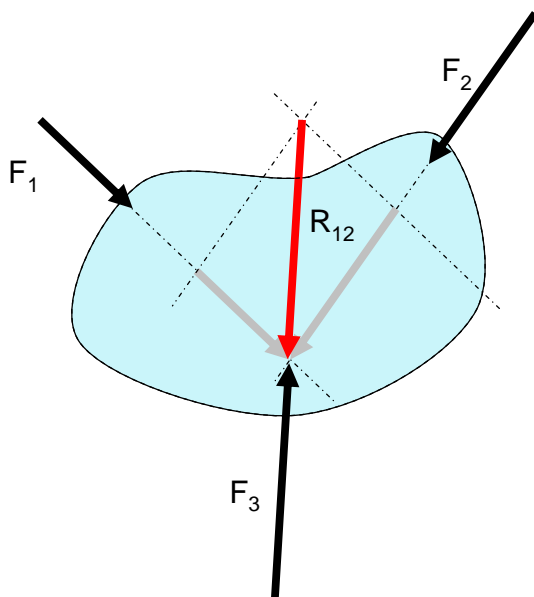
Vektorprodukt mit dem Ortsvektor  $\vec{r}'$  :

$$\vec{M} = \vec{r}' \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x' \cdot F_y - y' \cdot F_x \end{pmatrix} = |\vec{r}'| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha'$$

Die rechte Seite führt entsprechend der geometrischen Deutung auf das gleiche Ergebnis  $F \cdot a$ . Damit liefert das  $\vec{r}'$  Vektorprodukt mit  $\vec{r}'$  ein identisches Ergebnis.

Bild 3-6 Der Ortsvektor kann zu einem beliebigen Punkt auf der Kraftwirkungslinie gerichtet sein

### 3.2 Gleichgewichtsbedingungen



Wenn auf einen freien Körper zwei oder mehr Kräfte einwirken, deren Resultierende  $R_{12...n}$  insgesamt Null ist, bleibt der Körper in Ruhe (befinden sich die Kräfte im Gleichgewicht), wenn sich die Wirkungslinien der Kräfte in einem Punkt schneiden (**zentrales Kräftesystem**).

Für die Überprüfung des Gleichgewichtszustandes **zentraler Kräftesysteme** genügt die Überprüfung des Kräftegleichgewichtes in zwei beliebigen Richtungen, die möglichst senkrecht zueinander stehen sollten.

Schneiden sich zwei oder mehr Kräfte, deren Resultierende Null ist, nicht in einem Punkt, .....

Bild 3-7 Gleichgewicht an einem zentralen Kräftesystem mit drei Kräften

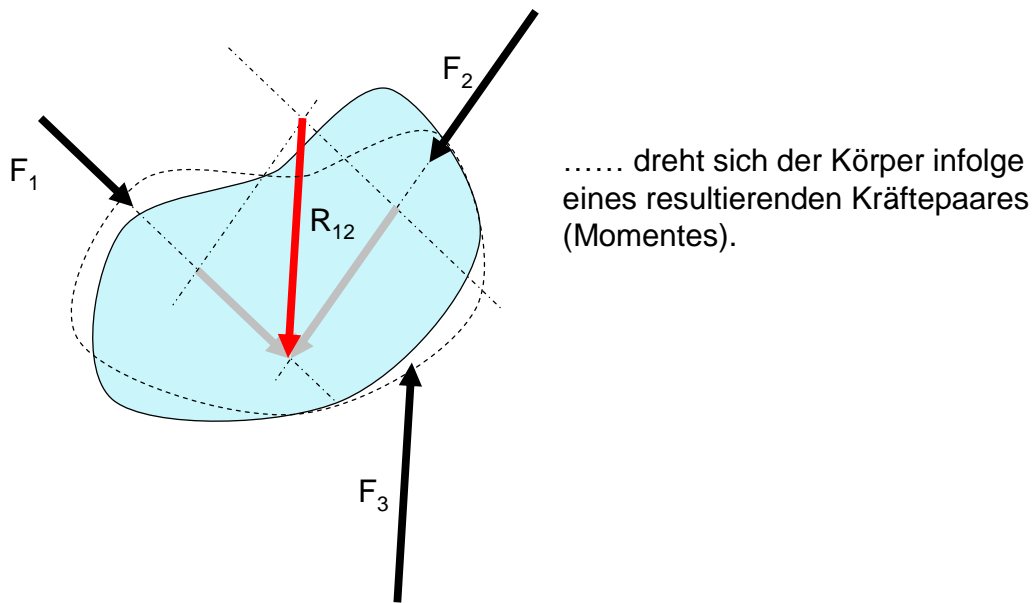


Bild 3-8 Verdrehung eines Freikörpers infolge eines Kräftepaars

In zentralen Kräftesystemen genügt für die Überprüfung eines Gleichgewichtszustandes, dass sich die Kraftresultierende zu Null ergibt. Alternativ formuliert muss die Summe der Kräfte in zwei verschiedene Richtungen jeweils Null werden. Bei allgemeinen Kräftesystemen muss zusätzlich die Summe der Momente Null sein. Da Momente beliebig verschoben werden können, kann ein beliebiger, „fiktiver“ Drehpunkt gewählt werden.

### 3.3 Lagerung von Bauteilen

Bauteile von Bauwerken müssen so gelagert (am Baugrund fixiert) werden, dass unter allen möglichen Einwirkungen keine andauernden Bewegungen (wie z. B. bei Maschinen) entstehen. Das System darf nicht kinematisch (beweglich) werden. Kleine Verschiebungen, Verdrehungen, Verformungen in einem stabilen Zustand sind unvermeidbar und zulässig. Lagerungen müssen so ausgebildet werden, dass infolge der Einwirkungen ein Gleichgewichtszustand möglich ist.

Räumliche Systeme haben sechs Freiheitsgrade (Bild 3-9). Für eine stabile Lagerung müssen diese sechs freien Bewegungsmöglichkeiten unterbunden werden, z. B. durch sechs Stäbe mit Gelenken an den Stabenden („Fesselstäbe“). Diese müssen so angeordnet werden, dass keine Bewegung mehr möglich ist. Jeder Fesselstab kann nur eine Kraft in seiner Achsrichtung aufnehmen.

Zur Berechnung der Stabkräfte räumlicher Systeme bedienen wir uns später wieder der Vektorrechnung (Abschnitt 03.4).

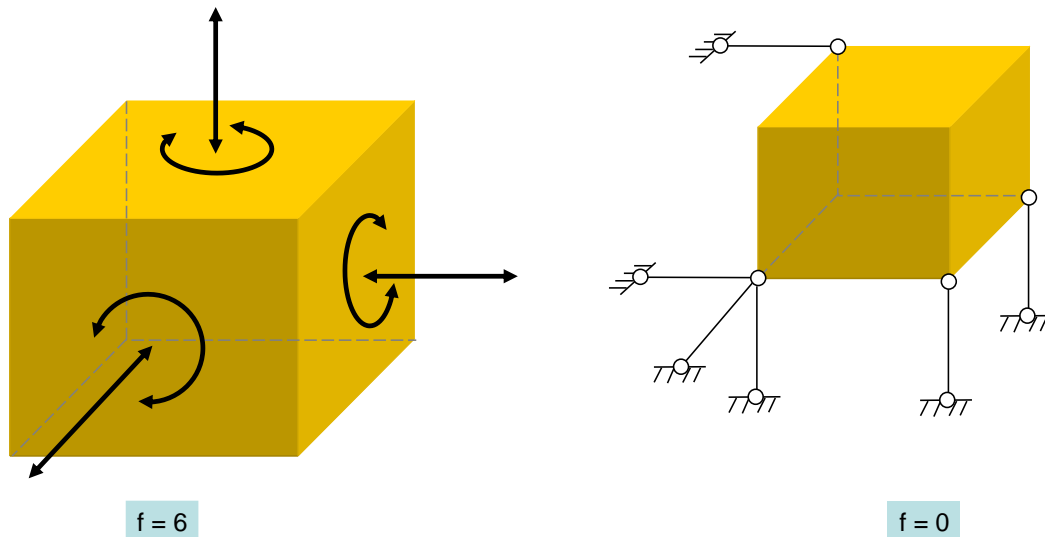


Bild 3-9 Räumliche Freiheitsgrade und stabile Lagerung eines Körpers im Raum

#### Grundbedingungen für stabile Lagerung von Körpern im Raum

- Von höchstens 3 Auflagerstäben dürfen die Achsen parallel im Raum liegen.
- Von höchstens 3 Auflagerstäben dürfen sich die Achsen in einem Punkt schneiden.
- Von höchstens 3 Auflagerstäben dürfen die Achsen in einer Ebene liegen.

#### Zusatzbedingungen

- zu 1: Es dürfen sich nicht die Achsen von 3 Auflagerstäben in einem Punkt A und die Achsen von 3 weiteren Auflagerstäben in einem zweiten Punkt B schneiden.
- zu 3: Es dürfen nicht die Achsen von 3 Auflagerstäben in einer Ebene A und die Achsen von 3 weiteren Auflagerstäben in einer zweiten Ebene B liegen.
- zu 3: Drei in einer Ebene liegende Achsen von Auflagerstäben dürfen sich nicht in einem Punkt schneiden.

Die Liste der Bedingungen ist nicht vollständig, es werden noch weitere Bedingungen vermutet, die die Lagerungsmöglichkeiten einschränken!

**Aufgabe:** Ergänzen Sie in den nachfolgenden 6 Beispielen Auflagerstäbe so, dass eine stabile, statisch bestimmte Lagerung des Körpers im Raum entsteht.

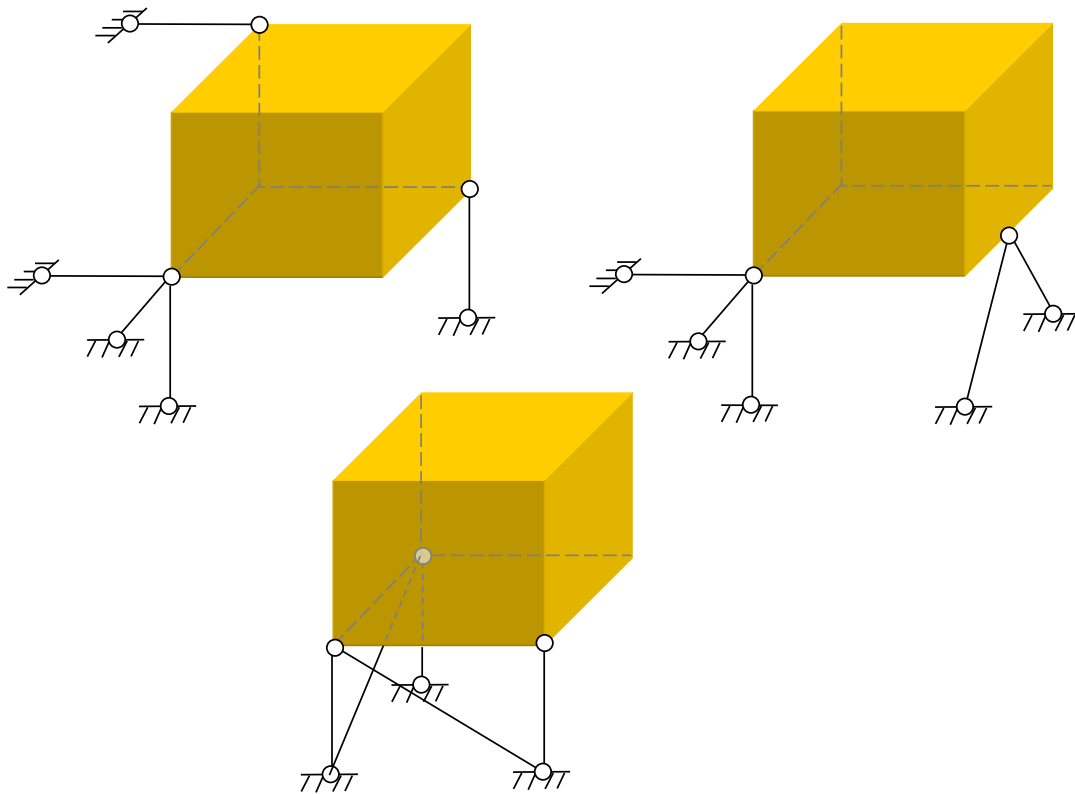


Bild 3-10 Bitte für stabile Lagerung Lagerstab ergänzen und ggf. vorhandene Stäbe korrigieren.

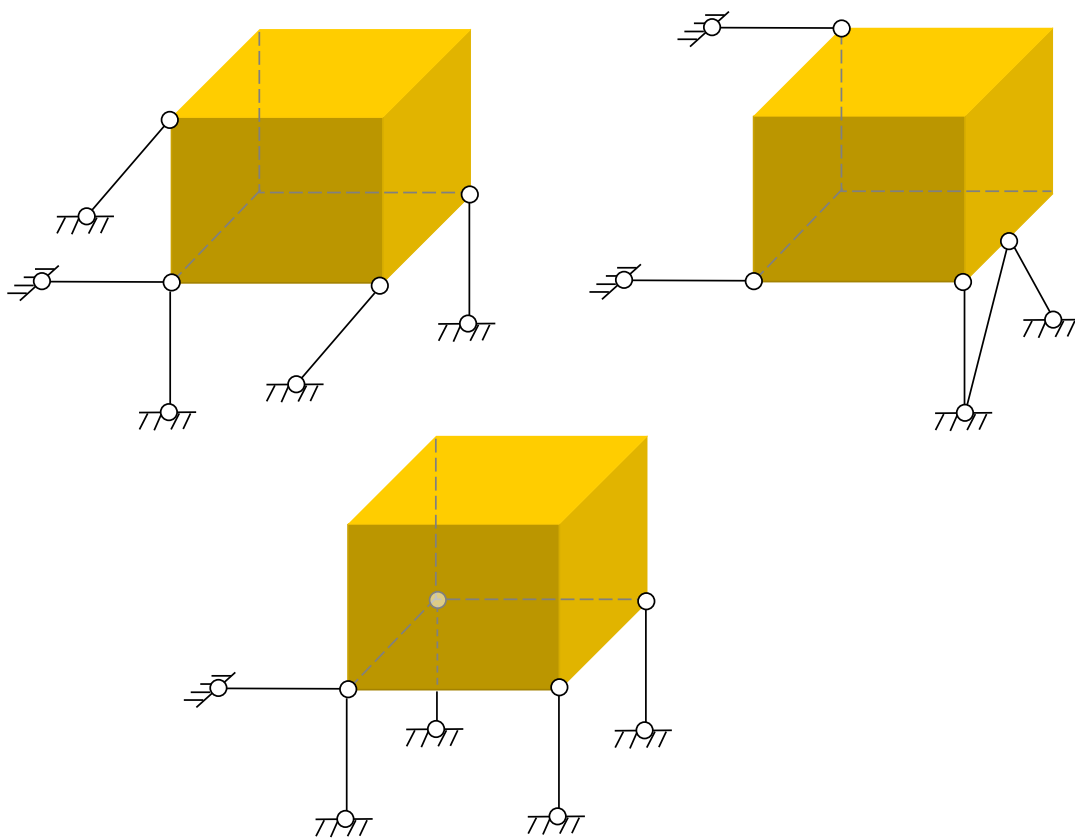


Bild 3-11 Bitte für stabile Lagerung Lagerstab ergänzen und ggf. vorhandene Stäbe korrigieren.

Die meisten Tragsysteme von Bauwerken sind in Teilsysteme aufgegliedert. Für viele dieser Teilsysteme verlaufen die einwirkenden Kräfte und die Reaktionskräfte in einer Ebene, einwirkende Momente um eine Achse senkrecht zur Ebene (vertikale oder horizontale Ebenen, aber auch schiefe Ebenen sind möglich). Solche „ebenen Systeme“ haben nur drei Freiheitsgrade, man benötigt für sie nur drei „Fesselstäbe“.

Die Bedingungen für eine stabile Lagerung von beliebigen ebenen Körpern (Scheiben) durch drei Fesselstäbe sind wesentlich einfacher zu formulieren als bei räumlichen Körpern (Bild 3-12).

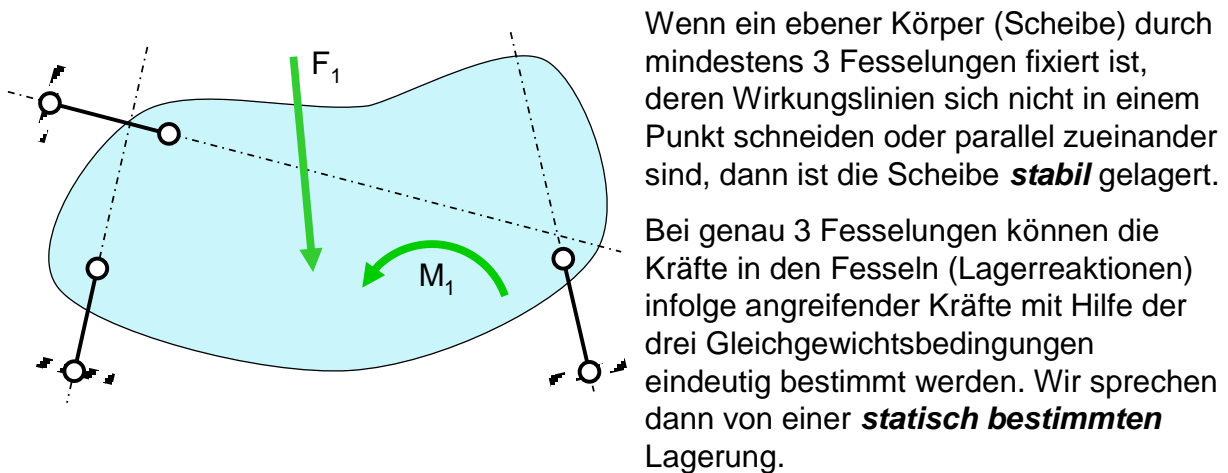


Bild 3-12

Werden zu einer statisch bestimmten Lagerung weitere Fesselungen hinzugefügt, reichen die drei Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr zur Bestimmung der Lagerreaktionen aus. Solche Lagerungen nennen wir **statisch überbestimmt**.

Da starre Körper eine Idealisierung darstellen, reale Körper also stets deformierbar sind, können wir später (3. Sem.) neben den Gleichgewichtsbedingungen zusätzlich Verformungsbedingungen zur Bestimmung weiterer Auflagerreaktionen formulieren. Wir sprechen später von **statisch unbestimmten** Größen (Kräften) in einem statisch überbestimmten (unbestimmten System).

Zur Fesselung/Fixierung eines Körpers im Raum oder einer Scheibe in der Ebene haben wir bisher Fesselstäbe verwendet. Es müssen mindestens so viele Fesselstäbe verwendet werden, wie Freiheitsgrade vorhanden sind. Infolge der Belastung eines „gefesselten“ Bauteils können in den beidseitig mit (Dreh-)Gelenken versehenen Stäben (Fessel-)Kräfte (Druck- oder Zugkräfte) entstehen. Jeder Stab kann nur eine Kraft in seiner Achsrichtung aufnehmen, Bild 3-13 a).

Das obere oder untere Gelenk eines Stabes kann in der Ebene in einer Richtung kleinere pos. oder neg. Verschiebewege zulassen, Bild 3-13 b). Wegen der möglichen Pendelbewegung wird der Fesselstab auch als Pendelstab bezeichnet. Die Verschiebewege sind im Verhältnis zu den Bauteilabmessungen in der Regel sehr gering. Daher wird die Kraft in der ursprünglichen Stabrichtung wirkend angenommen.

Zwei gekoppelte Pendelstäbe blockieren sich gegenseitig, Bild 3-13 c). Das Gelenk am Bauteil ist jetzt unverschieblich. Die Richtungen der Stäbe können beliebig, aber unterschiedlich gewählt werden, ohne dass sich die Wirkung auf das Bauteil ändert.



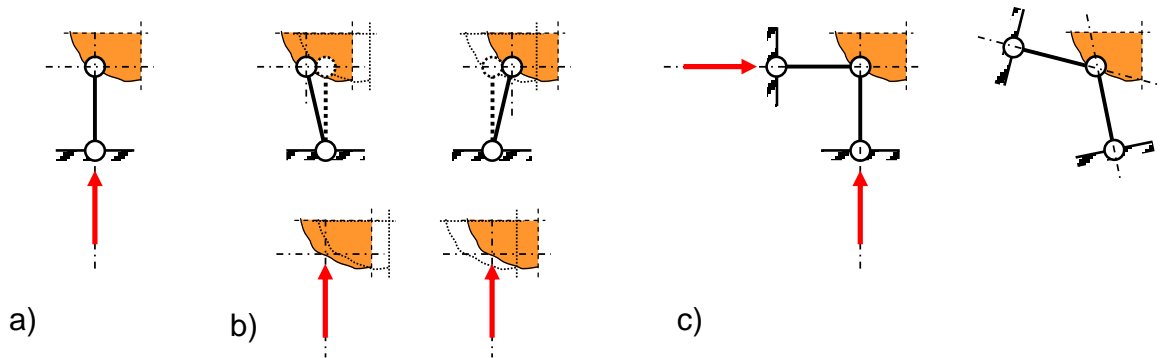


Bild 3-13 Kräfte und Verschiebungen von Fesselstäben

Ein Festlager ersetzt die Wirkung zweier gekoppelter Pendelstäbe. Durch Festlager werden Bauteile gelenkig an ein „Fundament“ bzw. den „Untergrund/Baugrund“ angeschlossen. Das angeschlossene Bauteil kann sich in keiner Richtung verschieben (hat einen „unendlich“ großen Verschiebewiderstand). Das Bauteil könnte sich infolge von Bauteilverformungen um das Gelenk geringfügig drehen. Große Drehbewegungen werden ja durch die stabile Lagerung von Bauteilen verhindert. Aus den Bauteilen werden in der Regel Kräfte über das Lager an das „Fundament“ bzw. den „Baugrund“ weitergeleitet. Die Kräfte können in zwei beliebigen Richtungen wirkend angenommen werden, meistens werden diese Richtungen horizontal und vertikal gewählt. Die Wirkungslinien schneiden sich in der Gelenkmitte.

Ein Gleitlager ersetzt die Wirkung eines einzelnen Pendelstabes. Ältere Gleitlager von Brücken wurden als Rollenlager ausgebildet, daher wird manchmal auch das rechte Symbol verwendet. Moderne Brücken-Gleitlager bestehen aus einer mit Teflon beschichteten Oberfläche auf der einen und einer Edelstahlfläche auf der anderen Seite. Gleitlager/Rollenlager haben ein Gelenk, in einer Richtung ist eine pos. bzw. neg. Verschiebung des Lagers möglich, der Verschiebewiderstand in dieser Richtung ist theoretisch Null. Nur senkrecht zu der Verschieberichtung ist eine Kraftübertragung möglich.

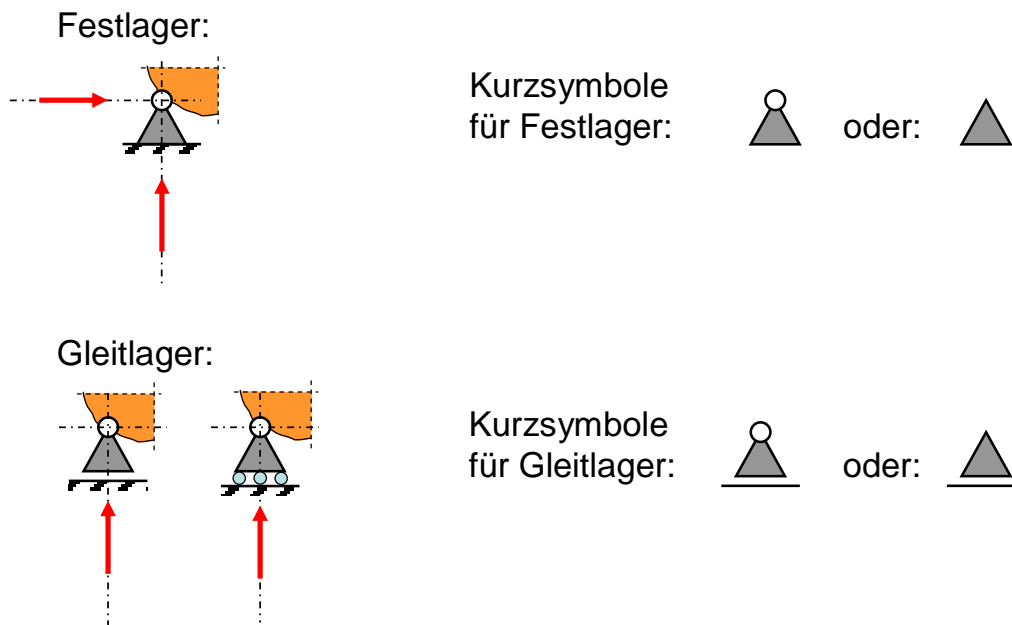


Bild 3-14 verschiedene Lagerarten in ebenen Systemen und ihre unterschiedlichen Darstellungsarten

Die beiden Krafrichtungen bei Festlagern werden häufig horizontal und vertikal gewählt (Bild 3-15). Es können aber auch beliebig andere Krafrichtungen (wie bei den Pendelstäben) gewählt werden, sofern dies zweckmäßig erscheint. Je nach Wahl der Richtungen ergeben sich unterschiedliche

Kräfte. Werden diese Kräfte zu einer resultierenden Lagerkraft zusammengesetzt, dann ergibt sich in jedem Fall die gleiche Resultierende

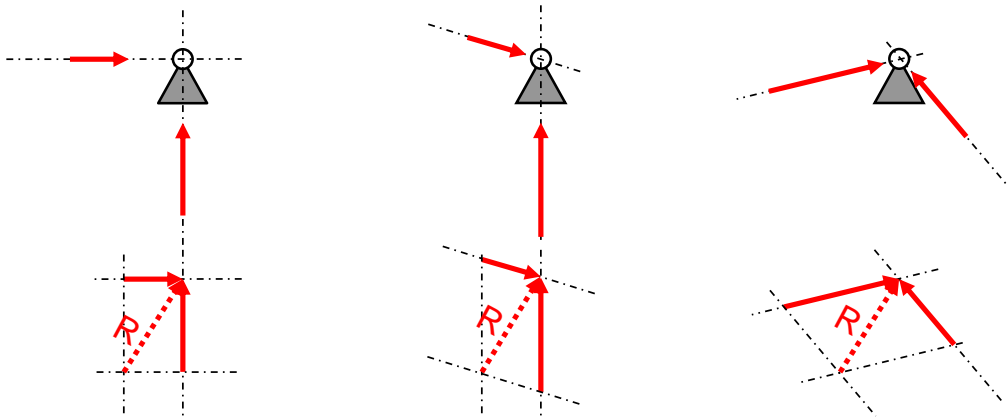


Bild 3-15 Zur Wahl der Krafrichtungen bei Festlagern

Ein Bauteil muss **stabil** gelagert sein, also durch mindestens 3 Lagerkräfte gestützt werden. Die Wirkungslinien der Lagerkräfte dürfen sich nicht in einem Punkt schneiden und nicht parallel zueinander liegen. Die 3 Lagerkräfte können mit Hilfe der 3 Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene ermittelt werden. Eine solche Lagerung nennen wir **statisch bestimmt**. Schneiden sich die Wirkungslinien oder liegen sie parallel zueinander, dann ist das Bauteil **kinematisch** (beweglich).

Zusätzliche Lager bzw. Lagerkräfte können zu einer statisch bestimmten Lagerung zwar ergänzt werden und erhöhen die Stabilität, jedoch reichen die drei Gleichgewichtsbedingungen dann nicht mehr zur Berechnung der Kräfte aus. Eine solche Lagerung mit mehr als drei Kräften nennen wir daher **statisch überbestimmt** oder auch **statisch unbestimmt**.

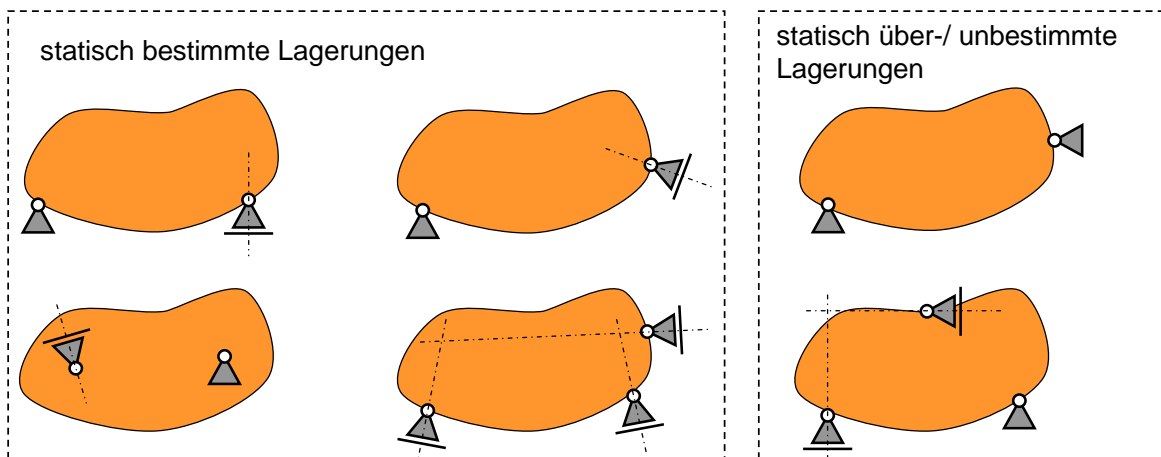


Bild 3-16 Lagerungsbedingungen für ebene Bauteile

kinematische Lagerungen

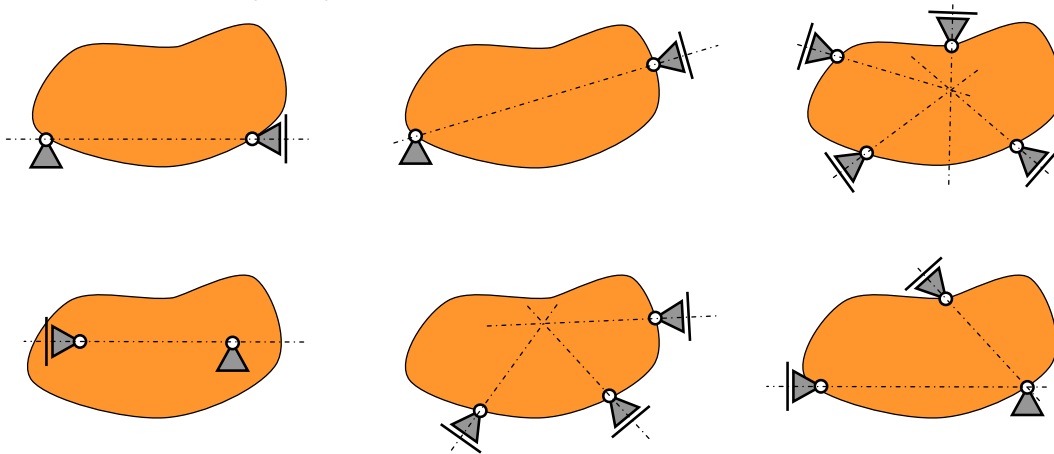


Bild 3-17 instabile, kinematische Lagerungen

Neben Gleit- und Festlagern gibt es eine weitere wichtige Befestigungsart: die sogenannte **Einspannung**. Von der Wirkung ist die Einspannung ein Festlager, bei dem zusätzlich die Verdrehung des angeschlossenen Bauteils vollständig verhindert wird. Bei einem Festlager haben wir ein ideal reibungsfreies Gelenk, bei dem eine Verdrehung des anschließenden Bauteils möglich ist.

Einspannungen werden z. B. bei balkenförmigen Bauteilen verwendet (Bild 3-19). Die Verdrehung des Bauteils an der Einspannstelle kann nur verhindert werden, wenn neben den zwei Lagerkräften (meist horizontal und vertikal wirkend angenommen) ein Moment aufgenommen werden kann. Dieses Reaktionsmoment nennen wir „**Einspannmoment**“. Weil wir an einer Einspannung drei Lagerreaktionen haben, wird die Einspannung manchmal auch als **dreiwertiges Lager** bezeichnet. Entsprechend ist ein Gleitlager ein **einwertiges** und ein Festlager ein **zweiwertiges Lager**.

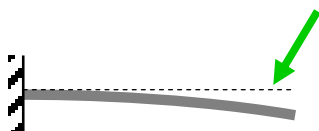
Eingespannter Balken  
(Kragbalken)



wie Festlager mit sehr starker Spiralfeder



Verformter Kragbalken



Freischnitt mit Lagerreaktionen

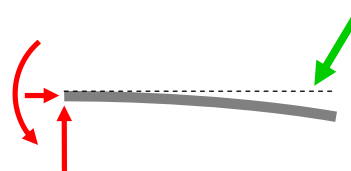


Bild 3-18 Wirkung einer Einspannung und ihre Lagerreaktionen

### 3.4 Vektorrechnung für allgemeine Kräftesysteme

Die Grundlagen zur Anwendung der Vektorrechnung wurden bereits vorgestellt. Im folgenden finden die Gleichgewichtsbedingungen für allgemeine Kräftesysteme ihre Formulierung.

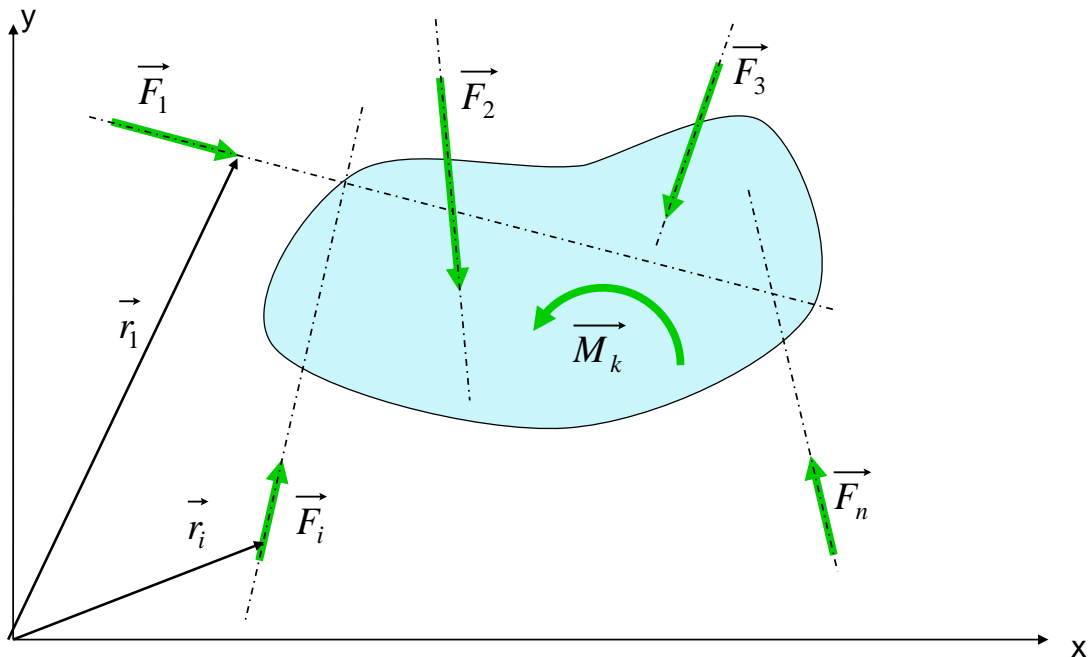


Bild 3-19 Vektorielle Überprüfung des Gleichgewichts ebener, (starrer) Körper in allgemeinen Kräftesystemen

Entsprechend den Gleichgewichtsbedingungen müssen die Kräfte (hier in x,y-Ebene wirkend)\_insgesamt Null ergeben:

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebenso muss die Summe der Momente Null ergeben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{1z} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{kz} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach Lösen der Vektorprodukte:

$$\dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{kz} \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Kräfte- und Momentengleichungen können wir formal zusammenfassen und folgendermaßen formulieren:

$$\begin{pmatrix} \sum F_{ix} \\ \sum F_{iy} \\ \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum M_{kz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog erhält man für Körper im Raum:

$$\begin{pmatrix} \sum F_{ix} \\ \sum F_{iy} \\ \sum F_{iz} \\ \sum (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) \\ \sum (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}) \\ \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum M_{kx} \\ \sum M_{ky} \\ \sum M_{kz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nachfolgend werden die Gleichgewichtsbedingungen genutzt, um Lagerreaktionen zu berechnen. Hierbei entstehen lineare Gleichungssysteme, die mit den Hilfsmitteln aus der Mathematik gelöst werden können. Für ebene Systeme findet die Vektorrechnung allerdings selten Anwendung. Ihr großer Vorteil besteht darin, dass die Beziehungen für ebene Systeme sehr schnell auf räumliche Systeme erweitert werden können.

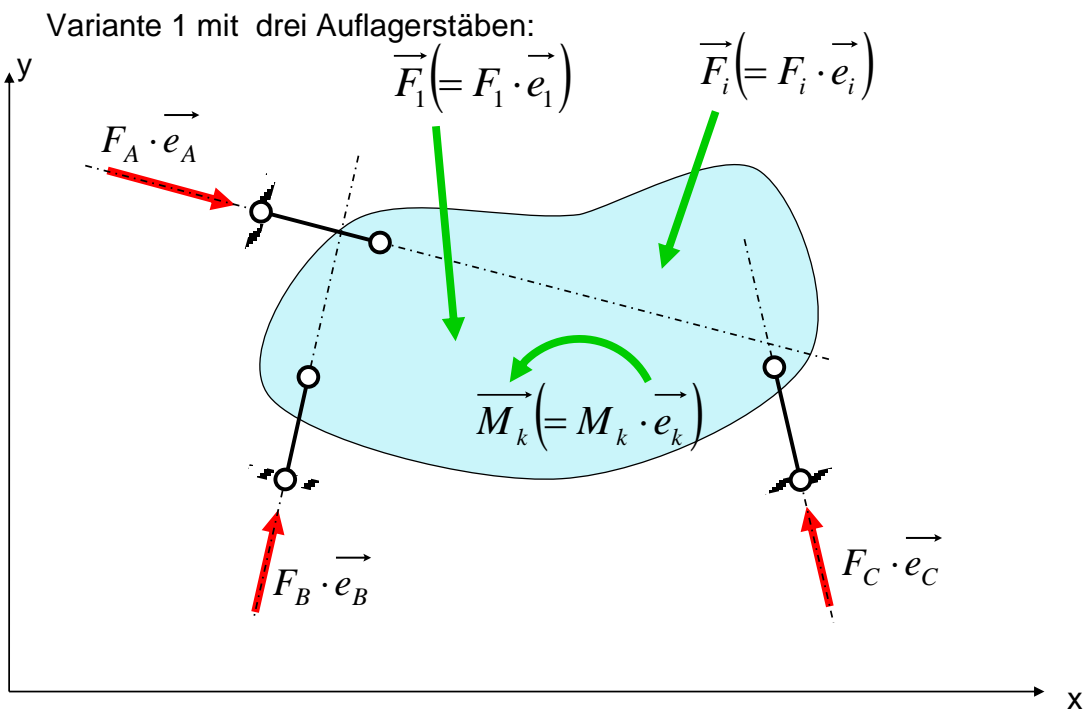


Bild 3-20 Vektorielle Berechnung von Auflagerreaktionen statisch bestimmt gelagerter Körper (Scheiben) in der Ebene, allg. Kräftesystem

Entsprechend den Gleichgewichtsbedingungen müssen die Kräfte (hier in x,y-Ebene wirkend) insgesamt Null ergeben:

$$F_A \cdot \begin{pmatrix} e_{Ax} \\ e_{Ay} \end{pmatrix} + F_B \cdot \begin{pmatrix} e_{Bx} \\ e_{By} \end{pmatrix} + F_C \cdot \begin{pmatrix} e_{Cx} \\ e_{Cy} \end{pmatrix} + F_1 \cdot \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{pmatrix} + F_i \cdot \begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis:

Die Vektoren der einwirkenden Kräfte können auch direkt (ohne Einheitsvektor) aufgeschrieben werden.

umgeformt:

$$F_A \cdot \begin{pmatrix} e_{Ax} \\ e_{Ay} \end{pmatrix} + F_B \cdot \begin{pmatrix} e_{Bx} \\ e_{By} \end{pmatrix} + F_C \cdot \begin{pmatrix} e_{Cx} \\ e_{Cy} \end{pmatrix} = -F_1 \cdot \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{pmatrix} - F_i \cdot \begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sum F_{ix} \\ -\sum F_{iy} \end{pmatrix}$$

Damit hat man zwei von drei Gleichungen für die drei unbekanntem Auflagerkräfte

die Bedingung, dass die Summe der Momente Null sein muss:

$$F_A \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_{Ax} \\ e_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + F_B \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_{Bx} \\ e_{By} \\ 0 \end{pmatrix} + F_C \cdot \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_{Cx} \\ e_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix} + F_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} + F_i \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \\ 0 \end{pmatrix} + M_k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert die dritte Gleichung:

$$F_A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_A \cdot e_{Ay} - y_A \cdot e_{Ax} \end{pmatrix} + F_B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_B \cdot e_{By} - y_B \cdot e_{Bx} \end{pmatrix} + F_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_C \cdot e_{Cy} - y_C \cdot e_{Cx} \end{pmatrix} = -F_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \cdot e_{1y} - y_1 \cdot e_{1x} \end{pmatrix} - F_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_i \cdot e_{iy} - y_i \cdot e_{ix} \end{pmatrix} - M_k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) - \sum M_{kz} \end{pmatrix}$$

Die drei Gleichungen in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} e_{Ax} & e_{Bx} & e_{Cx} \\ e_{Ay} & e_{By} & e_{Cy} \\ (x_A \cdot e_{Ay} - y_A \cdot e_{Ax}) & (x_B \cdot e_{By} - y_B \cdot e_{Bx}) & (x_C \cdot e_{Cy} - y_C \cdot e_{Cx}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum F_{ix} \\ -\sum F_{iy} \\ -\sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) - \sum M_{kz} \end{pmatrix}$$

können mit Hilfe der inversen Matrix durch Ausmultiplizieren gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} inverse & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & Matrix \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sum F_{ix} \\ -\sum F_{iy} \\ -\sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) - \sum M_{kz} \end{pmatrix}$$

Variante 2 mit zwei Auflagerstäben und einer Drehfessel:

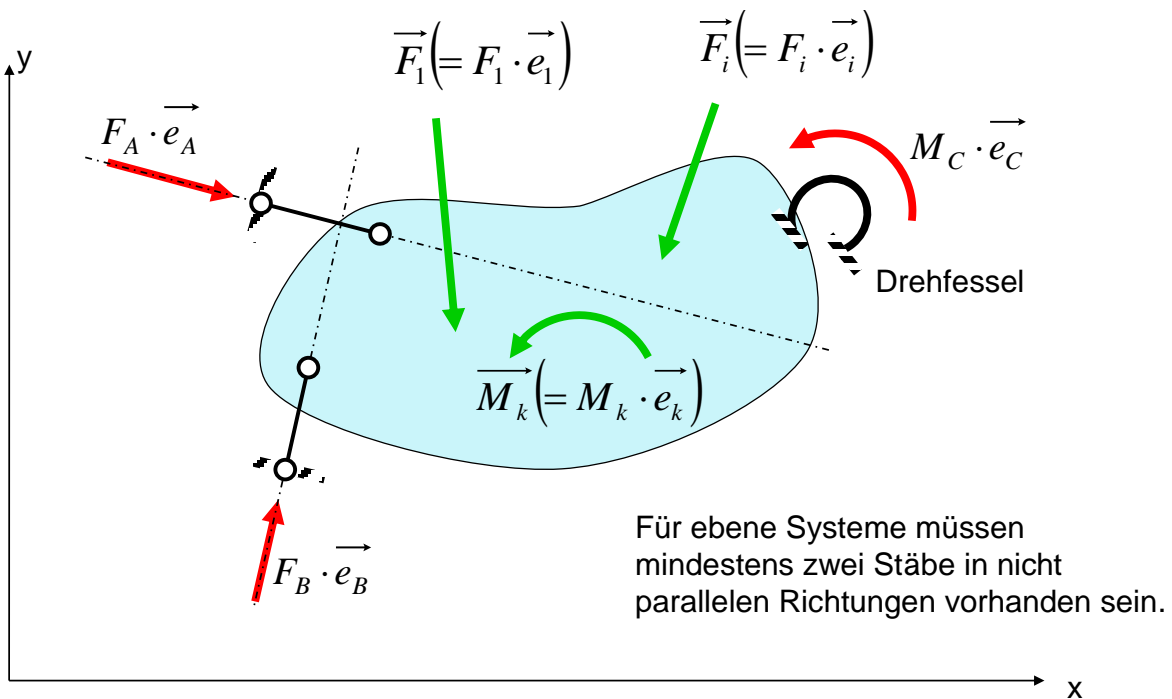


Bild 3-21 Vektorielle Berechnung von Auflagerreaktionen statisch bestimmt gelagerter Körper (Scheiben) in der Ebene, allg. Kräftesystem

Bei dieser Variante vereinfacht sich das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} e_{Ax} & e_{Bx} & 0 \\ e_{Ay} & e_{By} & 0 \\ (x_A \cdot e_{Ay} - y_A \cdot e_{Ax}) & (x_B \cdot e_{By} - y_B \cdot e_{Bx}) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ M_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum F_{ix} \\ -\sum F_{iy} \\ -\sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) - \sum M_{kz} \end{pmatrix}$$

Die Lösung erhält man wieder mit Hilfe der inversen Matrix :

$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ M_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} inverse & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & Matrix \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sum F_{ix} \\ -\sum F_{iy} \\ -\sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) - \sum M_{kz} \end{pmatrix}$$

## Vektorielle Berechnung von Auflagerreaktionen statisch bestimmt gelagerter Körper im Raum, allg. Kräftesystem

bei 6 Auflagerstäben erhält man analog zum ebenen Fall 6 Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} e_{Ax} & e_{Bx} & e_{Cx} & e_{Dx} & e_{Ex} & e_{Fx} \\ e_{Ay} & e_{By} & e_{Cy} & e_{Dy} & e_{Ey} & e_{Fy} \\ e_{Az} & e_{Bz} & e_{Cz} & e_{Dz} & e_{Ez} & e_{Fz} \\ \left( \begin{matrix} y_A \cdot e_{Az} \\ -z_A \cdot e_{Ay} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} y_B \cdot e_{Bz} \\ -z_B \cdot e_{By} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} y_C \cdot e_{Cz} \\ -z_C \cdot e_{Cy} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} y_D \cdot e_{Dz} \\ -z_D \cdot e_{Dy} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} y_E \cdot e_{Ez} \\ -z_E \cdot e_{Ey} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} y_F \cdot e_{Fz} \\ -z_F \cdot e_{Fy} \end{matrix} \right) \\ \left( \begin{matrix} z_A \cdot e_{Ax} \\ -x_A \cdot e_{Az} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} z_B \cdot e_{Bx} \\ -x_B \cdot e_{Bz} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} z_C \cdot e_{Cx} \\ -x_C \cdot e_{Cz} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} z_D \cdot e_{Dx} \\ -x_D \cdot e_{Dz} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} z_E \cdot e_{Ex} \\ -x_E \cdot e_{Ez} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} z_F \cdot e_{Fx} \\ -x_F \cdot e_{Fz} \end{matrix} \right) \\ \left( \begin{matrix} x_A \cdot e_{Ay} \\ -y_A \cdot e_{Ax} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} x_B \cdot e_{By} \\ -y_B \cdot e_{Bx} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} x_C \cdot e_{Cy} \\ -y_C \cdot e_{Cx} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} x_D \cdot e_{Dy} \\ -y_D \cdot e_{Dx} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} x_E \cdot e_{Ey} \\ -y_E \cdot e_{Ex} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} x_F \cdot e_{Fy} \\ -y_F \cdot e_{Fx} \end{matrix} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \\ F_E \\ F_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum F_{ix} \\ -\sum F_{iy} \\ -\sum F_{iz} \\ -\sum (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) - \sum M_{kx} \\ -\sum (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}) - \sum M_{ky} \\ -\sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) - \sum M_{kz} \end{pmatrix}$$

Die Lösung erhält man wieder mit Hilfe der inversen Matrix.

Analog erhält man z.B. bei drei Auflagerstäben und drei Drehfesseln:

Einheitsvektoren der Stäbe

$$\begin{pmatrix} e_{Ax} & e_{Bx} & e_{Cx} & 0 & 0 & 0 \\ e_{Ay} & e_{By} & e_{Cy} & 0 & 0 & 0 \\ e_{Az} & e_{Bz} & e_{Cz} & 0 & 0 & 0 \\ \left( \begin{matrix} y_A \cdot e_{Az} \\ -z_A \cdot e_{Ay} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} y_B \cdot e_{Bz} \\ -z_B \cdot e_{By} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} y_C \cdot e_{Cz} \\ -z_C \cdot e_{Cy} \end{matrix} \right) & e_{Dx} & e_{Ex} & e_{Fx} \\ \left( \begin{matrix} z_A \cdot e_{Ax} \\ -x_A \cdot e_{Az} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} z_B \cdot e_{Bx} \\ -x_B \cdot e_{Bz} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} z_C \cdot e_{Cx} \\ -x_C \cdot e_{Cz} \end{matrix} \right) & e_{Dy} & e_{Ey} & e_{Fy} \\ \left( \begin{matrix} x_A \cdot e_{Ay} \\ -y_A \cdot e_{Ax} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} x_B \cdot e_{By} \\ -y_B \cdot e_{Bx} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} x_C \cdot e_{Cy} \\ -y_C \cdot e_{Cx} \end{matrix} \right) & e_{Dz} & e_{Ez} & e_{Fz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ M_D \\ M_E \\ M_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum F_{ix} \\ -\sum F_{iy} \\ -\sum F_{iz} \\ -\sum (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) - \sum M_{kx} \\ -\sum (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}) - \sum M_{ky} \\ -\sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) - \sum M_{kz} \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren der Drehfesseln

Dieses Gleichungssystem könnte alternativ auch durch Lösen von zweimal drei Gleichungen mit drei Unbekannten gelöst werden (zuerst die drei Kräftegleichungen, dann nach Umstellung die Momentengleichungen).

Die Lösung erhält man z. B. wieder mit Hilfe der inversen Matrix.

Bei einer oder zwei Drehfesseln ist die Lösung sinngemäß zu entwickeln.

Für räumliche Systeme dürfen höchstens drei Drehfesseln mit nicht parallelen Wirkungsachsen verwendet werden und es müssen mindestens drei Stäbe mit nicht parallelen Wirkungsachsen vorhanden sein.



## 4 Schwerpunkt

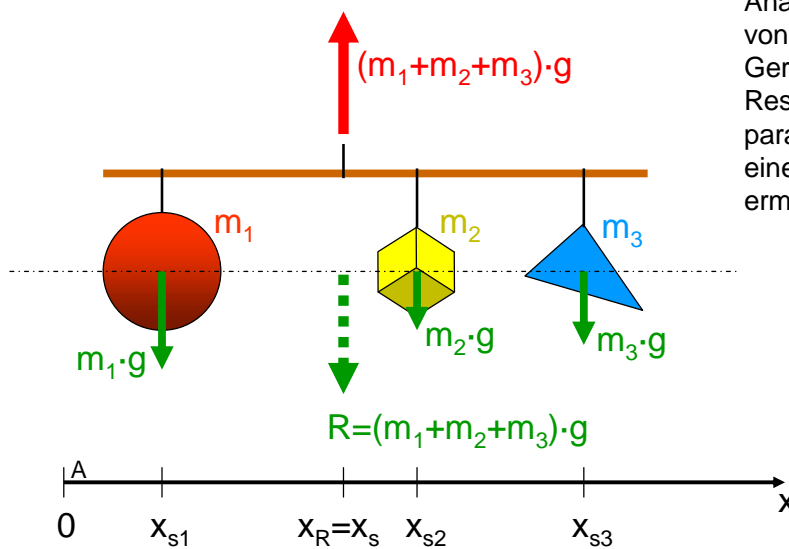
### 4.1 Arten von Schwerpunkten

Schwerpunkte können für sehr unterschiedliche Objekte ermittelt werden:

- Körperschwerpunkt
- Volumenschwerpunkt
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

### 4.2 Massenschwerpunkt

Unter dem Massenschwerpunkt versteht man in der Regel den Schwerpunkt von Massen, die entlang einer Geraden, in einer Fläche oder im Raum verteilt sind. Die Massenkräfte stehen im Gleichgewicht mit einer Reaktionskraft, wenn man sich das System wie ein Mobile vorstellt. Die Reaktionskraft ergibt sich entgegengesetzt zur resultierenden Massenkraft. Ihre Lage, z. B. in Bild 4-1 ihr x-Wert, ergibt sich aus der Bedingung, dass die Summe der Momente im Gleichgewichtssystem Null sein muss.



Analog zum Schwerpunkt von Massen entlang einer Geraden wird die Lage der Resultierenden von parallelen Kräften, die in einer Ebene wirken, ermittelt.

$$\sum M_A = 0 = m_1 \cdot g \cdot x_{s1} + m_2 \cdot g \cdot x_{s2} + m_3 \cdot g \cdot x_{s3} - (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot x_s$$

$$x_s = \frac{m_1 \cdot x_{s1} + m_2 \cdot x_{s2} + m_3 \cdot x_{s3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_s = \frac{\sum m_i \cdot x_{si}}{\sum m_i}$$

Bild 4-1 Schwerpunkt von Massen entlang einer Geraden

Wenn die Einzelmassen in einer Ebene verteilt sind, in Bild 4-2 z. B. in einer x,y- Ebene, oder im Raum wie in Bild 4-3, dann ergeben sich die y- bzw. die z-Koordinaten analog.

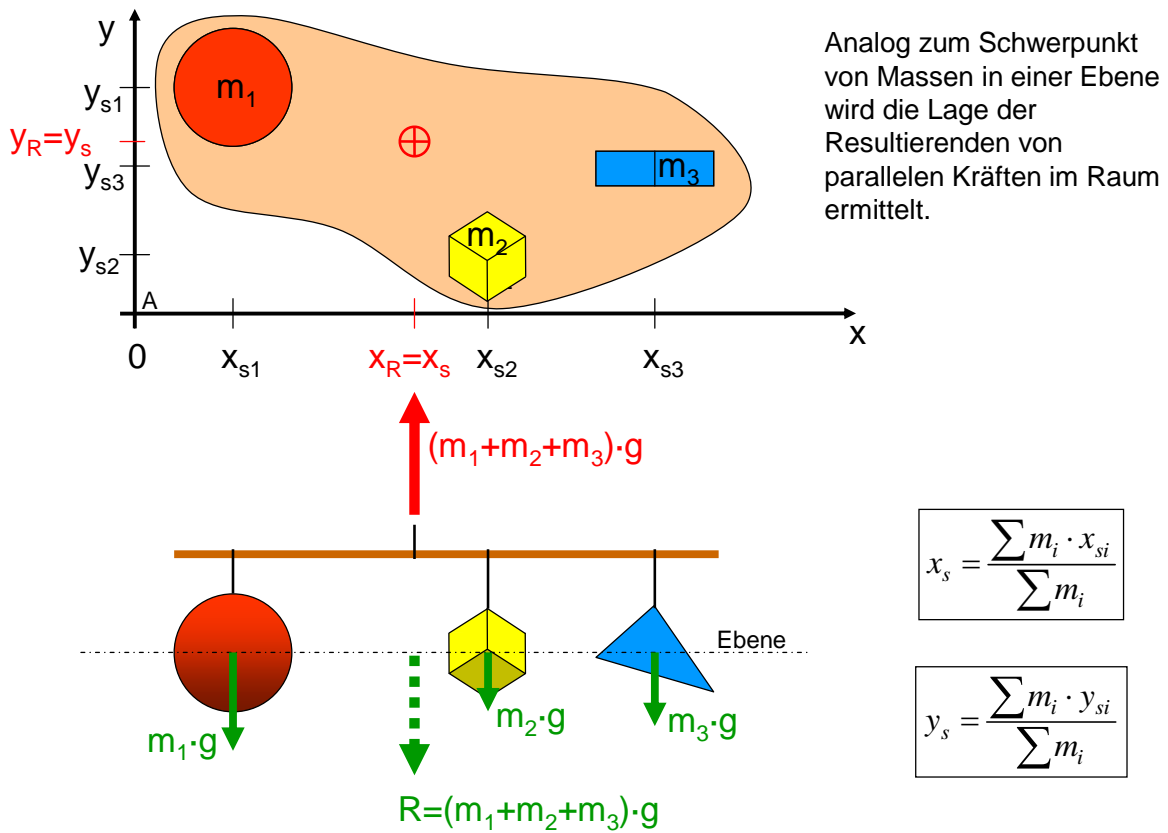


Bild 4-2 Schwerpunkt von Massen in einer Ebene

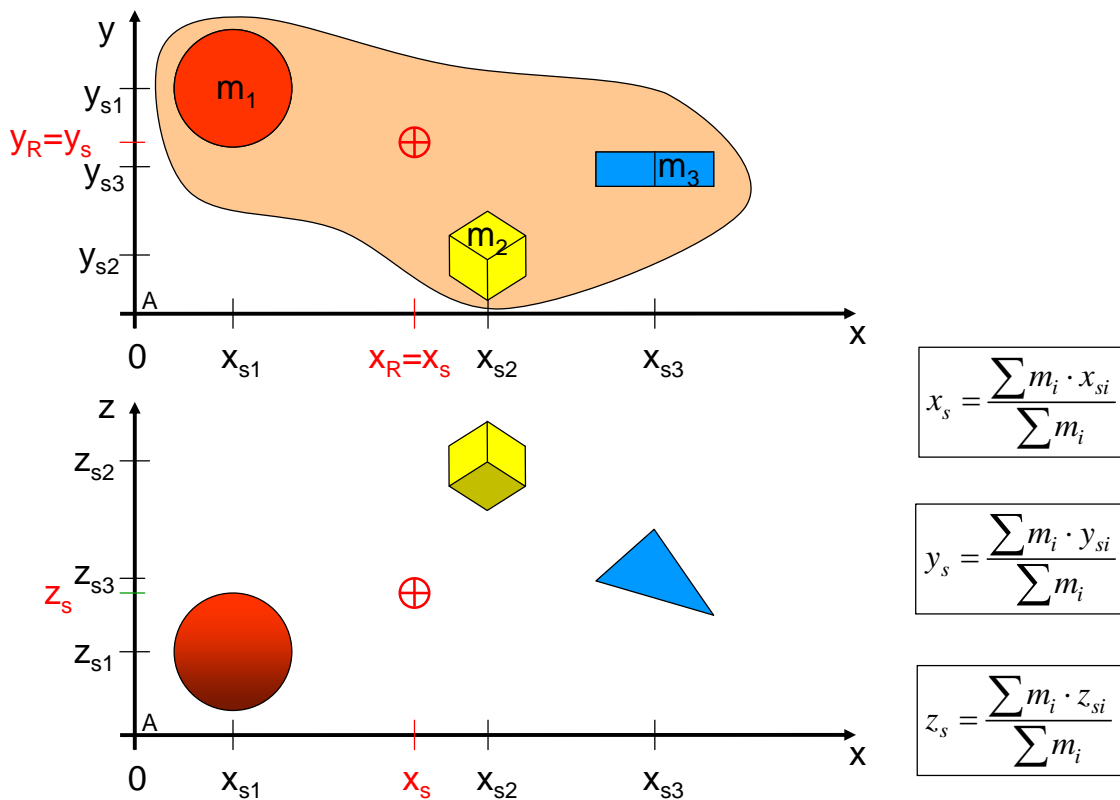


Bild 4-3 Schwerpunkt von Massen im Raum

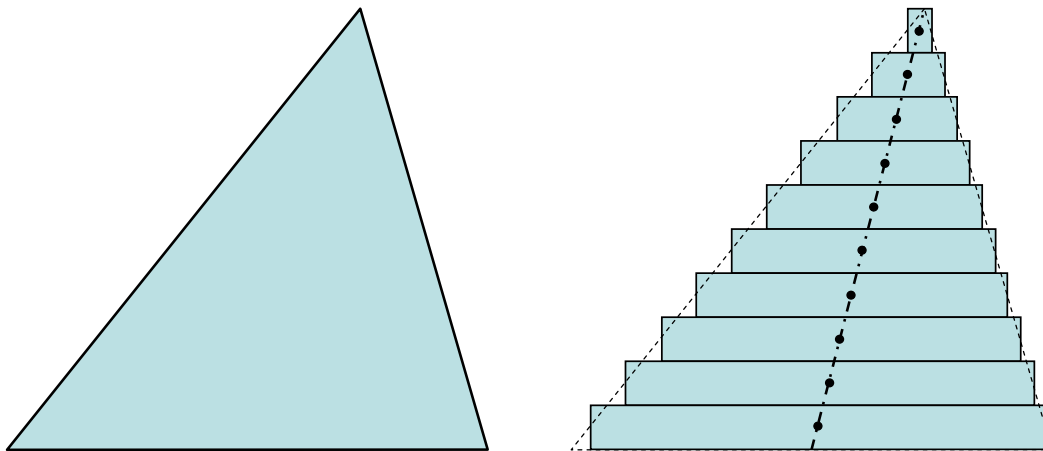
### 4.3 Flächenschwerpunkt

Wenn eine Masse über eine vorgegebene Fläche gleichmäßig verteilt ist, z. B. bei einer Scheibe aus homogenen Material (Material mit gleichmäßigen Eigenschaften, hier Dichte) und mit konstanter Dicke, dann genügt es, den Schwerpunkt der Fläche zu berechnen.

#### 4.3.1 Flächenschwerpunkt geometrischer Grundformen

Für rechteckige Flächen, Kreisflächen oder andere doppelt symmetrische Flächen fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammen.

Das Dreieck ist eine wichtige Grundform, da sich viele Flächen aus Dreiecken zusammensetzen lassen.

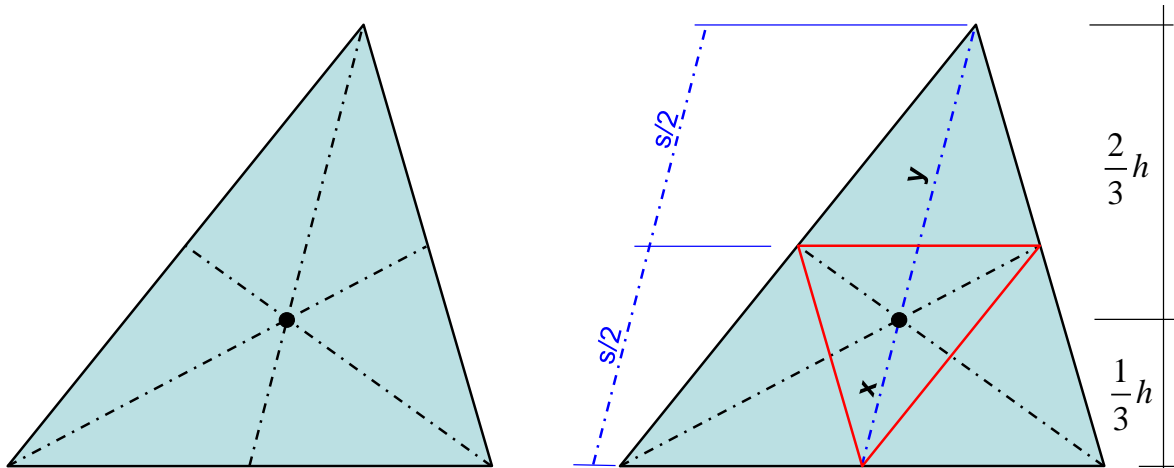


Die Teilflächenschwerpunkte liegen alle auf der Seitenhalbierenden, daher muss der Gesamtschwerpunkt auf der gleichen Geraden liegen.

Bild 4-4 Der Flächenschwerpunkt eines Dreiecks liegt auf der Seitenhalbierenden

Der Flächenschwerpunkt eines Dreiecks liegt auf der Seitenhalbierenden. Diese Betrachtung gilt für jede Dreiecksgrundseite, daher liegt der Flächenschwerpunkt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (Bild 4-5).

In welchem Verhältnis schneiden sich die Seitenhalbierenden?



Das eingeschriebene Dreieck hat die gleichen Seitenhalbierenden. Es gelten dann folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{x}{s/2} = \frac{y}{s} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{s/2}{s} = \frac{1}{2} \quad \text{oder:} \quad \boxed{x = \frac{s}{3}}$$

Im gleichen Verhältnis ergibt sich die Teilung der jeweiligen Höhe.

Bild 4-5 Der Flächenschwerpunkt eines Dreiecks liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, diese schneiden sich im Verhältnis 2:1

Ohne weitere Herleitung wird der Schwerpunkt eines Halb- und Viertelkreises in Bild 4-6 angegeben.

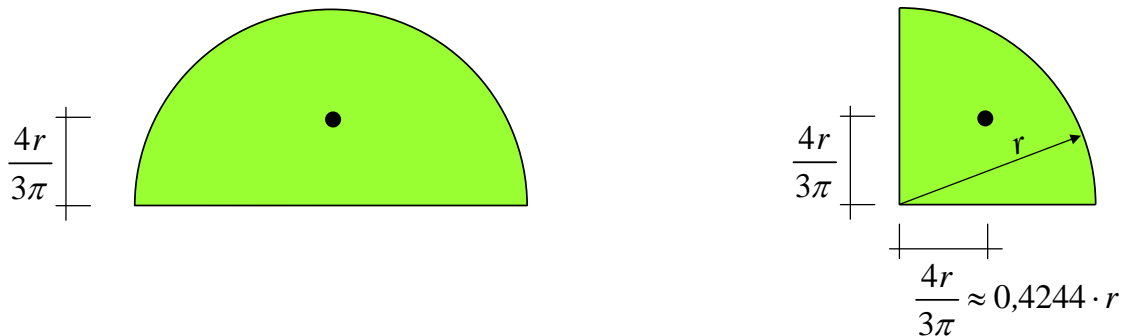


Bild 4-6 Schwerpunkt eines Halb- und Viertelkreises

### 4.3.2 Schwerpunkt zusammengesetzter Flächen

Bei zusammengesetzten Flächen kann man die Teilflächen wie einzelne Massen ansehen. Die Lösung für die Schwerpunktskoordinaten ergibt sich analog wie bei Massen in einer Ebene. Löcher in der Fläche können berücksichtigt werden, wenn sie als eine negative Teilfläche betrachtet werden.

Vorteilhaft ist eine tabellarische Aufbereitung der Berechnung (Bild 4-8).

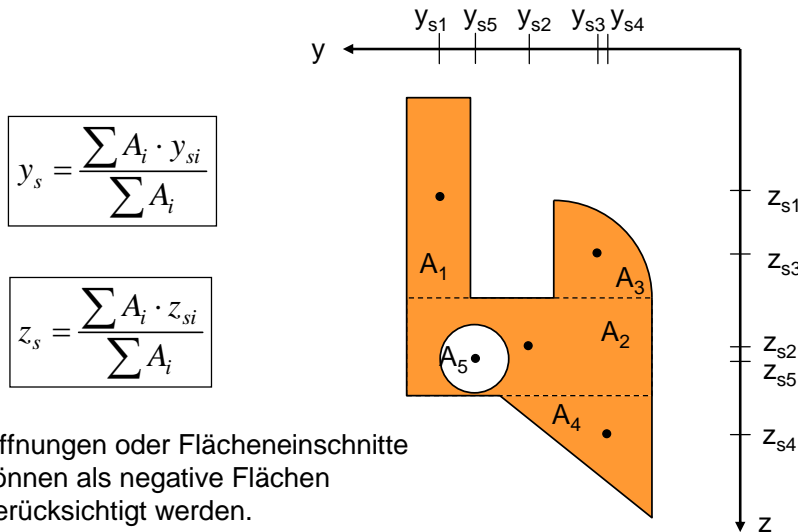


Bild 4-7 Schwerpunkt zusammengesetzter Flächen

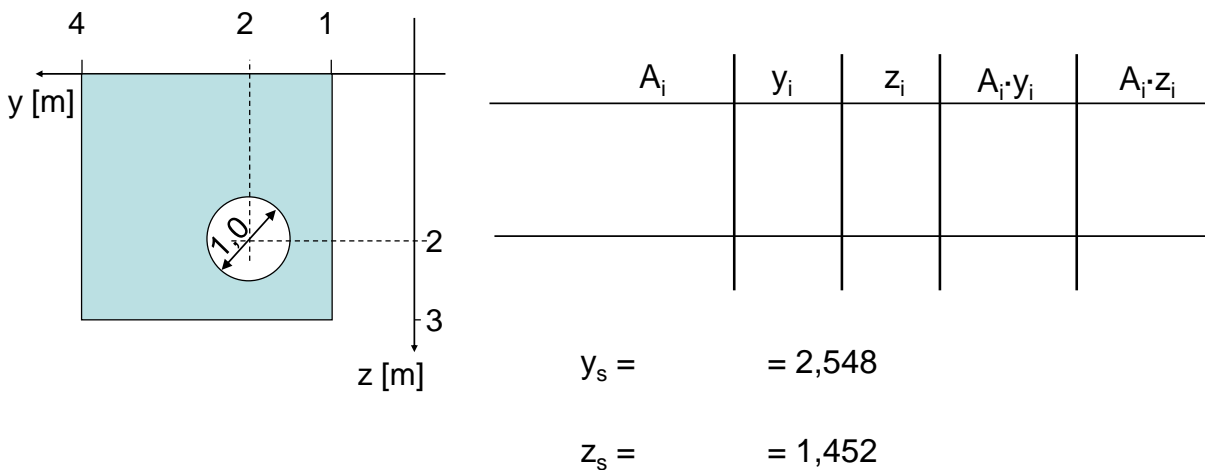
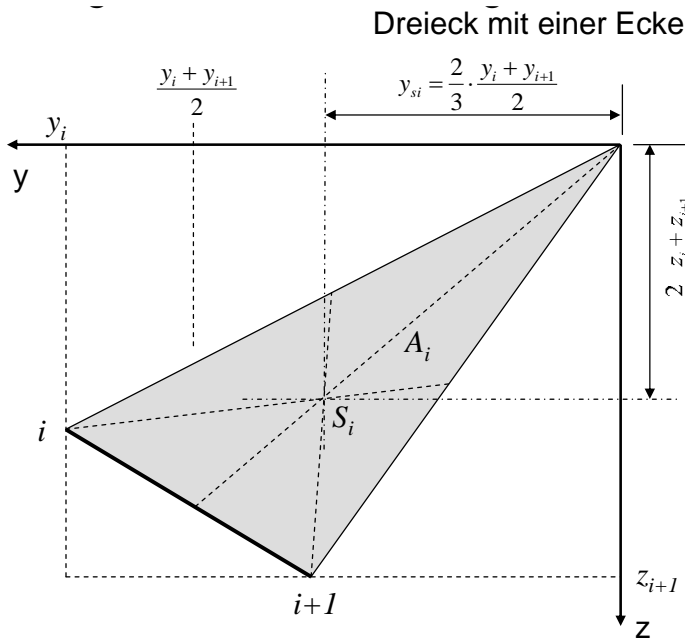


Bild 4-8 Beispiel einer tabellarischen Schwerpunktsermittlung einer Fläche mit Loch

Für unregelmäßige Flächen, die polygonzugartig umschrieben werden können, gibt es einen Berechnungsalgorithmus nach [4], der auf einem Dreieck mit einer Spitze im Ursprung eines Koordinatensystems beruht (Bild 4-9). Die Grundidee ist auch als Gaußsche Trapezformel bekannt. Jede polygonzugartig umrandete Fläche kann nun aus lauter Ursprungs-dreiecken zusammenaddiert werden. So ergibt sich auch der Schwerpunkt. Für die Berechnung müssen die Polygonpunkte gegen den Urzeigersinn durchnummeriert werden, der erste Punkt erhält zusätzlich auch die letzte Nummer (Bild 4-10). Bei Öffnungen in der Fläche muss gemäß Bild 4-11 verfahren werden. Die Punkte der Öffnung sind mit dem Urzeigersinn zu nummerieren.



Die Fläche des Dreiecks  $0, P_i, P_{i+1}$  ergibt sich aus der Fläche des Rechtecks  $y_i \cdot z_{i+1}$  abzüglich der äußeren Dreiecke:

$$A_i = \frac{1}{2} \cdot (y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)$$

Die Herleitung mit dem Vektorprodukt (Kreuzprodukt) wäre wesentlich eleganter!

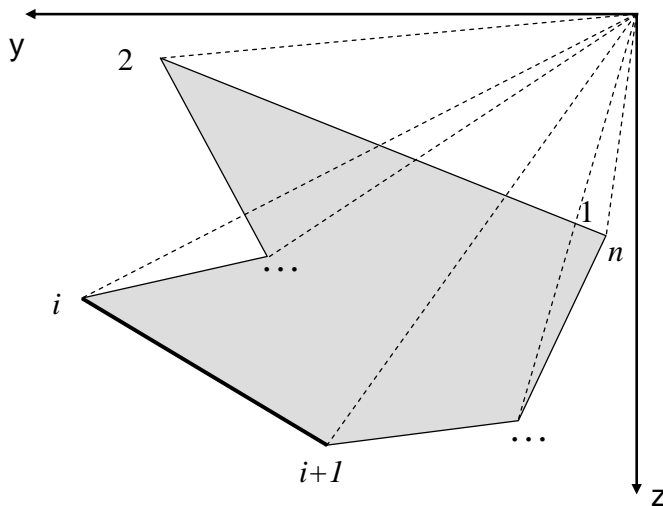
Wenn  $P_i$  und  $P_{i+1}$  gegen den Uhrzeigersinn in Bezug auf den Ursprung aufeinander folgen, dann erhält man einen positiven Flächenwert, im Uhrzeigersinn einen negativen Flächenwert.

Die Schwerpunktkoordinaten des Dreiecks lauten:

$$y_{si} = \frac{1}{3} \cdot (y_i + y_{i+1}) \quad z_{si} = \frac{1}{3} \cdot (z_i + z_{i+1})$$

Bild 4-9 Schwerpunkt eines „Ursprungsdreieckes“

Polygonfläche zusammengesetzt aus Ursprungsdreiecken



Jede beliebige polygonzugartige Figur lässt sich aus „Ursprungsdreiecken“ zusammensetzen; damit kann ihre Fläche und ihr Flächenschwerpunkt berechnet werden:

$$A = \sum_1^{n-1} A_i$$

$$y_s = \frac{\sum_1^{n-1} \overbrace{A_i \cdot \frac{1}{3}(y_i + y_{i+1})}^{S_{zi}}}{A}$$

$$z_s = \frac{\sum_1^{n-1} \overbrace{A_i \cdot \frac{1}{3}(z_i + z_{i+1})}^{S_{yi}}}{A}$$

Die Formeln können später zur Ermittlung des Flächenträgheitsmoments eines Balkenquerschnittes ergänzt werden.

Bild 4-10 Schwerpunkt einer polygonzugartig umrandeten Fläche

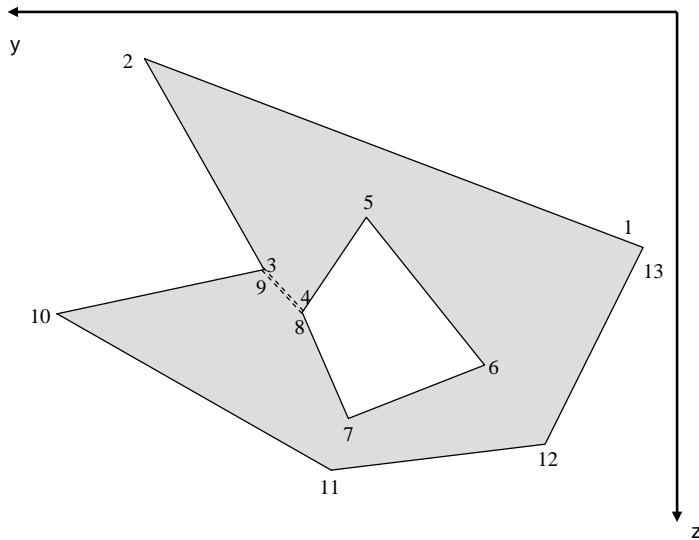


Bild 4-11 Berücksichtigung beliebig vieler „Löcher“ in der Fläche möglich

#### 4.4 Größe und Schwerpunktlage von Streckenlasten

Bisher haben wir nur Einzelkräfte als Belastung auf Bauteile betrachtet. Streng genommen gibt es in der Realität keine Einzellasten im Sinne einer Punktlast. In der gebauten Realität gibt es überwiegend nur Volumenkörper, die aufgrund ihrer Dichte und Masse eine Belastung darstellen. Auch Schneelasten ergeben sich letztendlich als Volumenlast, auch wenn der Schnee ganz offensichtlich eine flächige Belastung darstellt. Eine tatsächliche Flächenlast ist z. B. die Windlast, die auf Fassaden- oder Dachflächen wirkt.

Da wir im Bauwesen sehr viele ebene Systeme haben, werden Volumenlasten immer auf Flächen- oder Streckenlasten umgerechnet. Einfaches Beispiel: der Schnee auf einem Flachdach belastet die Dachfläche je nach Region mit unterschiedlicher Intensität, in Berlin z. B. mit  $0,75 \text{ kN/m}^2$ . Man ermittelt also die Belastung, die auf einen Quadratmeter der Fläche wirkt. Auch das Eigengewicht des Daches wird aus den Volumenlasten in eine Flächenlast umgerechnet:

$$\text{Volumenlast [kN/m}^3\text{]} \times \text{Dicke [m]} = \text{Flächenlast [kN/m}^2\text{]}.$$

Auf stabförmige Bauteile, wie z. B. Balken, können wir keine Flächenlasten ansetzen. Wir müssen uns überlegen, auf welcher Breite der belastenden Fläche die Last auf den betrachteten Balken wirkt. Werden Flächenlasten mit der „Lasteinflussbreite“ multipliziert, dann erhalten wir eine Streckenlast in  $\text{kN/m}$ . Streckenlasten können gleichmäßig verteilt sein, dann nennen wir sie „Gleichstreckenlasten“ oder „Gleichlasten“ (Bild 4-12), bei z. B. trapezförmiger Verteilung entsprechend „Trapezlasten“.



Bild 4-12 Streckenlasten für balkenförmige Tragwerke

Wenn z. B. die Auflagerkräfte der beiden in Bild 4-12 dargestellten Balken berechnet werden sollen, dann müssen wir die gesamte Wirkung der Streckenlasten (die Resultierende) und ihren Schwerpunkt ermitteln.

Für die Resultierende einer Gleichlast wird der Wert der Streckenlast mit der Lastwirkungslänge multipliziert. Der Schwerpunkt einer Gleichlast liegt selbstverständlich in der Mitte.

Für andere Streckenlasten muss die Resultierende und die Schwerpunktslage entsprechend ermittelt werden. Bei der Trapezlast kann man sich das Trapez z. B. aus einer Gleichlast und einer Dreieckslast zusammengesetzt denken. Alternativ kann man ein Trapez auch aus zwei Dreiecken bilden.



## **5 Tragwerke, Idealisierung und Berechnung**

### **5.1 Unterscheidung Bauwerke, Bauteile, Tragwerke, Tragwerkselemente**

Nennen Sie verschiedene Bauwerke

Geben Sie Bauteile an:

Welche Tragwerke kennen Sie

Unter Tragwerkselementen verstehen wir:

### **5.2 Idealisierungen des Tragwerks für die statische Berechnung**

Eine exakte Berechnung der realen Tragwerke kann nicht angestellt werden, wir können die Realität nur mit mehr oder weniger realistischen Modellen abbilden, die wir als Grundlage für eine vereinfachte Berechnung zugrunde legen. Es können sehr grobe oder sehr feine Modelle entwickelt werden, mit denen die realen Tragwerke stark vereinfacht oder relativ gut angenähert werden. Bei dieser Modellbildung werden folgende grundlegende Vereinfachungen angenommen, um den Berechnungsaufwand angemessen einzuschränken.

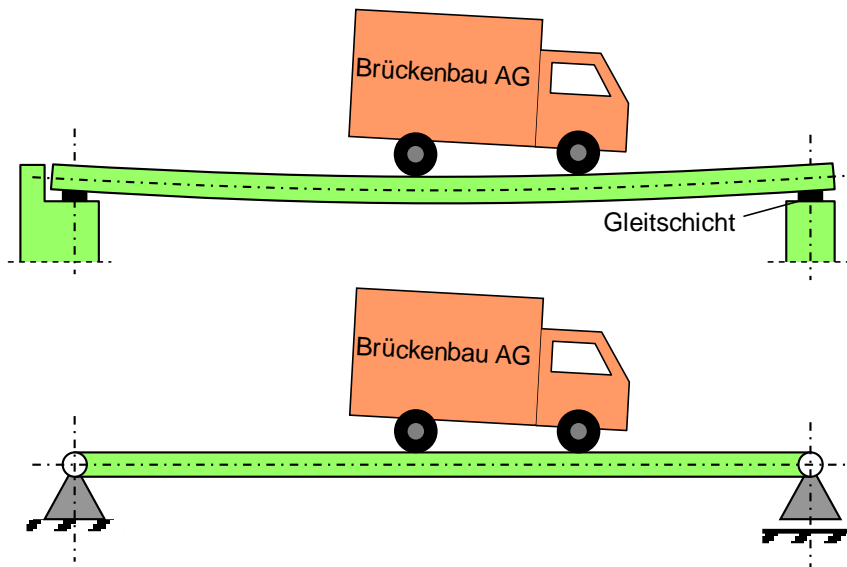


Bild 5-1 Idealisierungen bei der Modellbildung

- Punktlasten (Einzelkräfte) anstelle Teilflächenpressungen
- Verformungen bleiben klein, daher Betrachtung des unverformten Systems bzw. des starren Körpers
- Lager mit geringem Drehwiderstand werden als ideal gelenkig angenommen
- Die Balkendicke ist klein gegenüber der Balkenlänge, daher wird der Kraftangriff und die Lage der Gelenke in der Balkenachse angenommen
- Ein geringer notwendiger Balkenüberstand am Auflager wird vernachlässigt

Wir werden später noch viele weitere solcher üblichen Vereinfachungen kennenlernen.

### 5.3 Freischneiden von Systemkomponenten

Wir haben bereits in vorhergehenden Abschnitten gelernt, dass komplexere Systeme zur Sichtbarmachung und Berechnung von Kräften und ggf. Momenten in Teilsysteme zerlegt werden müssen. Wir wollen uns dieses Freischneiden in Verbindung mit dem Prinzip von „actio est reactio“ (3. Newton'sche Axiom) noch einmal ausführlich betrachten:

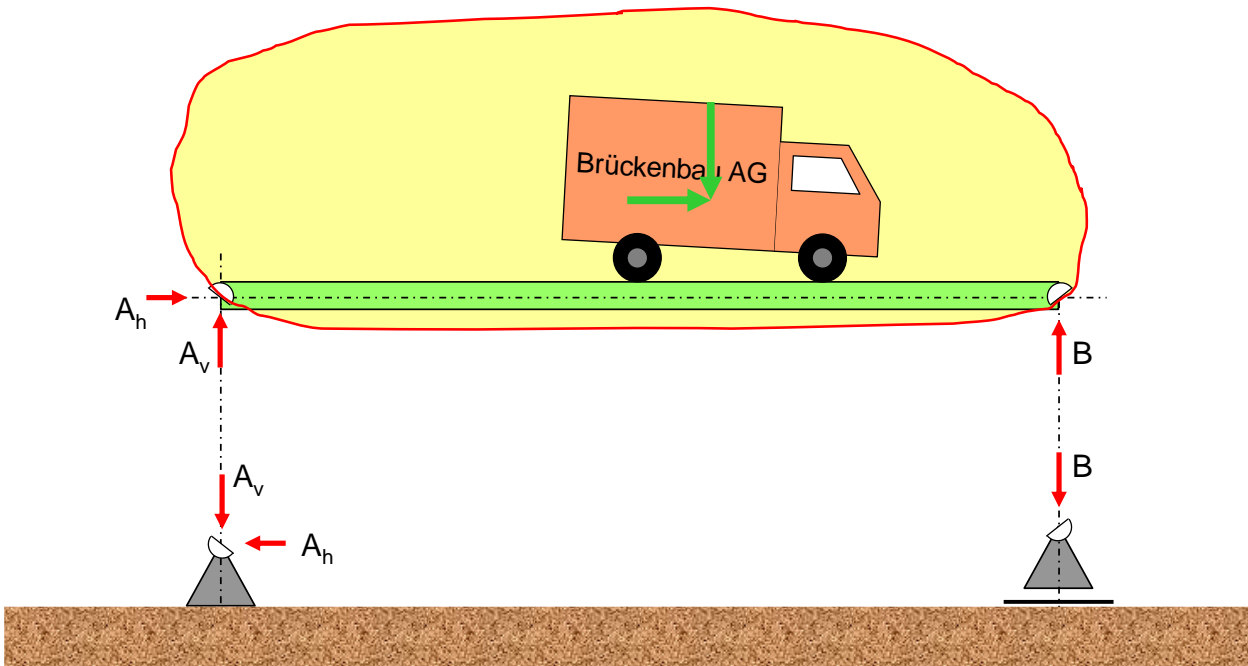


Bild 5-2 Freischnitt zur Berechnung der Auflagerkräfte

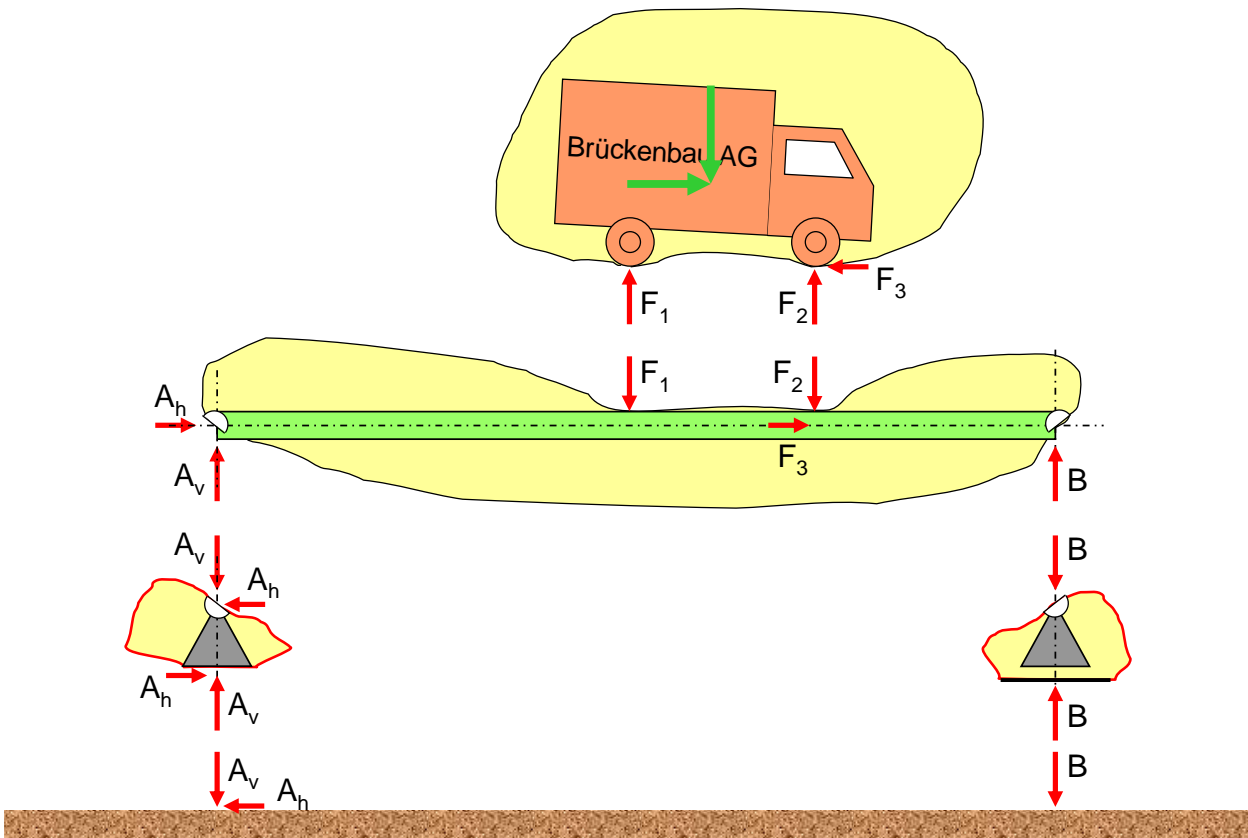


Bild 5-3 Freischnitt zur Berechnung weiterer Kontaktkräfte

Bisher haben wir nur starre Körper (starre Systeme) betrachtet. Das bedeutete, dass die Verformungen der Körper bei der Berechnung unberücksichtigt geblieben sind. Aus der Erfahrung wissen wir, dass sich Tragwerke infolge von Einwirkungen verformen. Das Tragwerk aktiviert einen Widerstand gegen die Verformung. Wenn man einen (Stab) Balken verbiegt, spürt man den inneren Widerstand des

Bauteils gegen die Verformung. Je stärker ein Balken gekrümmt wird, um so stärker wird das Material beansprucht.

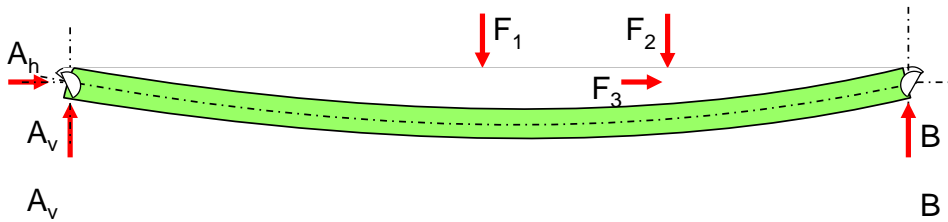


Bild 5-4 Die Einwirkungen auf ein Tragwerkes erzeugen Verformungen

Infolge von Verformungen können bei biegeweichen Bauteilen, die in Achsrichtung zusätzlich durch Druckkräfte beansprucht werden, weitere Verformungen entstehen, die zum Ausknicken des Bauteils, z.B. einer Stütze führen können. Dieser Effekt einer Druckkraft an einem verformten Bauteil wird später unter dem Stichwort Stabilitätsversagen untersucht und soll im weiteren erst einmal unberücksichtigt bleiben. Unsere folgenden Betrachtungen beziehen sich also auf biegesteife Systeme, die sich nur geringfügig verformen.

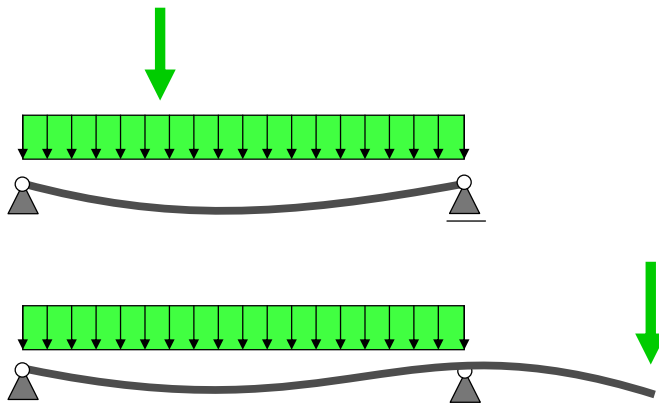


Bild 5-5

Aus den zwei verformten Balken in Bild 5-5 ergeben sich folgende Fragen:

- Wie groß ist die betragsmäßig größte pos. und/oder neg. Krümmung?
- An welchen Stellen im Tragwerk treten die maximalen Beanspruchungen des Materials auf?
- Wie muss der Balken ausgebildet werden, um den Beanspruchungen zu widerstehen? Welche Versagensarten(-mechanismen) gibt es?
- Welche max. Verformungen treten auf?

#### 5.4 Einführung in die Festigkeitslehre (entfällt leider seit einigen Semestern)

Die Festigkeitslehre ist ein umfangreiches Thema und wird in Abschnitt 9 behandelt. Um einen Teil der gerade aufgeworfenen Fragen zu beantworten und um den folgenden Abschnitt 6 zu beginnen, ist eine kurzer Vorgriff auf den Abschnitt **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** an dieser Stelle erforderlich.

Der Name Festigkeitslehre gibt schon Auskunft darüber, worum es bei diesem Thema geht. Durch äußere Einwirkungen entstehen im Inneren von Bauteilen Beanspruchungen, die das verwendete Material bis zu seiner Festigkeit aushalten muss. Es gibt unterschiedliche Beanspruchungen im Inneren, wir wollen uns bei dieser Einführung in das Thema nur kurz mit der Problematik Zug/Druck sowie Biegung beschäftigen.

Wenn man einen Versuchskörper in einem Zug- oder Druckversuch beobachtet (Bild 5-6 und Bild 5-7), stellt man einen Zusammenhang zwischen Belastung (der aufgetragenen Kraft) und Verformung (Verlängerung/Verkürzung) fest. In solchen Versuchen haben die Versuchskörper nicht immer die gleiche Länge und gleichen Querschnitt. Aussagen zum Materialverhalten wollen wir aber unabhängig von der Form des Versuchskörpers haben.

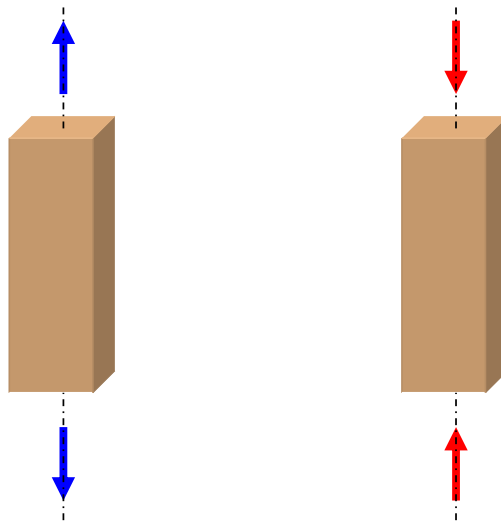


Bild 5-6 Versuchskörper unter Zug- und Druckbeanspruchung

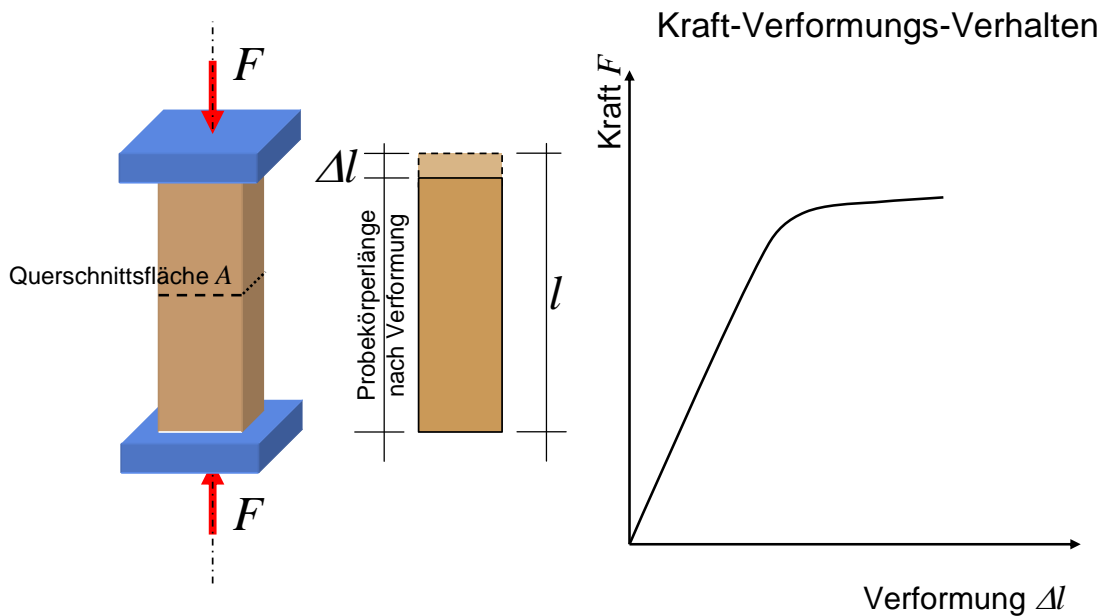


Bild 5-7 Kraft-Verformungs-Verhalten eines Versuchskörpers

Eine von der Länge unabhängige Größe ist die Dehnung, eine von der Querschnittsform unabhängige Größe ist die Spannung. Für das Materialverhalten ist also vielmehr das Spannungs-Dehnungs-Verhalten (Bild 5-8) von Interesse, das man aus dem Kraft-Verformungs-Verhalten eines Versuchskörpers ermitteln kann.

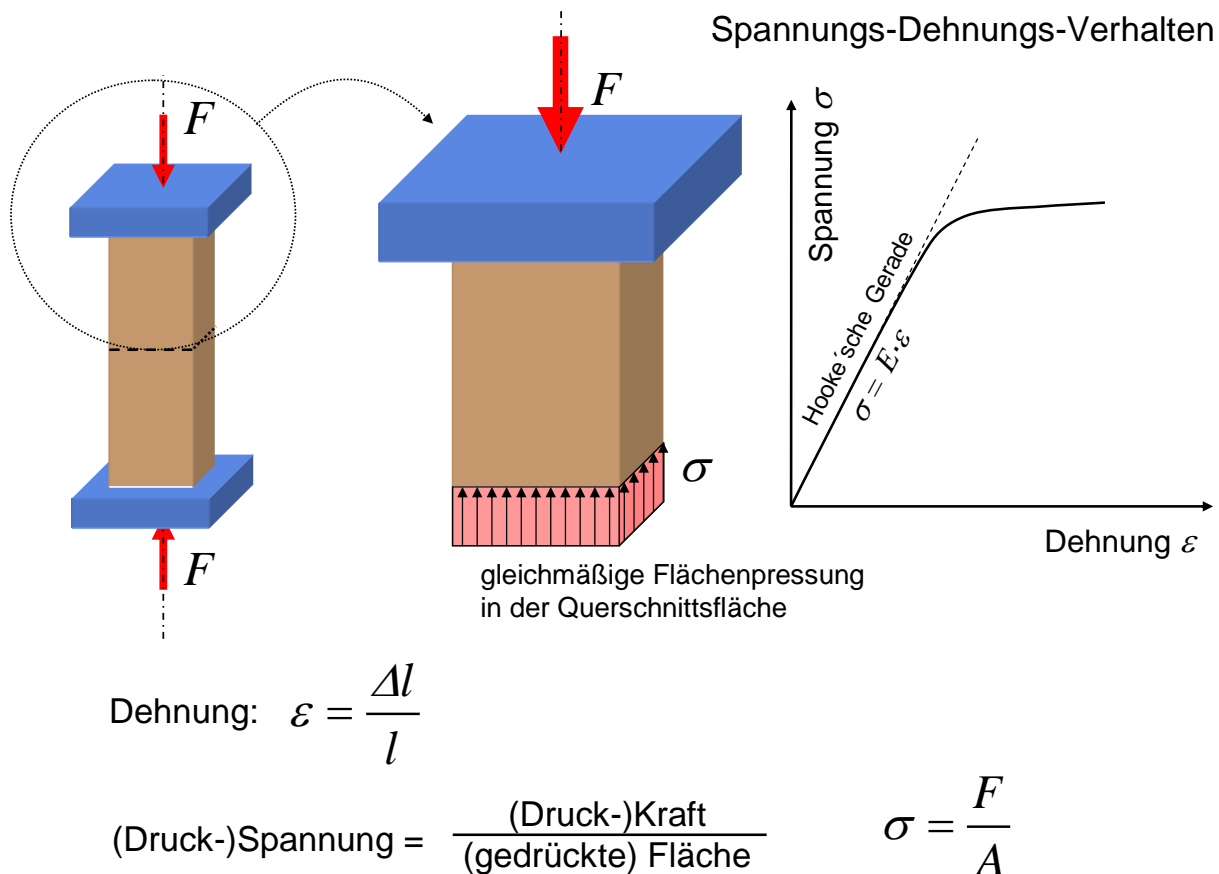


Bild 5-8 Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines Versuchskörpers

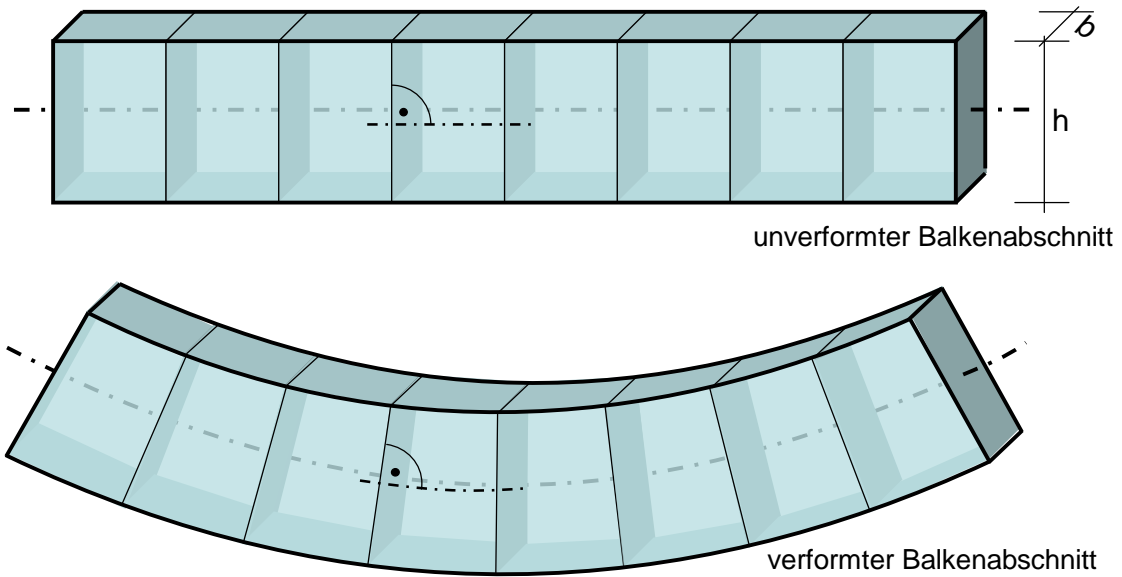
Zwischen Spannung und Dehnung besteht bei geringer Beanspruchung für viele Materialien ein linearer Zusammenhang. Erst bei höherer Beanspruchung weicht das Verhalten von dem linearen Verhalten ab. Da bereits Hooke den Vorteil von linearen Funktionen bei der Berechnung von Bauteilbeanspruchungen erkannte, formulierte er den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung linear:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (5-1)$$

Wir nennen dieses lineare Materialgesetz auch Hooke'sches Gesetz, es beschreibt das tatsächliche Verhalten nur näherungsweise, je geringer die Beanspruchung, umso geringer ist die Abweichung.  $E$  ist eine Materialkonstante und wird Elastizitätsmodul genannt.

Wir wollen uns nun dem Biegeproblem zuwenden und dafür zunächst einen Balken vor und nach einer Biegebeanspruchung beobachten, wie es bereits Bernoulli machte. Seine Beobachtung formulierte er als Hypothese.

Grundlage der Balkenbiegung ist die **Hypothese von Bernoulli**



„Querschnitte bleiben auch nach der Verformung eben und senkrecht zur verformten Balkenachse“

Bild 5-9 Hypothese von Bernoulli

Aus der Kreisberechnung ergibt sich:  
 Bogenlänge = Winkel im Bogenmaß · Radius  $\Delta x = \Delta\hat{\varphi} \cdot R$   
 Krümmung = Kehrwert des Radius  $\kappa = \frac{1}{R}$

Dehnung  
 allg.:  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Randdehnung:

$$\varepsilon_{rand} = \frac{\Delta l_{rand}}{l} = \frac{\Delta\hat{\varphi} \cdot (R + z_{rand}) - \Delta\hat{\varphi} \cdot R}{\Delta\hat{\varphi} \cdot R}$$

$$\varepsilon_{rand} = \frac{1}{R} \cdot z_{Rand} = \kappa \cdot z_{rand}$$

Bild 5-10 Randdehnungen an einem Balkenabschnitt

Aufbauend auf dieser Hypothese kann man nun für einen herausgetrennten Balkenabschnitt seine Verformung analysieren, um sich daraus die innere Beanspruchung des Balkens abzuleiten (Bild 5-10). Gedanklich ist es hilfreich, sich den Balkenabschnitt in einzelne Schichten (Lamellen) zu unterteilen (Bild 5-11). Die unteren Lamellen werden verlängert bzw. gedehnt, die oberen werden verkürzt bzw. gestaucht (negativ gedehnt). Die neutrale Faser bleibt unverformt.

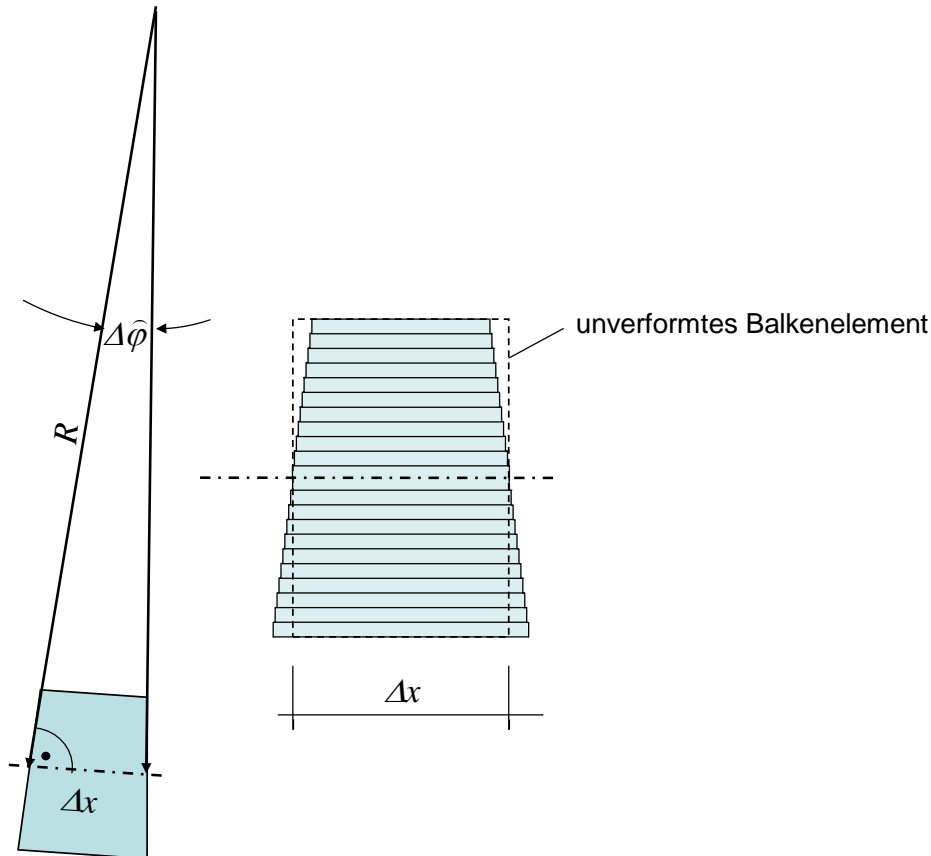
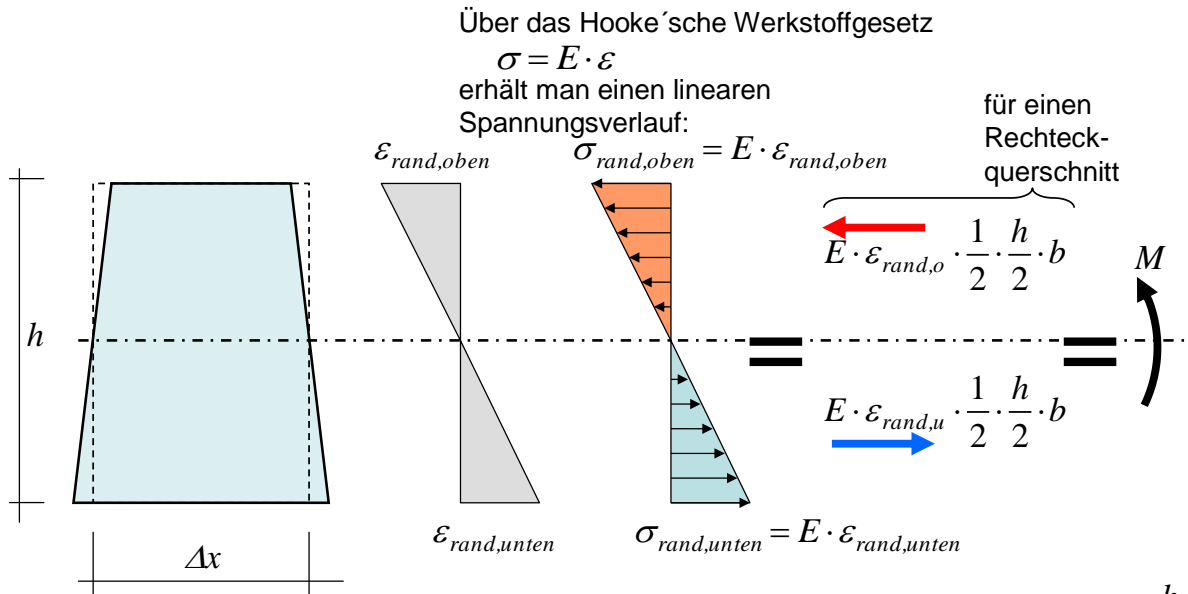


Bild 5-11 linearer Verlauf der Dehnungen über die Höhe des Balkens

Jede einzelne Lamelle kann wie ein schmaler, auf Zug oder Druck beanspruchter Stab betrachtet werden. Die stärker beanspruchten Lamellen erhalten eine größere Dehnung bzw. Stauchung. Damit ergibt sich eine über die Höhe unterschiedlich verteilte Dehnung. Bei sehr geringer Lamellenhöhe wird der Verlauf der Dehnungen über die Höhe linear sein.

Aus dem linearen Dehnungsverlauf ergibt sich mit dem Hooke'schen Gesetz ein linearer Spannungsverlauf (Bild 5-12). Die Spannungskörper können in ihrer Wirkung durch resultierende Kräfte ersetzt werden. Das innere Kräftepaar ergibt ein Biegemoment, welches ursächlich für die Verbiegung des Balkens verantwortlich ist.





Für einen doppelt symmetrischen Rechteckquerschnitt gilt:  $\varepsilon_{rand,o} = \varepsilon_{rand,u} = \kappa \cdot z_{rand} = \kappa \cdot \frac{h}{2}$   
 Damit ergibt sich das Moment:

$$M = 2 \cdot E \cdot \kappa \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} \right) = E \cdot \kappa \cdot b \cdot \frac{h^3}{12}$$

$I$ : Flächenträgheitsmoment eines Rechteckquerschnittes

Bild 5-12 aus den inneren Spannungen ergibt sich ein Biegemoment

Schlussfolgerungen zu

$$M = E \cdot \kappa \cdot I \quad \text{bzw.} \quad \kappa = \frac{M}{E \cdot I} \quad (5-2)$$

- Bei der (Ver-)krümmung eines Balkens entsteht ein inneres Biegemoment
- Bei einem Hooke'schen Material (linear-elastisch) wächst mit der Zunahme der Krümmung das Biegemoment linear und umgekehrt.
- Je größer der Elastizitätsmodul (Materialkonstante), desto kleiner die (Ver-)krümmung.
- Je größer das Flächenträgheitsmoment (Kenngröße der Querschnittsform), desto kleiner die (Ver-)krümmung.
- Bei Überschreitung einer Grenzdehnung, einer Grenzspannung (Festigkeit) oder eines Grenzbiegemomentes tritt ein Biegebruch auf.

Es ergeben sich z. B. folgende Fragen:

- Gibt es neben dem Biegemoment weitere Beanspruchungen im Inneren eines Balkens? Wie können diese sichtbar gemacht werden? (F1)
- Welche Verformungen treten auf und in welcher Größe sind sie dem Tragwerk und seinen Nutzern zumutbar? (F2)
- Welchen Einfluss hat die Trägerquerschnittsform? (F3)
- Welche Sicherheiten gibt es gegen das Versagen (Bruch)? (F4)

## 6 Schnittgrößen und Verformungen

In den folgenden Abschnitten werden zunächst die Schnittgrößen behandelt, beschränkt auf ebene Systeme bzw. Tragwerke, die aus stabförmigen Bauteilen bestehen.

### 6.1 Schnittgrößen von ebenen, stabförmigen Tragwerken

Aus den Überlegungen des verformten Balkens haben wir festgestellt, dass im Inneren eines Balkens ein **Biegemoment**  $M$  (bending **M**oment) wirksam ist. Trennt man einen Balken an einer beliebigen Stelle in zwei Teilabschnitte auf, dann müssen neben dem Biegemoment noch zwei Kräfte an jedem „**Schnittufer**“ wirksam sein, damit jeder Teilabschnitt für sich als Freikörper im Gleichgewicht steht. Diese Kräfte bezeichnen wir als **Querkraft**  $V$  (vertical **F**orce) und **Normalkraft**  $N$  (normal **F**orce). Alle drei Größen werden unter dem Überbegriff „**Schnittgrößen**“ zusammengefasst.

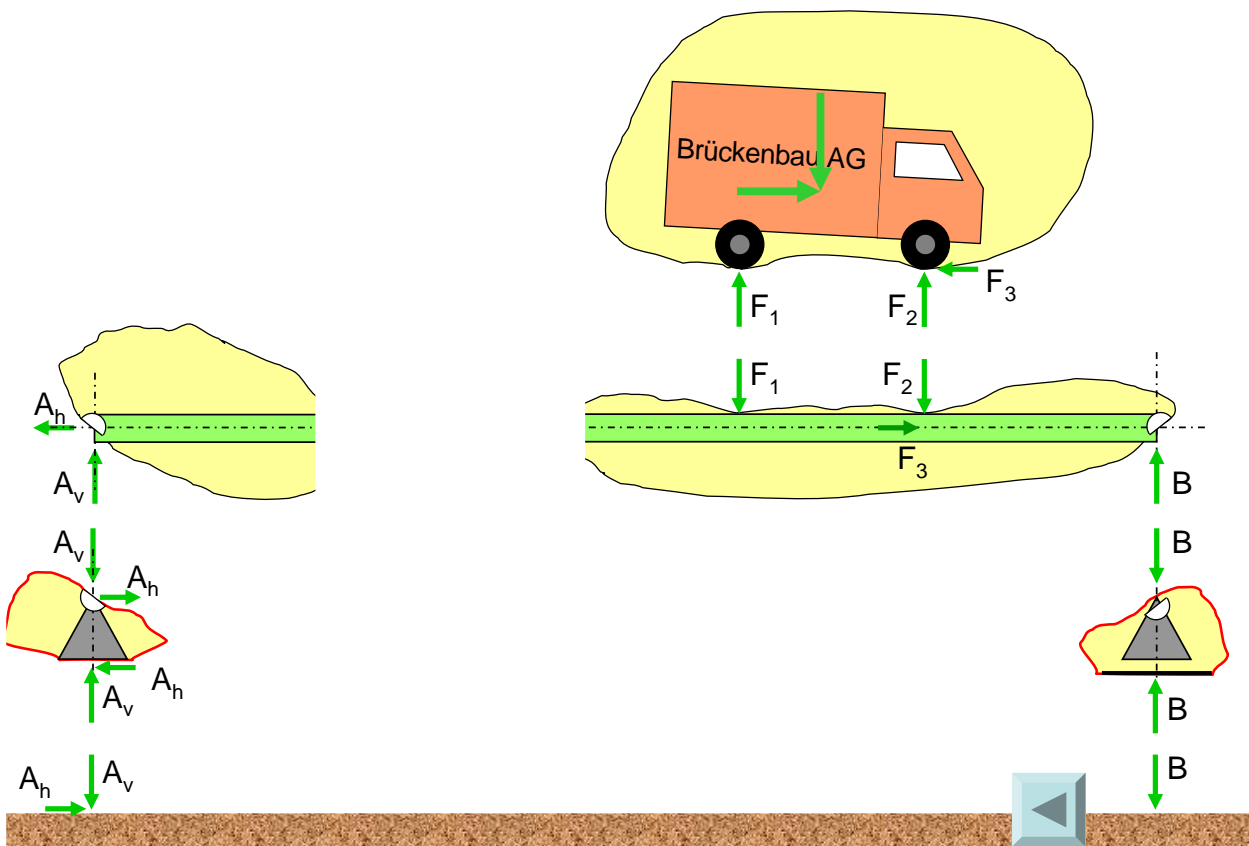


Bild 6-1 Freischneiden des Balkens in zwei Teilabschnitte mit Schnittgrößen an den beiden Schnittufern (bitte nachtragen)

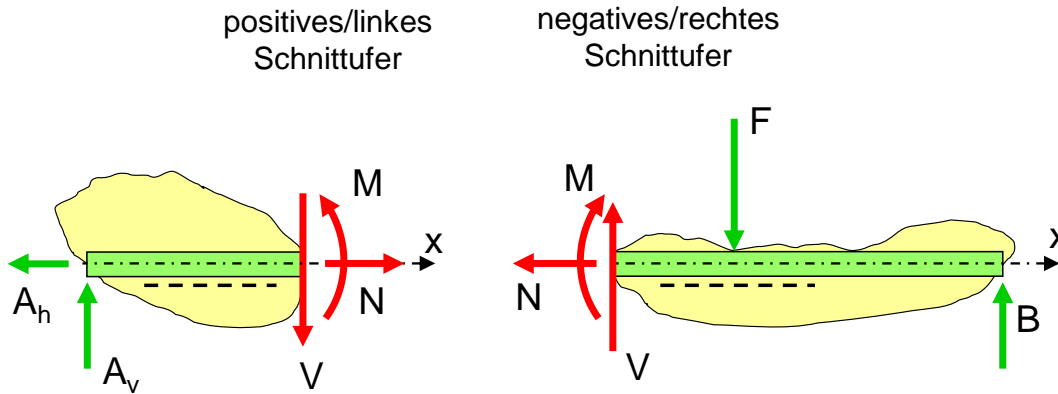
Im Sinne von „**actio est reactio**“ sind die Schnittgrößen an den gegenüberliegenden Schnittufern zueinander entgegengesetzt.

Die positiven Darstellungen der Schnittgrößen sind unbedingt zu beachten. Die positive Definition ist von der Lage der gestrichelten Faser abhängig.

Die Größe der Schnittgrößen sind in der Regel abhängig von der Schnittstelle. Die Balkenachse wird dabei als  $x$ -Achse herangezogen. Wenn die gestrichelte Faser unter dem Balken definiert wird, dann beginnt die  $x$ -Achse links. Jetzt können die Schnittgrößen abhängig von  $x$  mit mathematischen Funktionen beschrieben werden. Dabei müssen Unstetigkeitsstellen beachtet werden.

Die mathematische Beschreibung und die Darstellung der Funktionen ist wichtig, um die Stellen der extremalen Biegemomente, Querkräfte und Normalkräfte zu erkennen. Die Kenntnis der extremalen Schnittgrößen ist für die Dimensionierung der Tragwerke notwendig.

### Vorzeichendefinition Schnittgrößen



**negative** Schnittgrößenwerte machen kenntlich, dass die betreffenden Schnittgrößen in der entgegengesetzten Richtung wirken.

### 6.2 Funktionale Abhängigkeiten zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment

Anhand einiger Beispiele kann man schnell Beziehungen einiger Schnittgrößen zueinander und zur Belastung feststellen. Für die allgemeingültige Verwendung dieser Abhängigkeiten untereinander ist leider eine allgemeine Herleitung (Bild 6-2) unerlässlich.

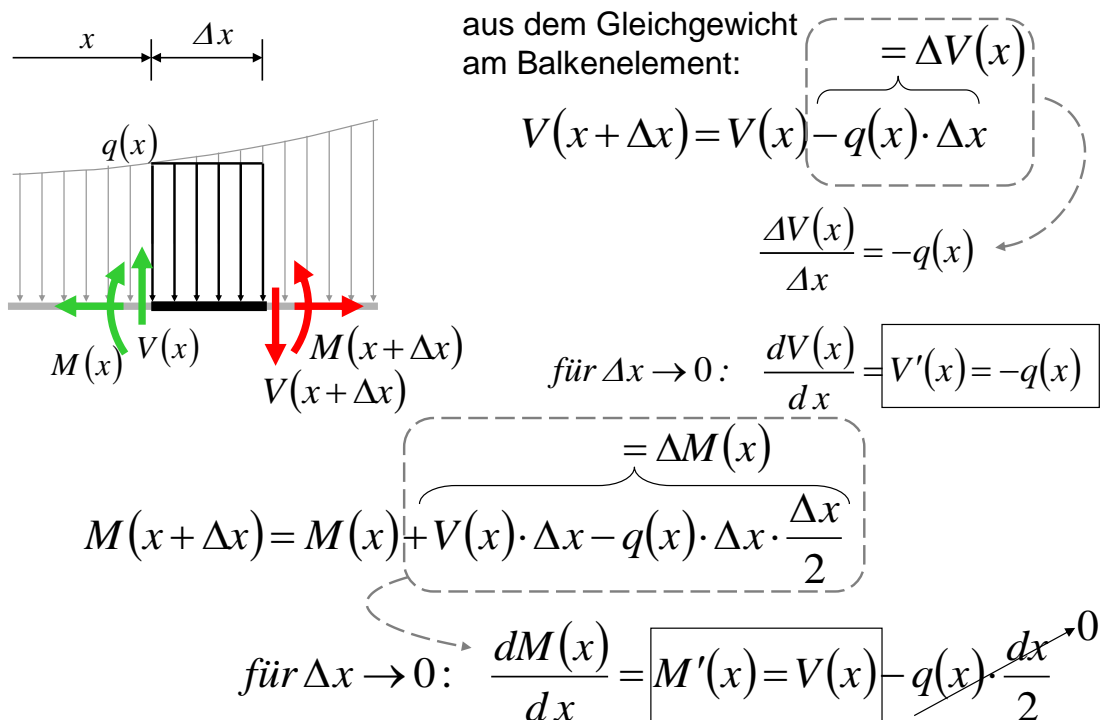


Bild 6-2 Zusammenhang zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment

Diese Abhängigkeiten kann man nutzen, um entweder schneller Schnittgrößen zu berechnen, oder um Schnittgrößenberechnungen auf Plausibilität zu überprüfen. In Bild 6-3 ist am Beispiel einer Gleichstreckenlast erläutert, wie sich Querkraft und Biegemoment vom Abschnittsanfang zum Abschnittsende verändern.

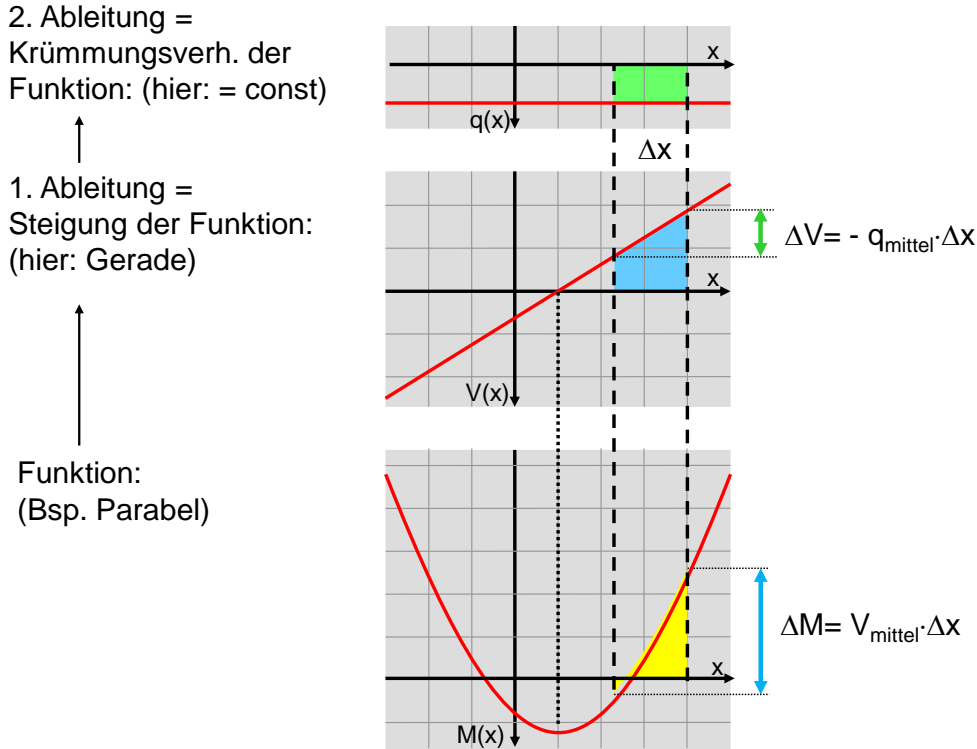


Bild 6-3 Abhängigkeit von Belastung, Querkraft und Biegemoment (bitte Eintragungen ergänzen)

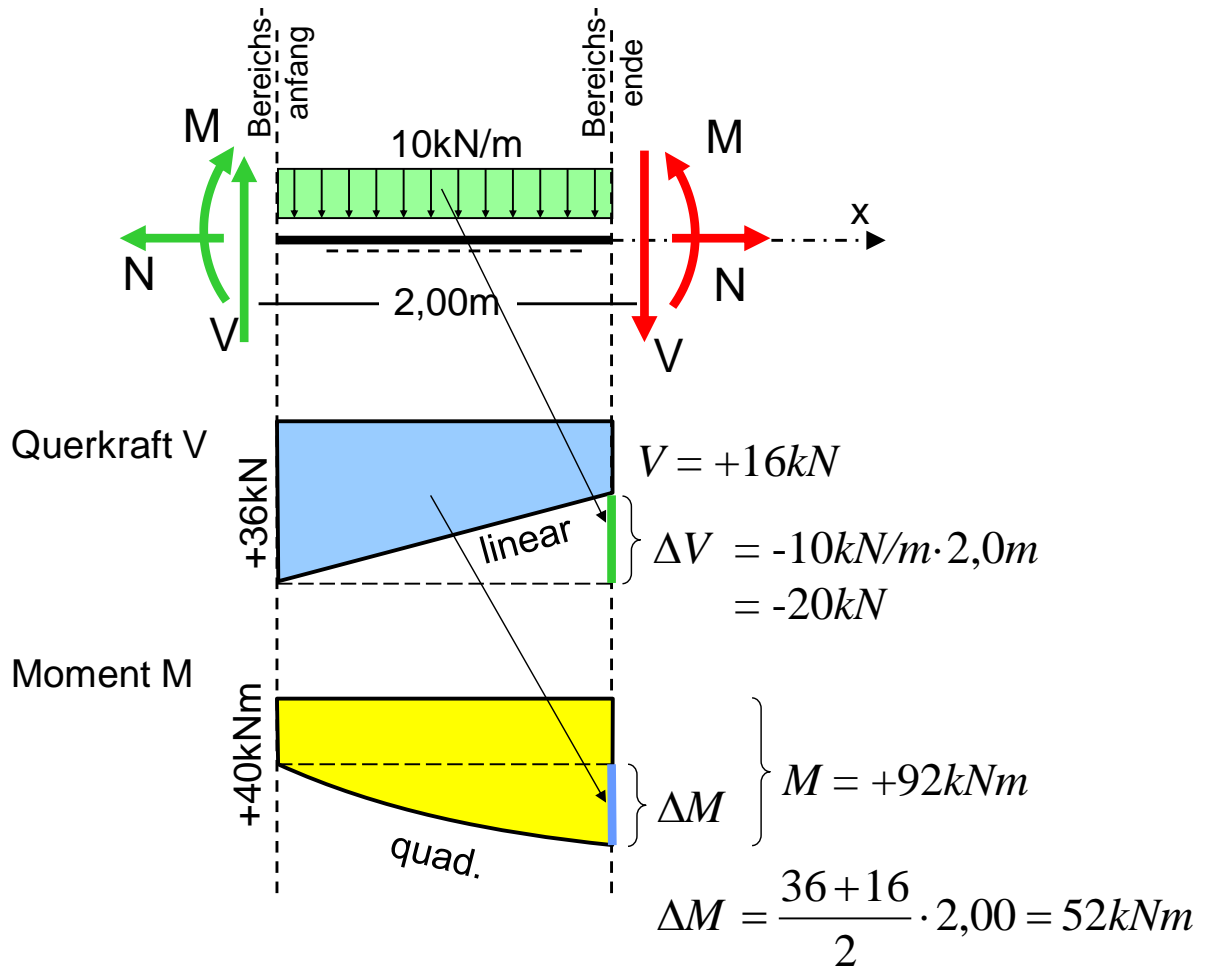
Die nachfolgende Tabelle 6-1 kann als Hilfe bei der Erstellung von Schnittgrößenverläufen genutzt werden.

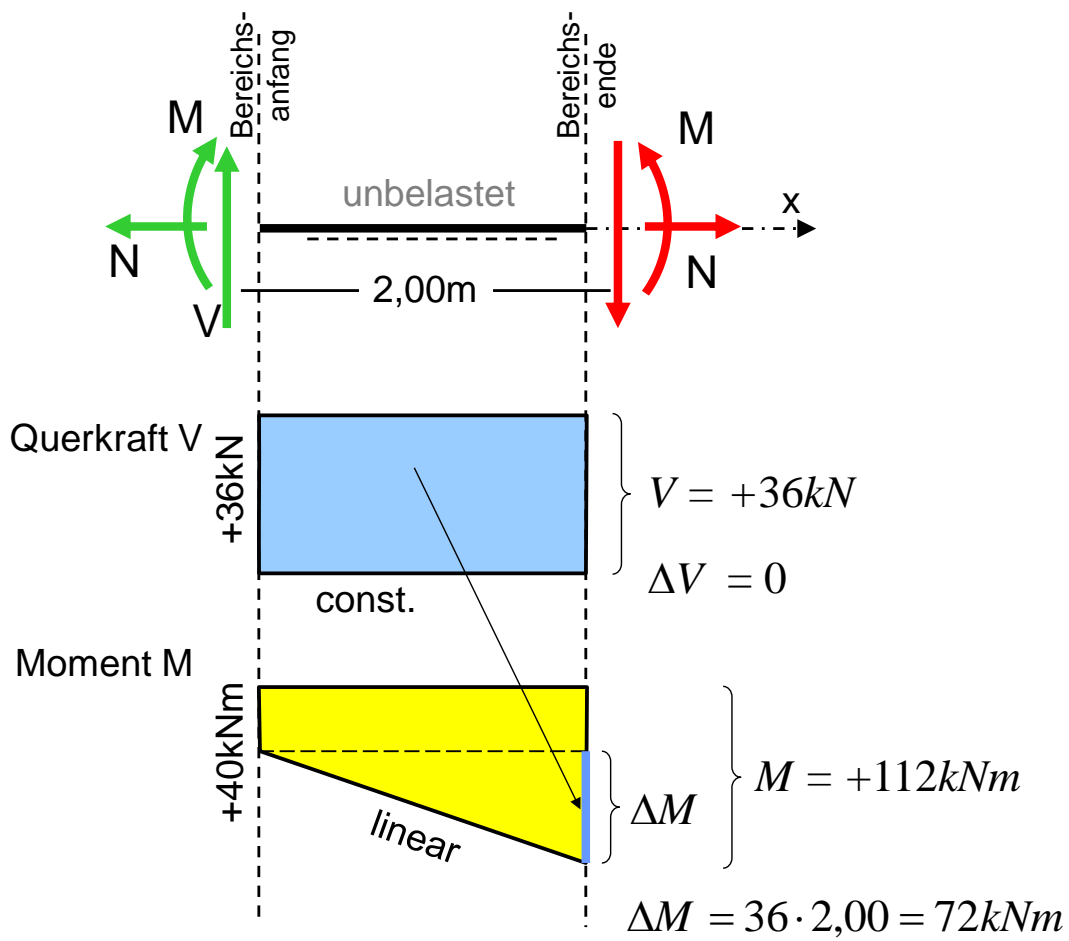
Tabelle 6-1 Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment

	Funktion			
Streckenlast im Balkenabschnitt $q(x) = -V'(x) = -M''(x)$	keine	konstant	linear	sinusförmig
$V(x) = M'(x)$	konstant	linear	quadratisch (Parabel)	cosinusförmig
$M(x)$	linear	quadratisch (Parabel)	kubisch (Parabel)	sinusförmig

	Tendenz / Zu-bzw. Abnahme	
Streckenlast im Balkenabschnitt	$q(x)$ positiv	----
$V(x) = M'(x)$	in x-Richtung abnehmend: $-\Delta V(x) = \text{Belastungsfläche}$	positiv
$M(x)$	neg. gekrümmt	in x-Richtung zunehmend: $\Delta M(x) = \text{Querkraftfläche}$

	Unstetigkeiten / Übergänge		
Einzeleinwirkung im Balkenabschnitt	Einzellast	Sprung in Streckenlast	Einzelmoment
in $V(x)$ -Linie	Sprung	Knick	durchlaufende Funktion
in $M(x)$ -Linie	Knick	tangentialer Übergang, kein Knick	Sprung





Zur besseren Anschauung sind die q-V-M-Beziehungen nochmals anhand von einfachen Beispielen in Bild 6-4 und Bild 6-5 dargestellt.

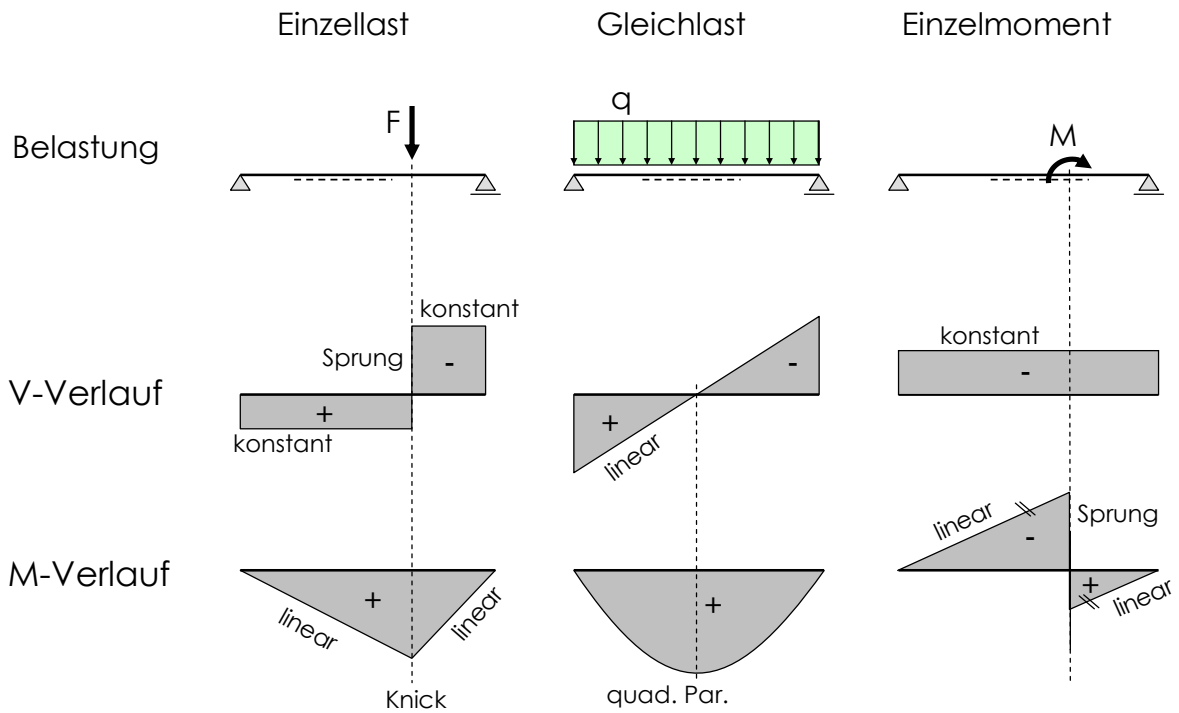


Bild 6-4 q-V-M-Beziehungen beispielhaft

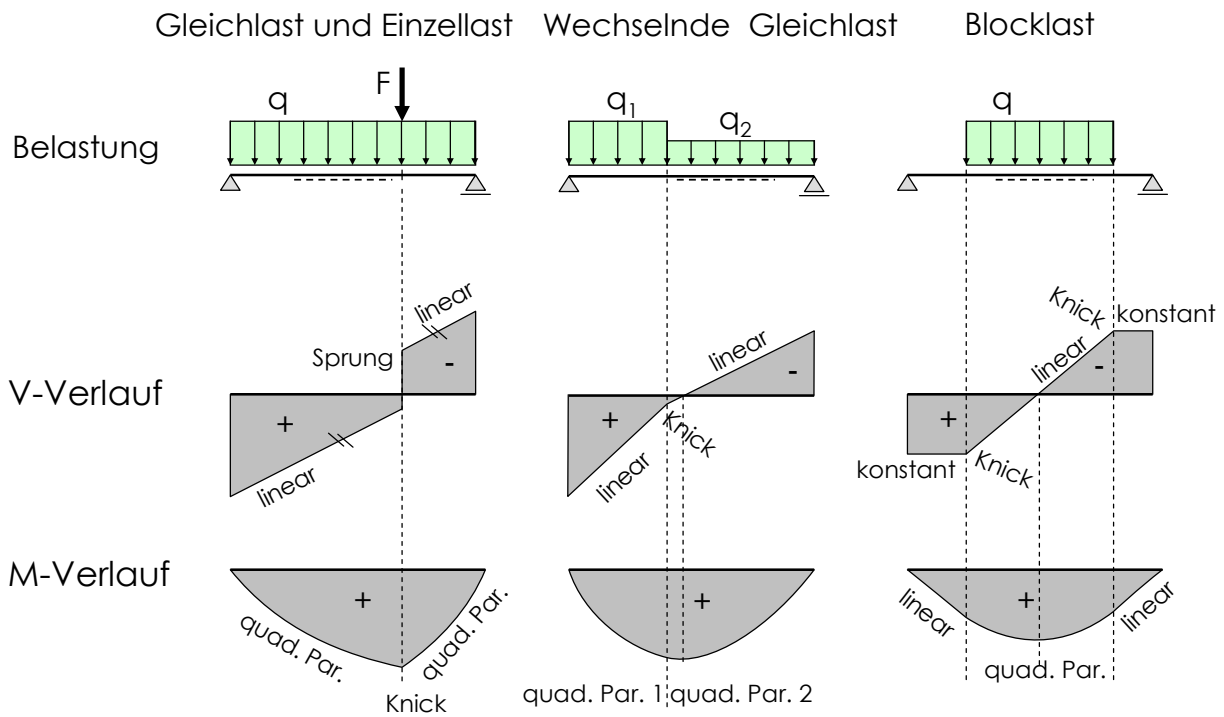


Bild 6-5 q-V-M-Beziehungen beispielhaft

### 6.3 Zusammenhang zwischen Biegemomentenlinie und Biegelinie (Biegefunktion)

Die Krümmung einer beliebigen Funktion kennen wir aus der Mathematik:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{y''(x)}{\left(1 + [y'(x)]^2\right)^{3/2}}$$

Im baupraktischen Bereich kann der Nenner mit 1,0 abgeschätzt werden:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} \approx y''(x)$$

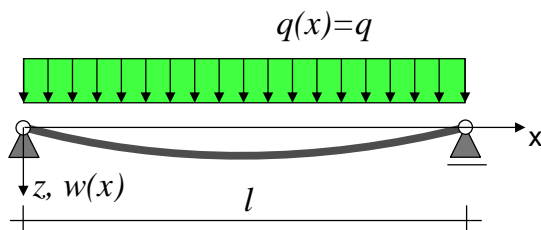
Wir haben festgestellt (s. Einführung zur Festigkeitslehre):

Die Krümmung ist proportional zur Biegemomentenfunktion

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{E \cdot I}$$

Folglich kann die Biegefunktion (Funktion der Verformung, Verlauf der Verformung) nach zweimaliger Integration ermittelt werden. Wegen der vereinfachten Krümmungsbeziehung ist die so ermittelte Biegefunktion auch nur eine Näherungsfunktion, aber eine ausreichend genaue.

Anstelle der Funktion  $y(x)$  wird für die Biegefunktion üblicherweise der Ausdruck  $w(x)$  verwendet.



Bei Beachtung der eingeführten positiven Koordinatenrichtung für  $z$  und  $w$  entsteht für ein positives Moment immer eine negative Krümmung.

$$\Rightarrow \kappa(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$$

Überblick:	$w(x)$	Biegefunktion
	$w'(x) = \varphi(x)$	Tangentenneigung der Biegefunktion
	$w''(x) = \kappa(x)$	Krümmung (näherungsweise)
	$-EI \cdot w''(x) = M(x)$	Biegemoment
	$-EI \cdot w'''(x) = M'(x) = V(x)$	Querkraft
	$-EI \cdot w''''(x) = M''(x) = V'(x) = -q(x)$	neg. Streckenbelastung

Bild 6-6 Überblick über die funktionalen Abhängigkeiten bei der Balkenbiegung

Damit können die bisher bekannten Beziehungen zwischen Belastung Querkraft und Biegemoment nun erweitert werden:



- in Bereichen eines positiven Biegemomentes gibt es eine negative Krümmung der Biegefunktion und umgekehrt
- an einem Momentennulldurchgang gibt es einen Krümmungswechsel (von positiver zu negativer Krümmung bzw. umgekehrt)

### 6.4 Verformungsfunktionen einfacher Systeme

Mit Hilfe der Integralrechnung können die Biegefunktionen aus den Momentenfunktionen ermittelt werden, beispielhaft wird dies für einige Grundfälle ausgeführt.

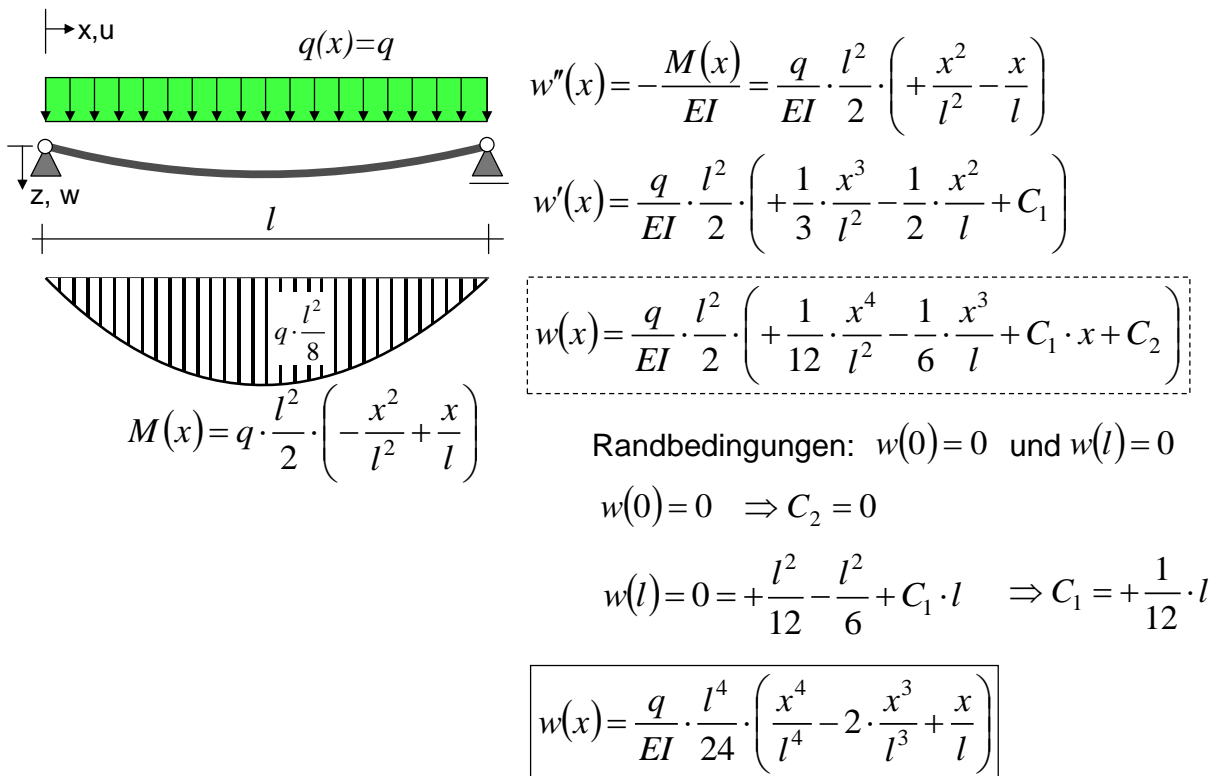
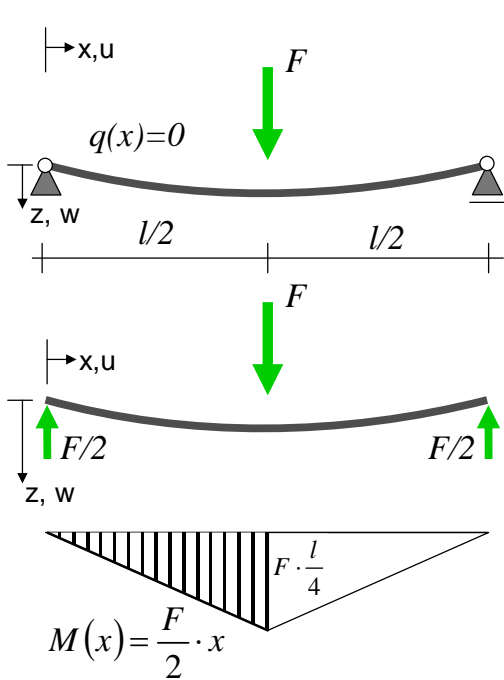


Bild 6-7 Verformungsfunktion des Einfeldträgers unter einer Gleichstreckenlast

## Beispiel Einfeldträger mit Einzellast in Feldmitte



im Bereich  $x \leq \frac{l}{2}$  :

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{F}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(-\frac{x}{l}\right)$$

$$w'(x) = \frac{F}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{l} + C_1\right)$$

$$w(x) = \frac{F}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6} \frac{x^3}{l} + C_1 \cdot x + C_2\right)$$

Randbedingungen:  $w(0) = 0$  und  $w'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

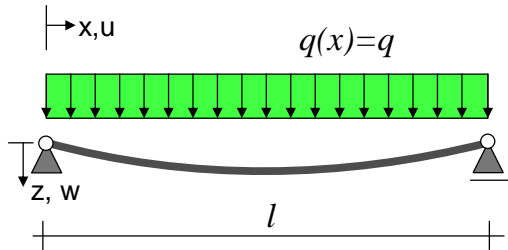
$$w'\left(\frac{l}{2}\right) = 0 = -\frac{l}{2 \cdot 4} + C_1 \Rightarrow C_1 = +\frac{l}{8}$$

$$w(x) = \frac{F}{EI} \cdot \frac{l^3}{48} \cdot \left(-4 \cdot \frac{x^3}{l^3} + 3 \cdot \frac{x}{l}\right) \quad \text{für } x \leq \frac{l}{2}$$

Bild 6-8 Verformungsfunktion des Einfeldträgers unter einer mittigen Einzellast

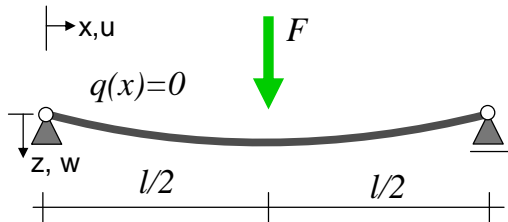
Einen sehr großen Einfluss auf die Durchbiegung hat offensichtlich die Trägerlänge bzw. präziser die Stützweite zwischen den Auflagern. Weiterhin gibt es eine Abhängigkeit von der Belastung  $q$  und von der Biegesteifigkeit  $EI$ . Letztere bildet sich aus dem Produkt des Elastizitätsmoduls, den wir als Materialkennwert kennen gelernt haben, und dem Flächenträgheitsmoment, welches einen charakteristischen Wert für die Querschnittsform darstellt. Hierzu werden wir in Abschnitt **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden**. Näheres erfahren.

**Einfeldträger mit Gleichstreckenlast**



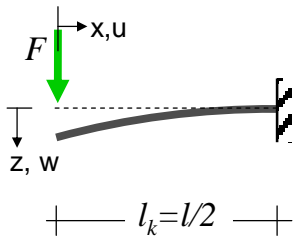
$$w(x) = \frac{q}{EI} \cdot \frac{l^4}{24} \cdot \left( \frac{x^4}{l^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right)$$

**Einfeldträger mit Einzellast in Feldmitte**



$$w(x) = \frac{F}{EI} \cdot \frac{l^3}{48} \cdot \left( -4 \cdot \frac{x^3}{l^3} + 3 \cdot \frac{x}{l} \right) \quad \text{für } x \leq \frac{l}{2}$$

**Kragträger mit Einzellast an der Kragarmspitze**



$$w(x) = \frac{F}{EI} \cdot \frac{l_k^3}{6} \cdot \left( 2 + \frac{x^3}{l_k^3} - 3 \cdot \frac{x}{l_k} \right)$$

Bild 6-9 Verformungsfunktionen dreier Grundfälle im Überblick, Abhängigkeit vom Flächenträgheitsmoment

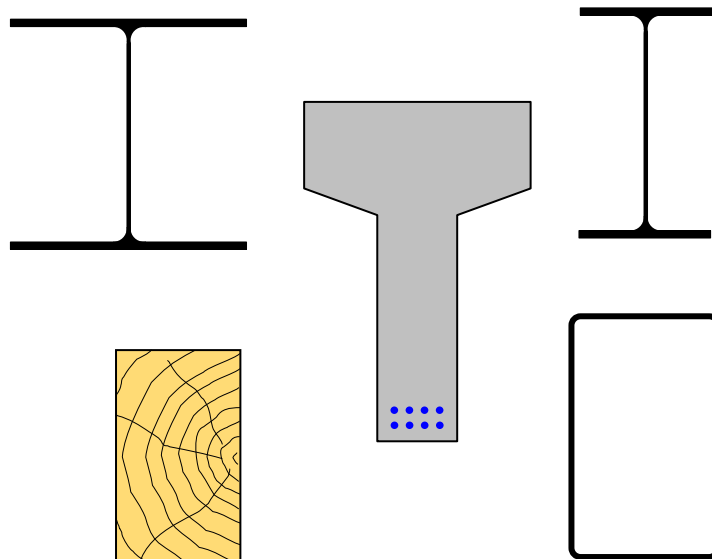


Bild 6-10 Materialspezifische Trägerformen

**6.5 Kurze Einführung in das Sicherheitskonzept**

Am Ende von Abschnitt 5.4 haben wir die Frage gestellt, welche Sicherheit gegen das Versagen eines Bauteils besteht. Wir wollen zunächst einige Überlegungen zu den Schwankungen (Streuungen) der Einwirkungen am Beispiel der Schneelasten anstellen.

An jedem geographischen Ort in unseren Breiten gibt es in jedem Winter einen Größtwert der Schneelast. Dieser kann aus einem einzigen Schneefallereignis oder aus der Schneeanhäufung mehrerer Schneefallereignisse resultieren. Diese Jahresgrößtwerte werden über mehrere Jahrzehnte statistisch erfasst. Daraus könnte sich qualitativ die Häufigkeitsverteilung nach Bild 6-11 ergeben.

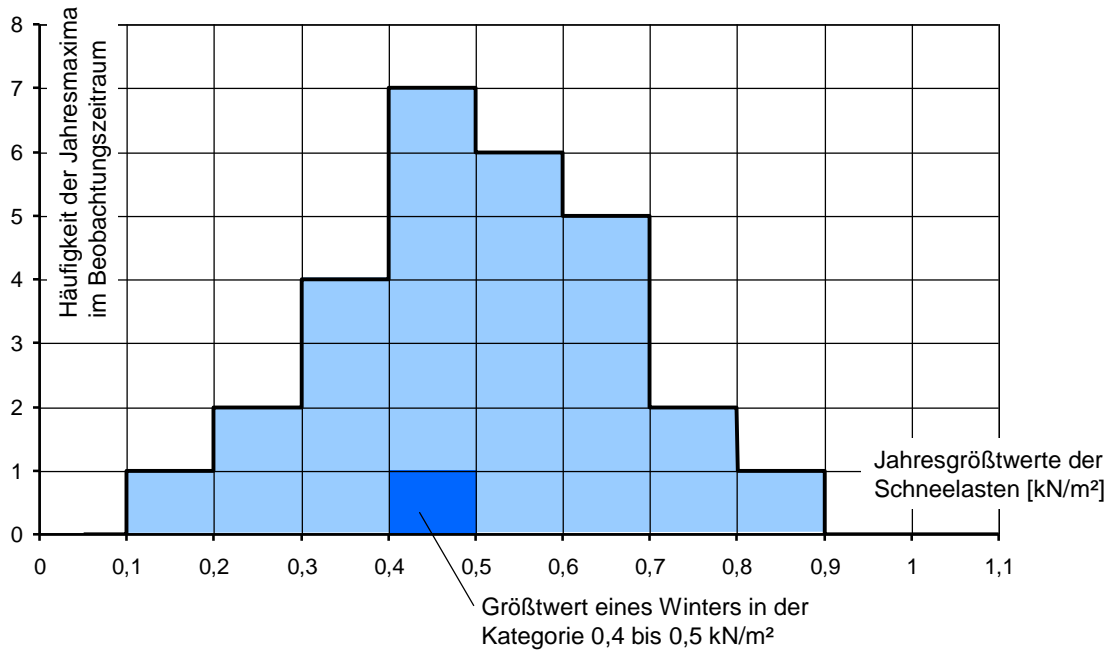


Bild 6-11 Häufigkeit von Größtwerten einer Einwirkung am Beispiel der Schneelasten

Es muss für den jeweils betrachteten geographischen Ort ein charakteristischer Wert der Schneelast festgelegt werden, der einerseits nur selten eintritt, aber andererseits nicht aus übertriebener Sicherheit zu unwirtschaftlich dimensionierten Konstruktionen führt (Bild 6-12).

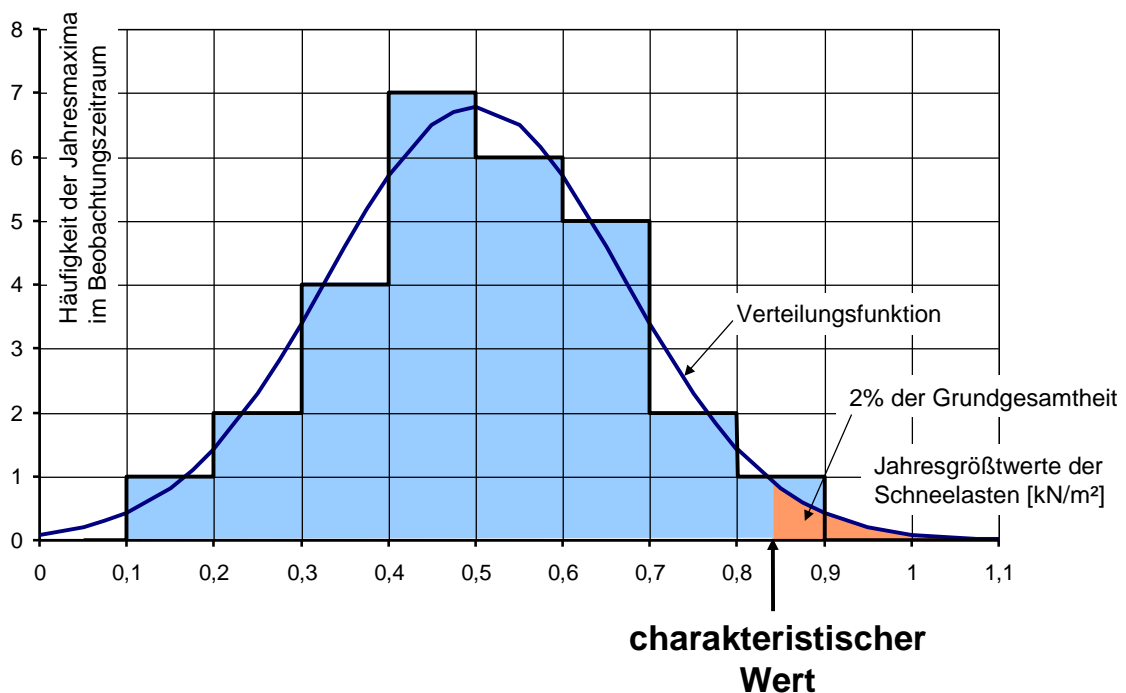


Bild 6-12 Charakteristische Werte der Einwirkungen  $F_k$  am Beispiel der Schneelasten

Näherungsweise kann die Verteilung der maximalen Schneelast mit Hilfe einer Gauß'schen Normalverteilung beschrieben werden. Auch die Verteilung von Materialeigenschaften kann über die Normalverteilung näherungsweise gut beschrieben werden.

Die charakteristischen Werte der Beanspruchung (Folge der Einwirkung) werden mit einem Teilsicherheitsbeiwert der Einwirkung zu einem sogenannten „Bemessungswert (design value) der Beanspruchung“ vergrößert, die charakteristischen Werte des Bauteilwiderstandes (der Beanspruchbarkeit) werden durch einen Teilsicherheitsbeiwert auf der Materialseite zu einem „Bemessungswert des Bauteilwiderstandes“ abgemindert.

Aus dem Abstand der charakteristischen Werte der Einwirkung und der Beanspruchbarkeit ergibt sich eine Sicherheitszone. Wenn die Bemessungswerte der Beanspruchung und des Bauteilwiderstandes gleich sind, sprechen wir von der Nennsicherheit.

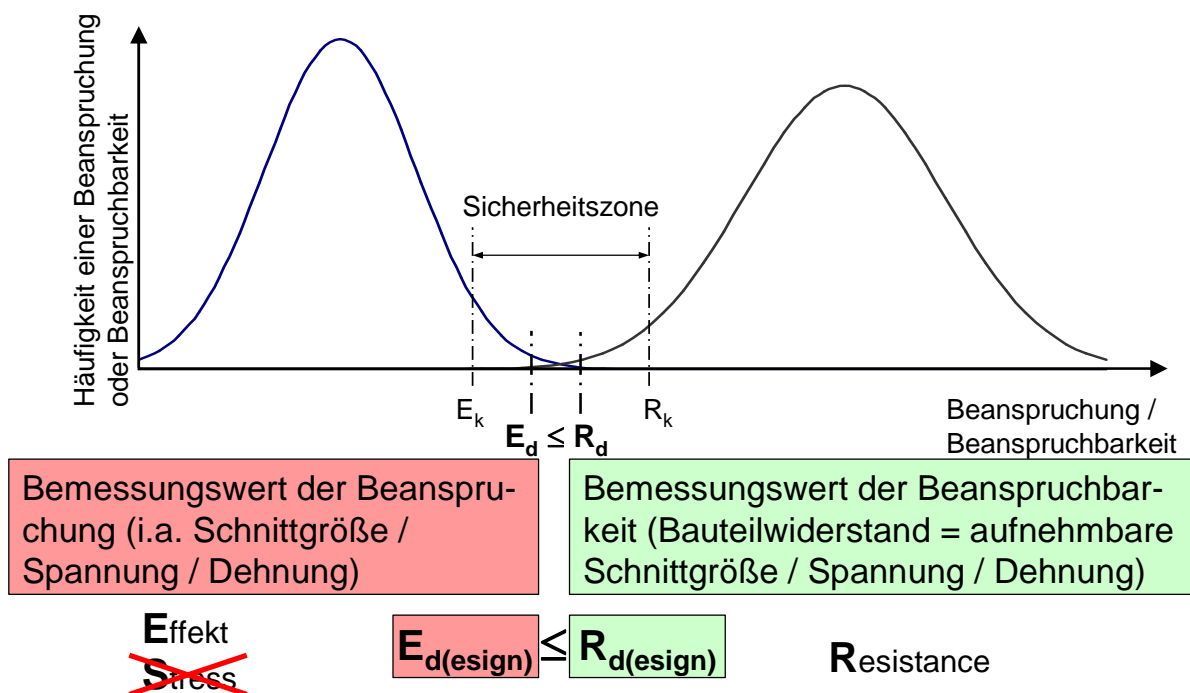


Bild 6-13 Sicherheitsabstände im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT) beim Nachweis gegen Versagen eines Tragwerkes oder seiner Teile

Etwas konkreter für einzelne Schnittgrößennachweise im GZT:

$$\gamma_F \cdot M_{Ek} = M_{Ed} \leq M_{Rd}$$

$$\gamma_F \cdot V_{Ek} = V_{Ed} \leq V_{Rd}$$

$$\gamma_F \cdot N_{Ek} = N_{Ed} \leq N_{Rd}$$

Der Nachweis von Verformungen ist kein Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit, sondern ein Nachweis im Gebrauchszustand.

Im Gebrauchszustand können die Teilsicherheitsbeiwerte mit 1,0 angenommen werden, d.h.: Verformungsnachweise dürfen mit den charakteristischen Werten der Einwirkungen geführt werden.

## 7 Einführung Tragwerke

Bereits im Abschnitt 5.1 wurden Tragwerke kurz angesprochen, die Vielfalt der Tragwerke ist sehr groß. Auch eine klare Einteilung fällt schwer, weil wir Tragwerke nach verschiedenen Kriterien einteilen können.

- Einteilung nach der räumlichen Ausbildung der Strukturelemente: linienförmige bzw. stabförmige, flächige, selten volumenartige Tragwerke
- Einteilung nach modularem Aufbau: einteilige oder mehrteilige Tragwerke
- Einteilung nach räumlichen Wirkung der einwirkenden Kräfte und Auflagerreaktionen : ebene oder räumliche Tragsysteme
- Einteilung nach der Art der statischen Berechnung: statisch bestimmte oder statisch unbestimmte/(überbestimmte) statische Systeme
- Einteilung nach der überwiegenden Art der Beanspruchung: überwiegend beansprucht auf Druck, Zug oder Biegung
- Einteilung nach der Bauteilform: Träger, Stütze, Rahmen, Bogen, Hängekonstruktion, Platten, Scheiben, Membranen, Schalen

Die letzten vier Kriterien können nur in Verbindung mit den Einwirkungen auf das Tragwerk beantwortet werden, was sofort klar ist, da Tragwerke ja Lasten tragen sollen.

Wir wollen uns zunächst auf die häufig genutzten Tragwerke konzentrieren und betrachten daher in diesem Abschnitt nur **ebene Tragwerke** mit **linienförmiger** bzw. **stabförmiger** Ausbildung.

### 7.1 Einteilige, statisch bestimmte Tragwerke

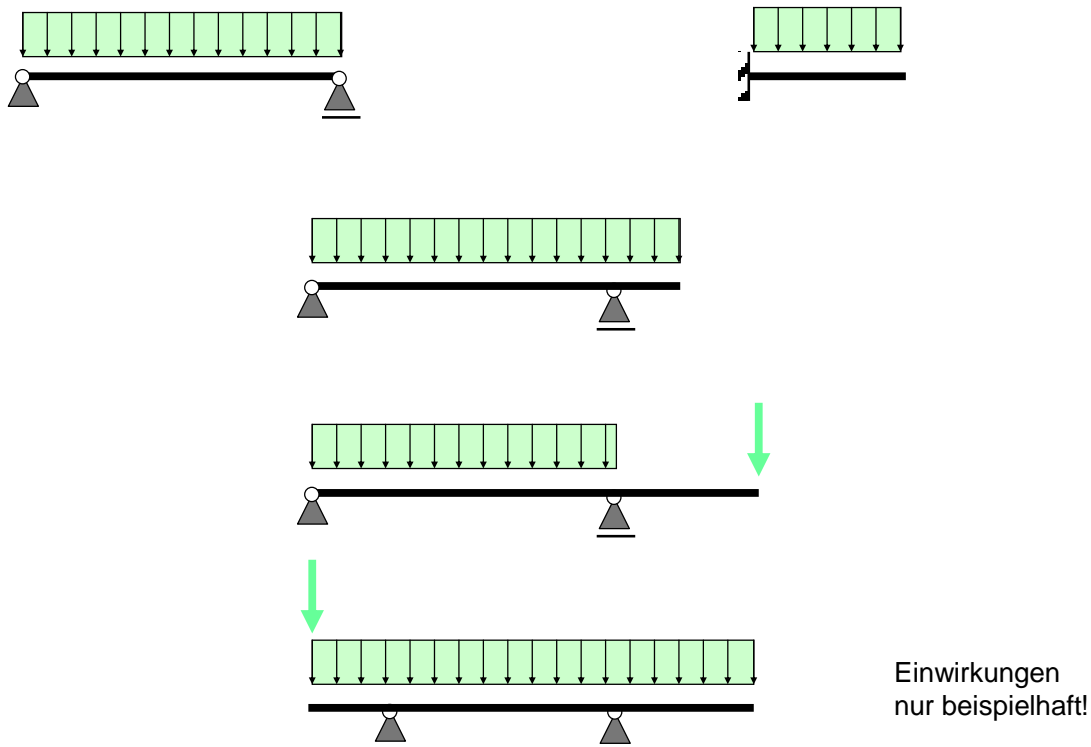


Bild 7-1 einteilige, statisch bestimmte Tragsysteme

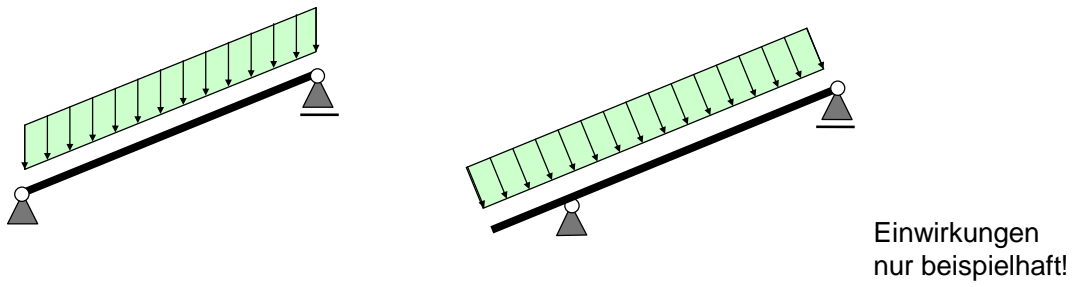


Bild 7-2 einteilige, statisch bestimmte Tragsysteme

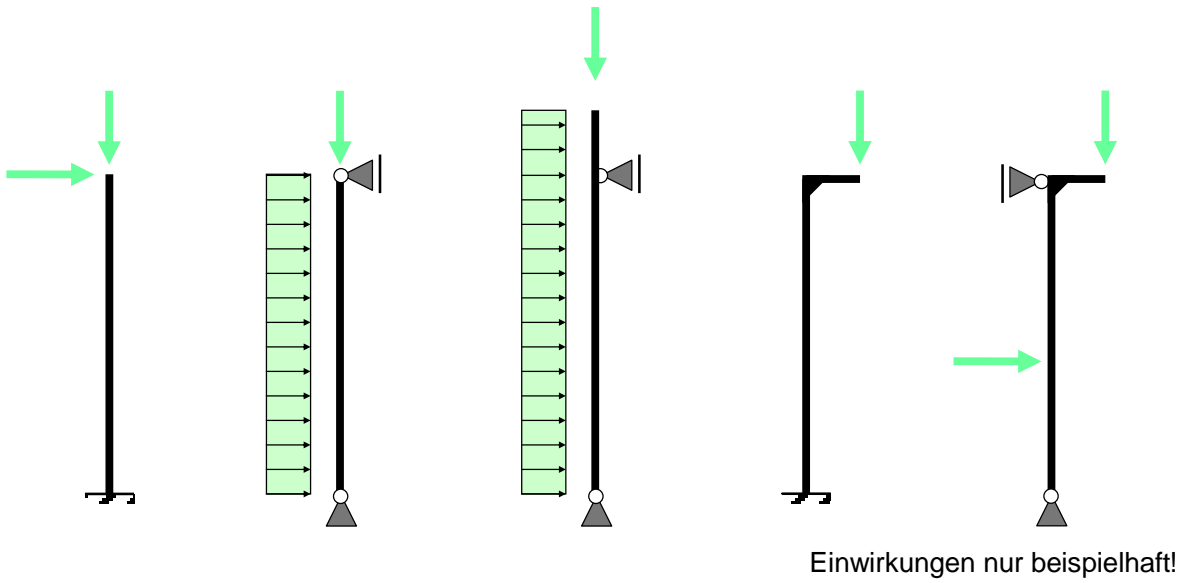


Bild 7-3 einteilige, statisch bestimmte Tragsysteme

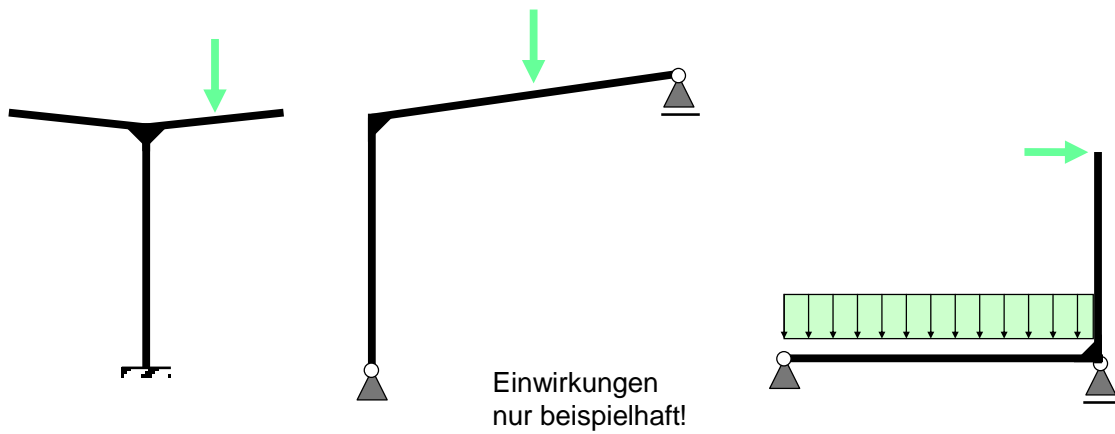


Bild 7-4 einteilige, statisch bestimmte Tragsysteme

7.2 Einteilige, statisch unbestimmte(überbestimmter) Tragwerke

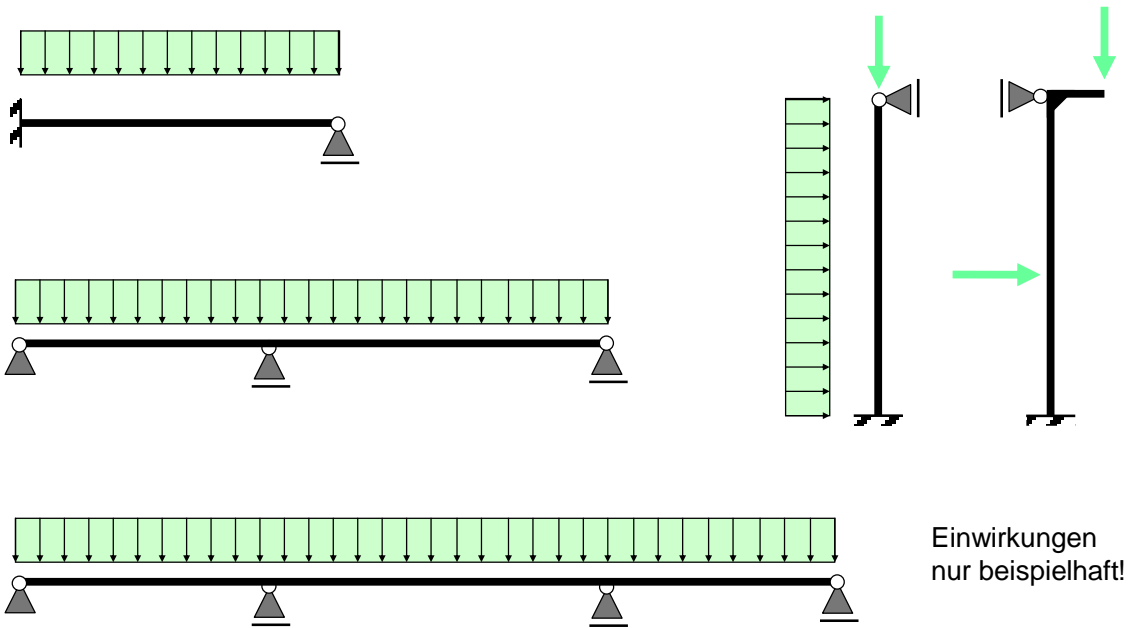


Bild 7-5 einteilige, statisch unbestimmte Tragsysteme

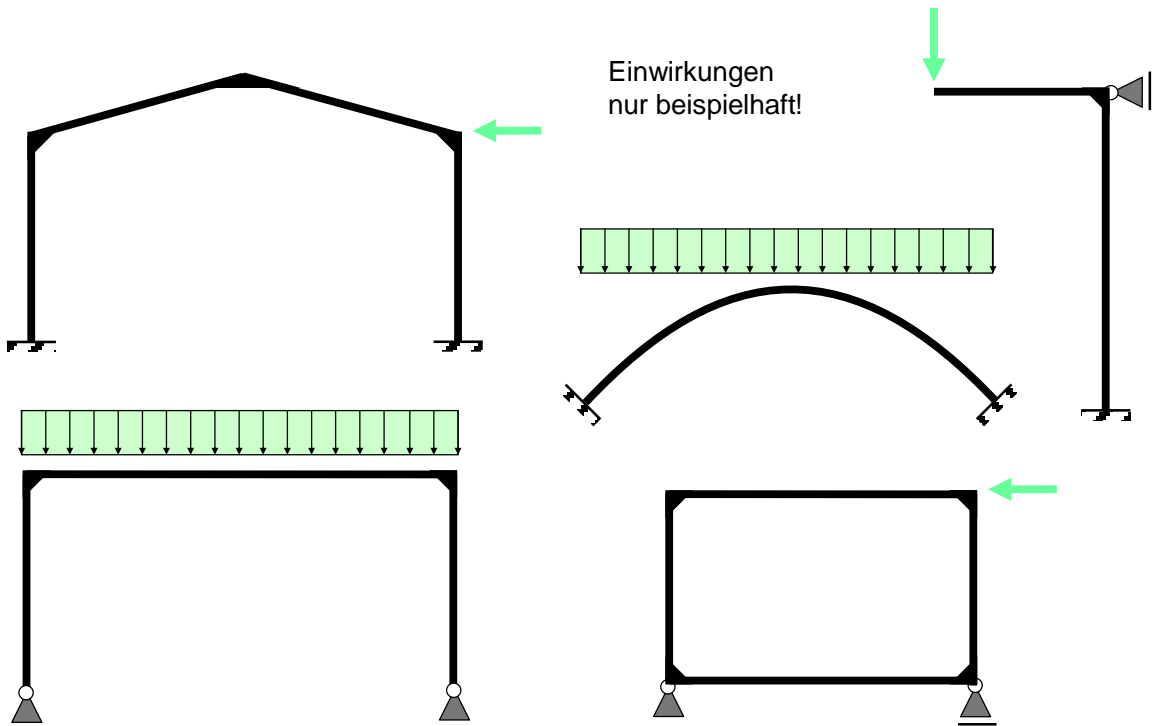


Bild 7-6 einteilige, statisch unbestimmte Tragsysteme



### 7.3 Mehrteilige Tragwerke

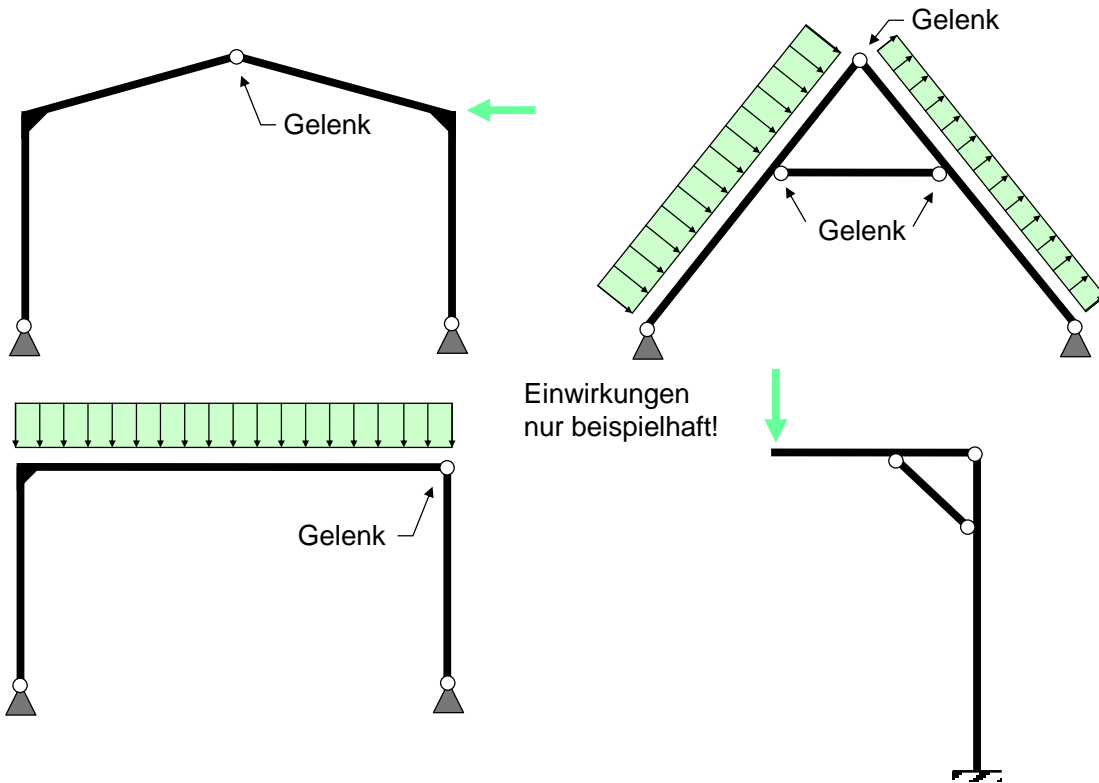


Bild 7-7 Mehrteilige Tragwerke

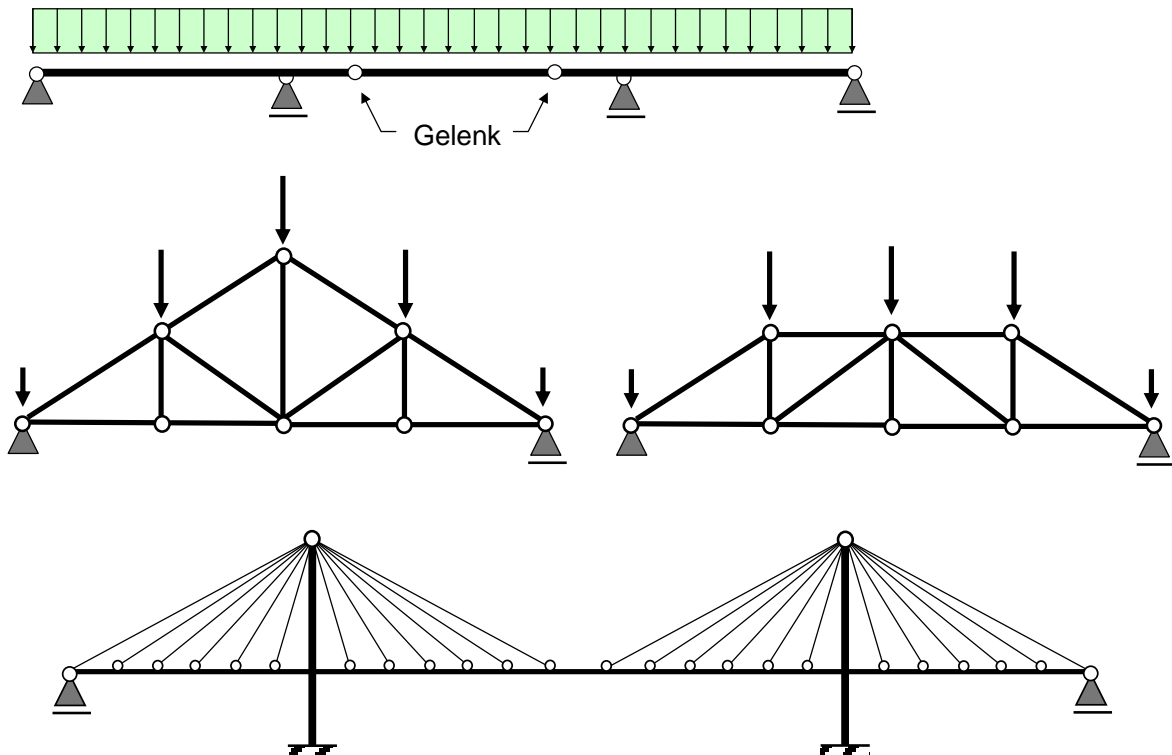


Bild 7-8 Mehrteilige Tragwerke

### 7.4 Verformungen von einteiligen, statisch bestimmten Tragwerken

Um ein Gefühl für das Tragverhalten von verschiedenen Tragwerken zu bekommen, ist es wichtig, sich deren Verformung infolge einer vorgegebenen Belastung zu überlegen. Wir wollen dies an ausgewählten Beispielen üben. Eine Kenntnis des Verlaufs und des Vorzeichen des Biegemomentes hilft bei der Festlegung der Krümmungen. An Momentennullstellen findet ein Krümmungswechsel statt.

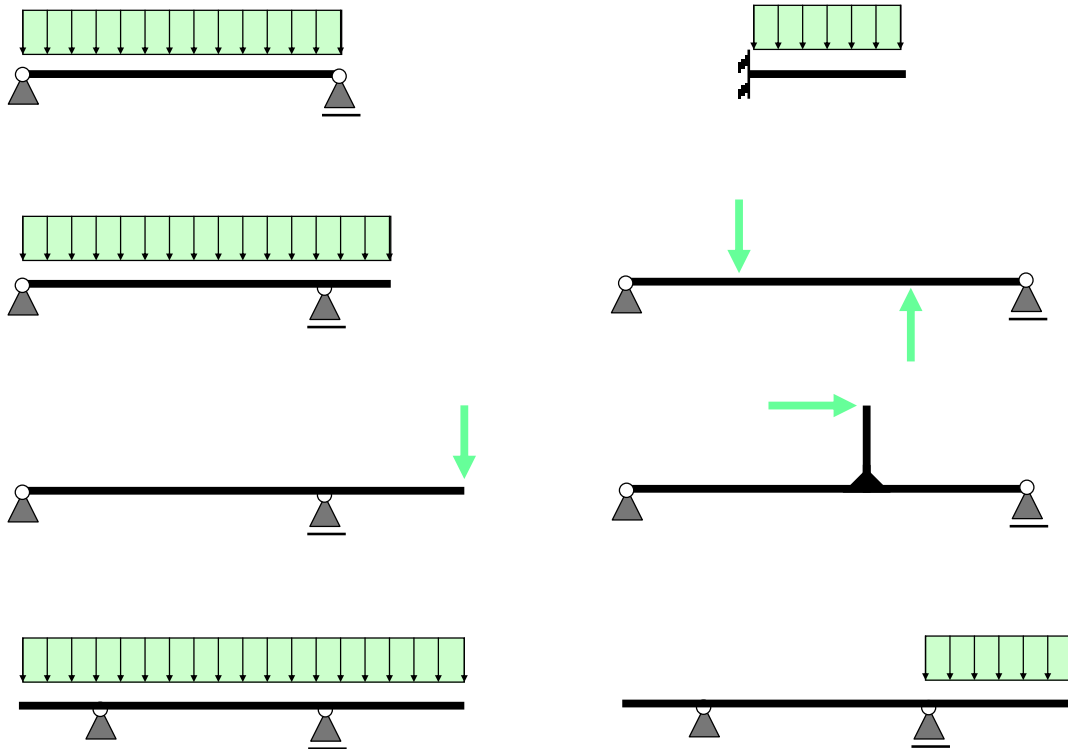


Bild 7-9 Bitte qualitative Verformungsfiguren ergänzen

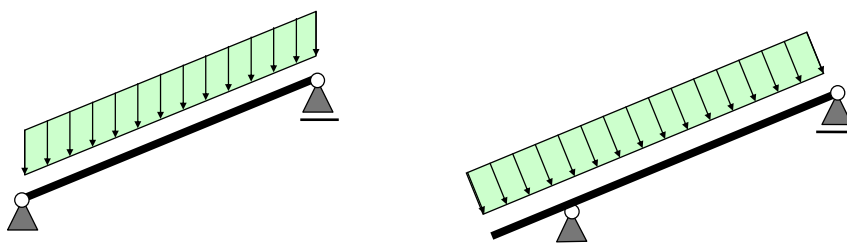


Bild 7-10 Bitte qualitative Verformungsfiguren ergänzen

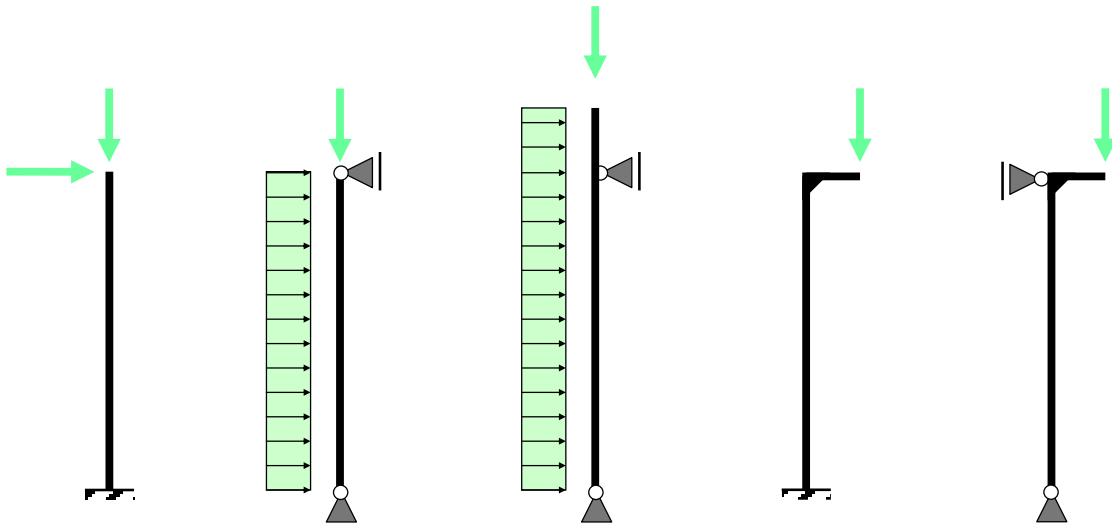


Bild 7-11 Bitte qualitative Verformungsfiguren ergänzen

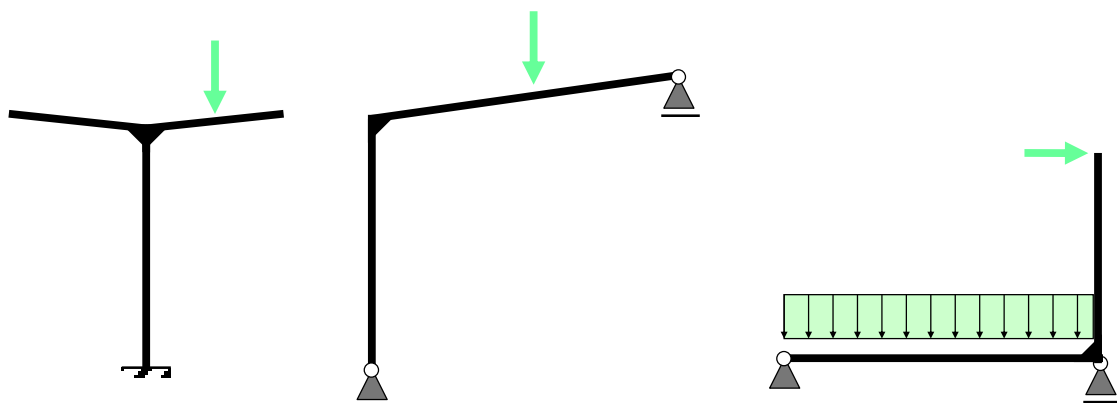


Bild 7-12 Bitte qualitative Verformungsfiguren ergänzen

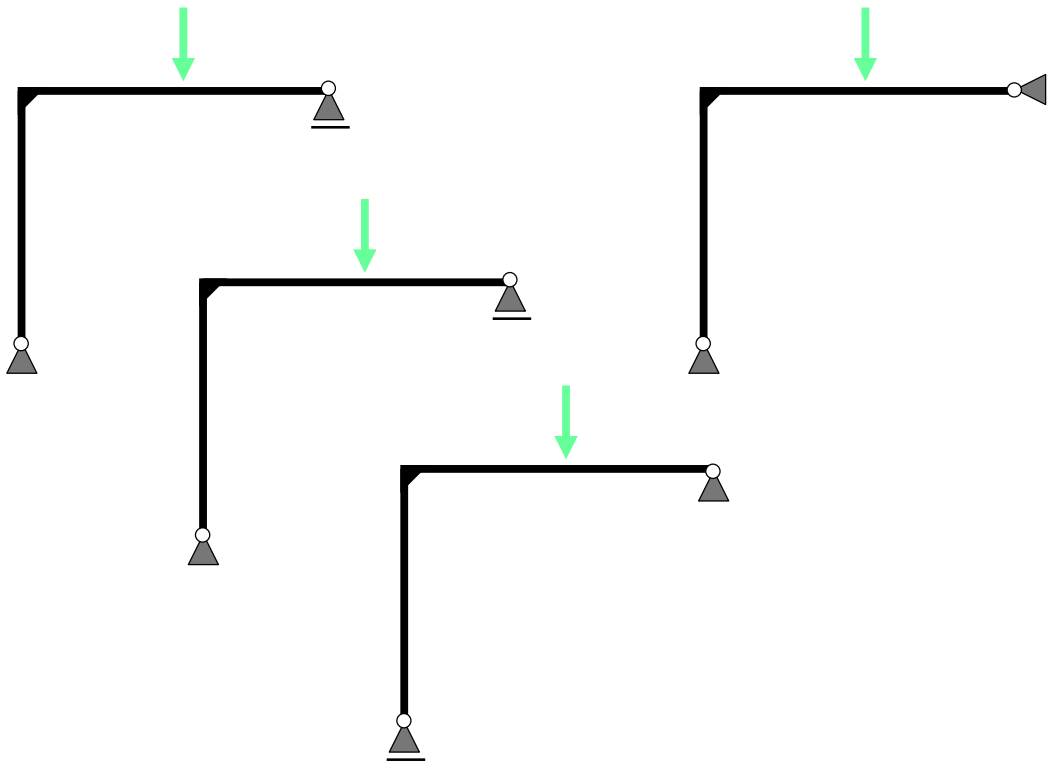


Bild 7-13 Bitte qualitative Verformungsfiguren ergänzen

## 8 Fachwerke

### 8.1 Aufbau von Fachwerken

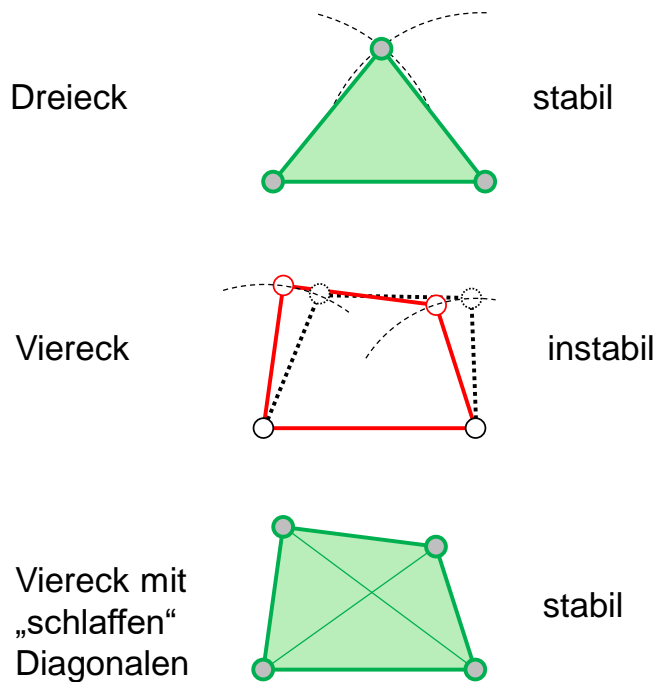
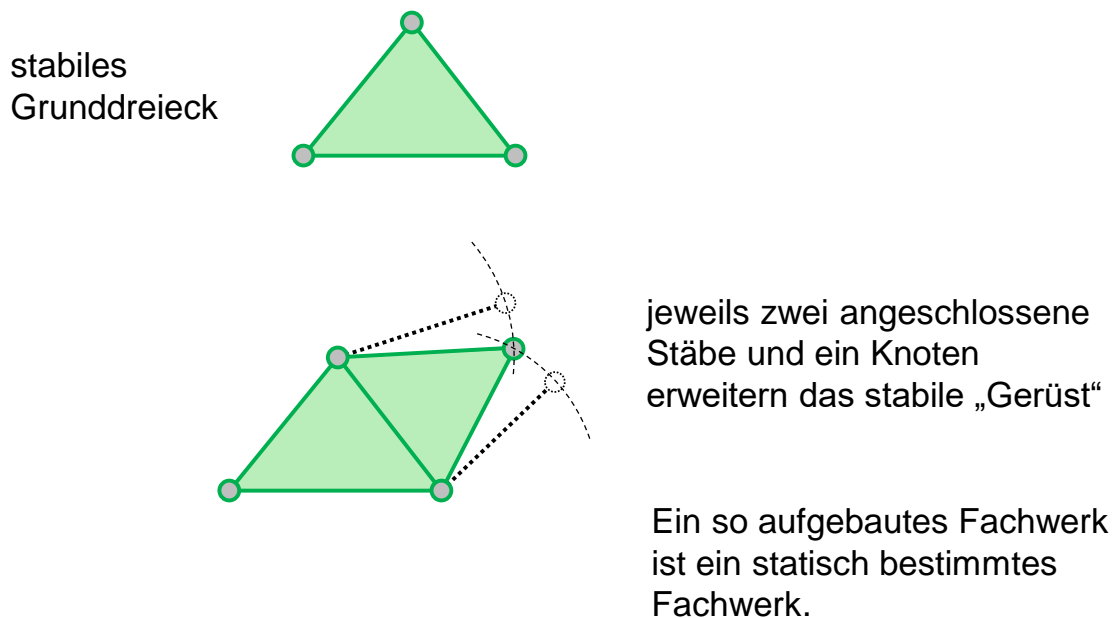


Bild 8-1 verschiedene Gelenkecke



Die Stäbe eines Fachwerkes sind gerade!  
(sie könnten auch gebogen oder geknickt sein, doch dann spricht man nicht mehr von einem Fachwerk)

Bild 8-2 Aufbau statisch bestimmter Fachwerke

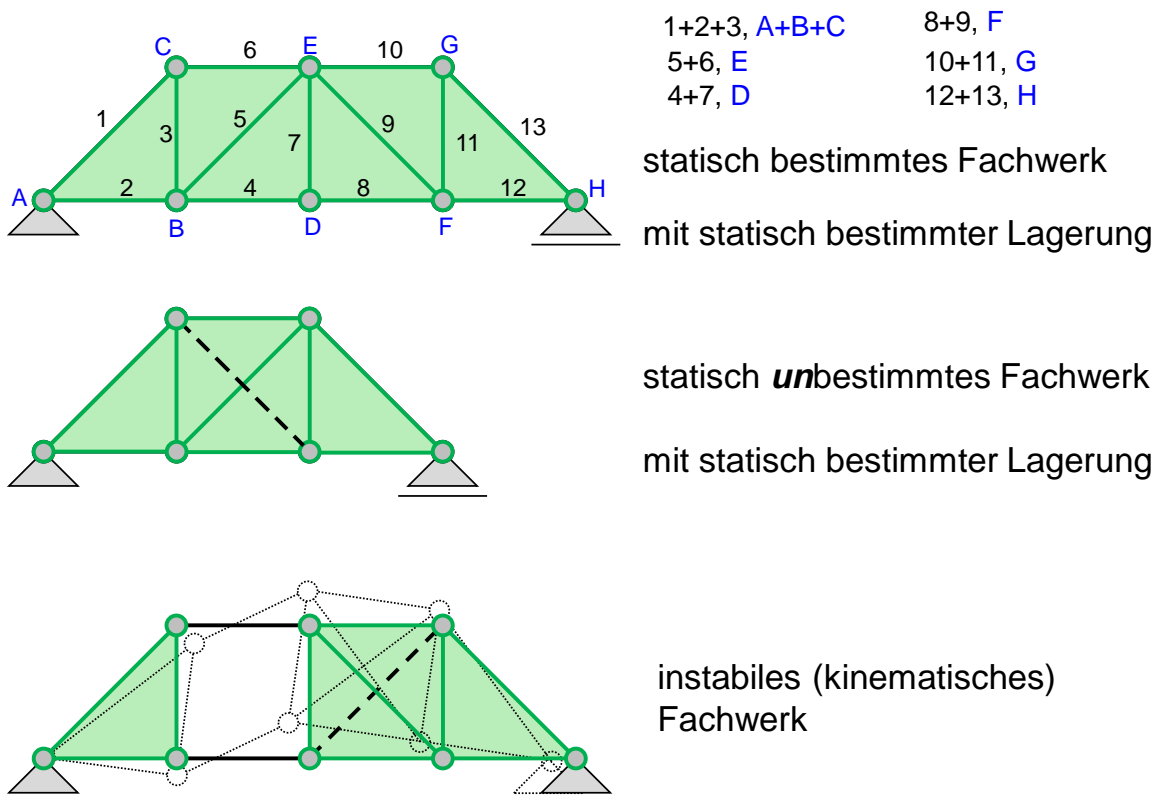


Bild 8-3 statisch bestimmte, kinematische und statisch überbestimmte/unbestimmte Fachwerke

## 8.2 Idealisierung von Fachwerken

Reale Fachwerke haben selten gelenkig ausgebildete Knoten. Für eine genügend genaue statische Berechnung können aber **gelenkige Verbindungen** (Drehgelenke) angenommen werden.

Wenn sich die **Stabachsen** (Wirkungslinien der Stäbe) jeweils an den Verbindungsstellen **in einem Punkt schneiden** und einwirkende Kräfte sowie Auflagerkräfte, also allgemein **Kräfte nur in den Gelenkpunkten** angreifen, dann ergeben sich in den geraden Stäben nur Normalkräfte, also keine Querkkräfte und keine Biegemomente.

Hinweis: Bei nicht lotrechten Stäben entstehen infolge ihres Eigengewichts geringe Querkkräfte und Momente.

Tragwerke, die fast ausschließlich durch Druck- und Zugkräfte beansprucht werden, sind im Hinblick auf die Materialausnutzung sehr effizient. Mit anderen Worten:

**Fachwerke können mit geringem Materialaufwand hohe Lasten tragen.**

## 8.3 Berechnung der Stabkräfte

Infolge der idealisierten Randbedingungen von Fachwerken entstehen in den Stäben nur Normalkräfte (Zug- oder Druckkräfte), also keine Querkkräfte und keine Biegemomente. Die Stabkräfte können mit dem Knotenschnittverfahren, dem Ritter'schen Schnittverfahren oder mit einer Kombination beider Verfahren berechnet werden.

Es empfiehlt sich, vor der Berechnung die Auflagerkräfte am Gesamtsystem zu bestimmen, um die Auflagerkräfte als bekannte Kräfte an das System anzutragen.

### 8.3.1 Knotenschnittverfahren

Zur Berechnung der Stabkräfte eines Fachwerksystems mit dem Knotenschnittverfahren können alle Knoten aus dem System freigeschnitten werden. Jeder freigeschnittene Knoten ist ein zentrales Kraftsystem. Zunächst können nur die Stabkräfte an Knoten berechnet werden, an denen nur zwei unbekannte Stabkräfte vorhanden sind, weil nur zwei Gleichgewichtsbedingungen je Knoten zur Verfügung stehen.

Durch Übertragung von berechneten Stabkräften zu Nachbarknoten können allmählich sämtliche Stabkräfte ermittelt werden.

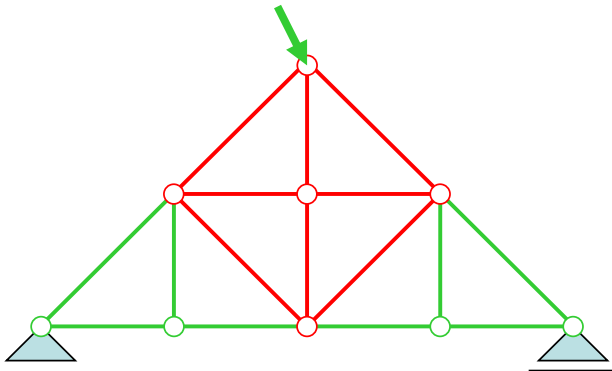


Bild 8-4 statisch unbestimmtes Fachwerk mit statisch bestimmter Lagerung, bereichsweise können Stabkräfte berechnet werden

### 8.3.2 Regeln für Nullstäbe und andere Sonderfälle

Die Berechnung der Stabkräfte haben wir mit dem Knotenschnittverfahren kennengelernt. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass ein an einem Knoten angeschlossener Stab die Stabkraft Null erhält. In Bild 8-5 sind verschiedene Kraftsituationen dargestellt, aus denen man Nullstäbe ohne Berechnung erkennen kann. Man kann aus den Situationen ableiten:

Wenn an einem Fachwerkknoten mit nur drei wirkenden Kräften zwei dieser Kräfte auf einer Geraden liegen, dann ist die dritte Kraft Null bzw. dieser Stab ein „Nullstab“.

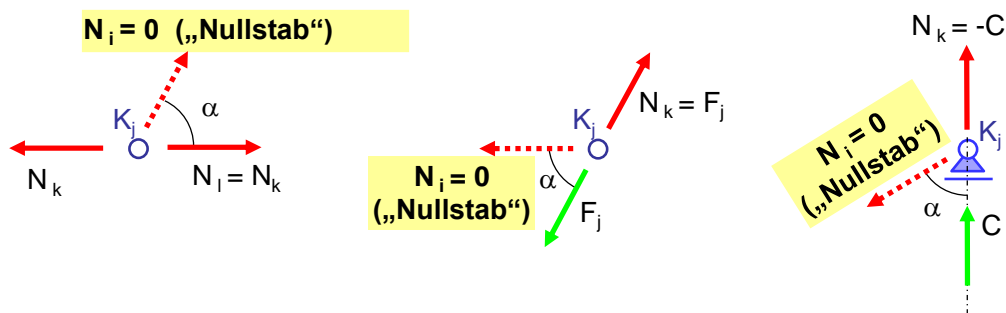


Bild 8-5 Ohne Berechnung erkennbare Nullstäbe

Einen Sonderfall stellt ein Knoten mit nur zwei angeschlossenen Stäben dar: sofern keine dritte Kraft (einwirkende Kraft oder Lagerkraft) angreift, sind beide Stäbe Nullstäbe.

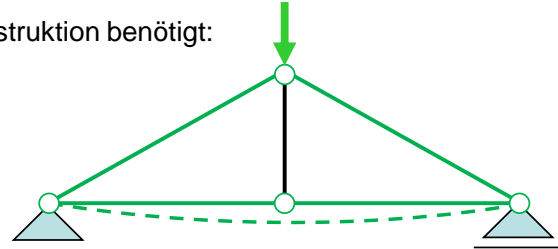
Neben offensichtlichen Nullstäben können Fachwerksysteme auch Nullstäbe enthalten, die sich erst aus einer Berechnung ergeben.

Einen Nullstab kann man nicht ohne weitere Überlegung aus dem System entfernen.

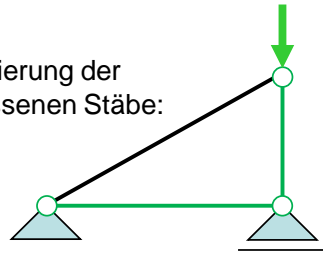
**Beachte:**

Die Nullstäbe werden in der tatsächlichen Konstruktion benötigt:

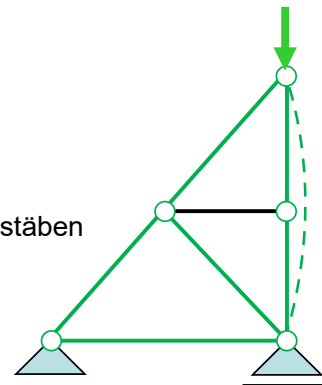
1. zur Verminderung von Verformungen aus dem Eigengewicht von Stäben:



2. zur Stabilisierung der angeschlossenen Stäbe:



3. zur Reduzierung von „Knicklängen“ von Druckstäben



4. ggf. für andere Lastfälle als Tragstäbe

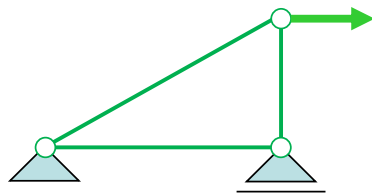


Bild 8-6 wichtige Aufgaben von Nullstäben

weitere Sonderfälle:

An einem Knoten greifen vier Kräfte an (Stabkräfte oder Knotenkräfte), von denen jeweils zwei paarweise auf einer Wirkungsachse liegen. Für diesen Fall sind die Kräfte paarweise entgegengesetzt gleich groß.

Für einen Knoten mit drei symmetrischen Kraftwirkungsachsen (Stabkräfte, Knotenkräfte) sind die Kräfte symmetrisch.

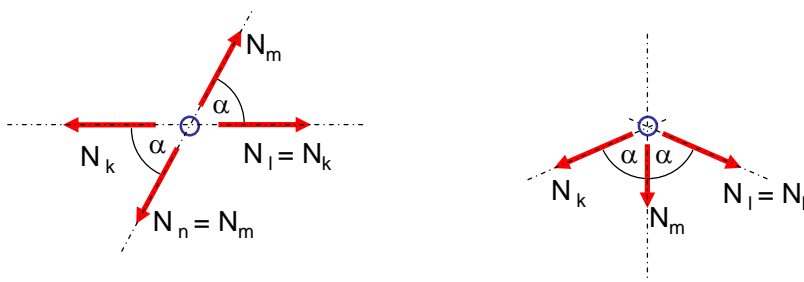


Bild 8-7 Sonderfälle bei vier und drei Knotenkräften



### 8.3.3 RITTERsches Schnittverfahren

Der RITTERschnitt schneidet drei unbekannte Stabkräfte, deren drei Wirkungslinien nicht parallel zueinander sind und sich nicht in einem Punkt schneiden.

(die verbleibenden Teilsysteme können je für sich auch stat. unbest. sein)

Für Fachwerke, bei denen auch nach Berechnung der Lagerkräfte kein Startknoten für das Knotenschnittverfahren vorliegt, kann das Verfahren zur Berechnung innerer Stabkräfte dienen, um damit Startknoten für das Knotenschnittverfahren zu erhalten.

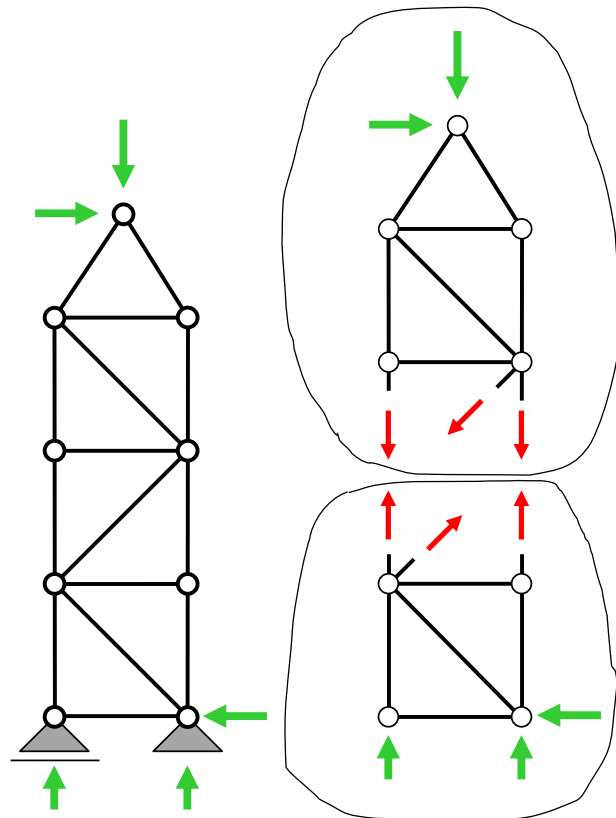


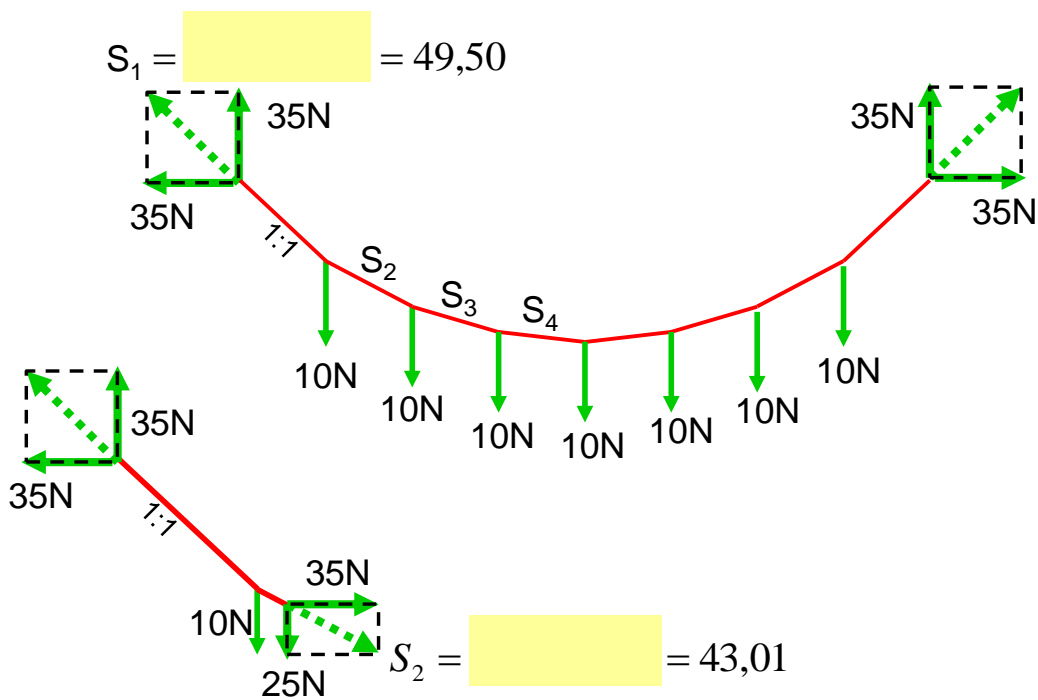
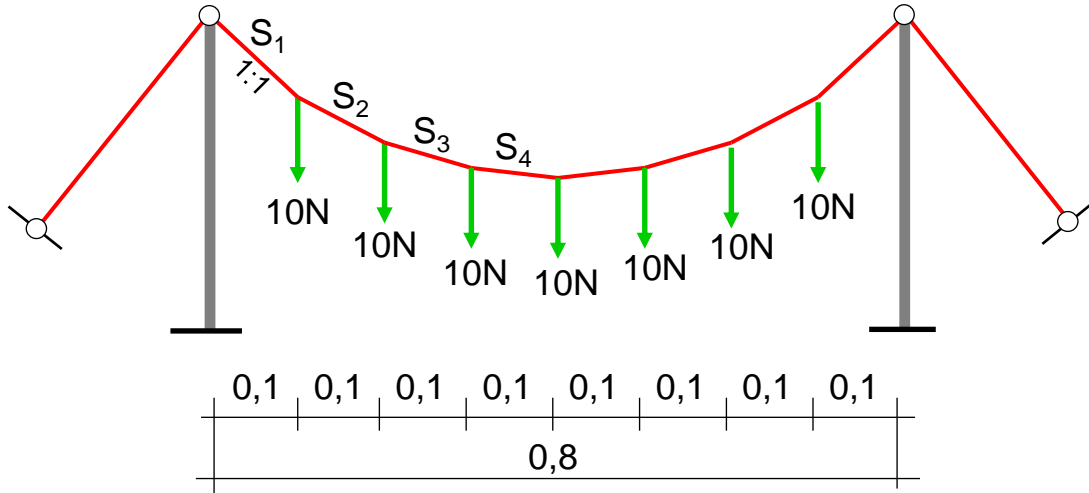
Bild 8-8 Ritterschnitt durch drei Stäbe zur gezielten Berechnung oder Kontrolle von Stabkräften

## 8.4 Fachwerkformen

## 9 Seile und Bögen

### 9.1 Einführung

Hängetragsystem:

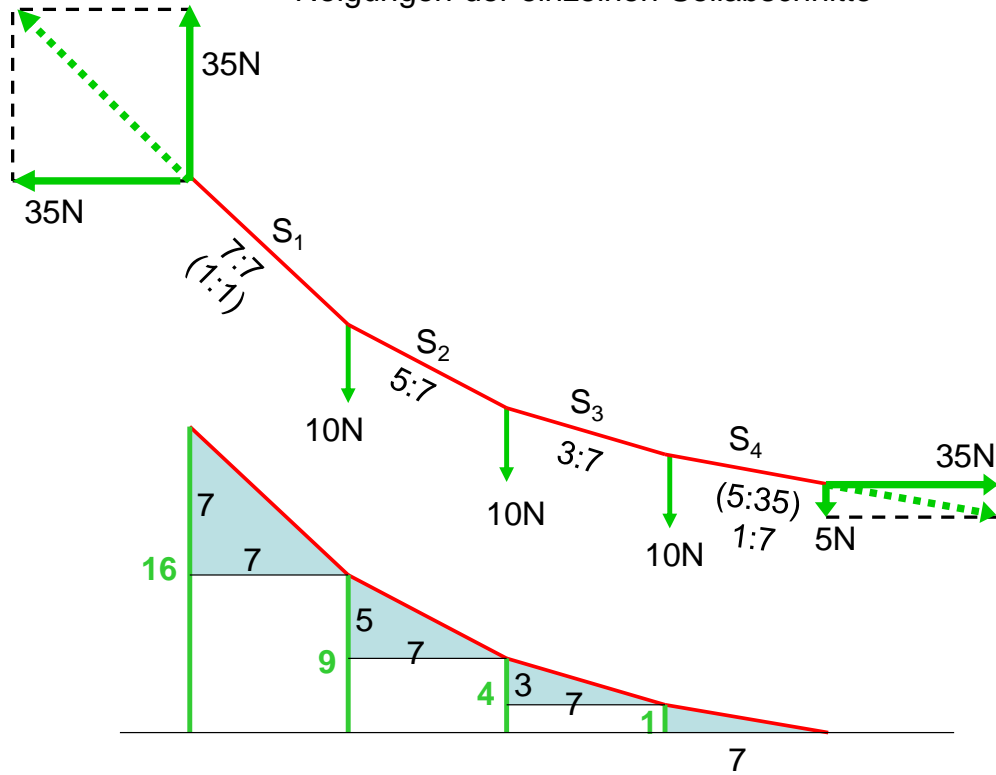


aus weiteren Freischnitten:

$$S_3 = 38,08$$

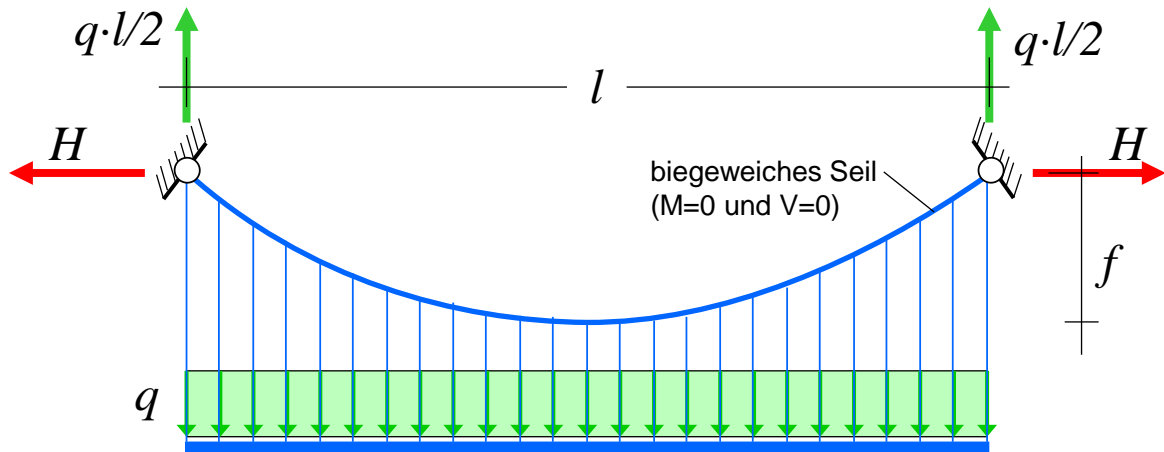
$$S_4 = 35,36$$

### Neigungen der einzelnen Seilabschnitte



## 9.2 Seiltragwerk, belastet durch Gleichstreckenlast

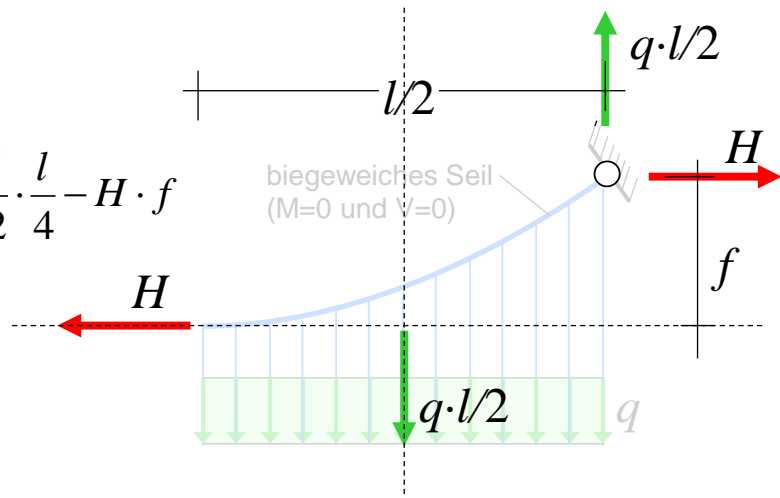
Welche Seillinie (math. Funktion)  
stellt sich infolge der Belastung ein?



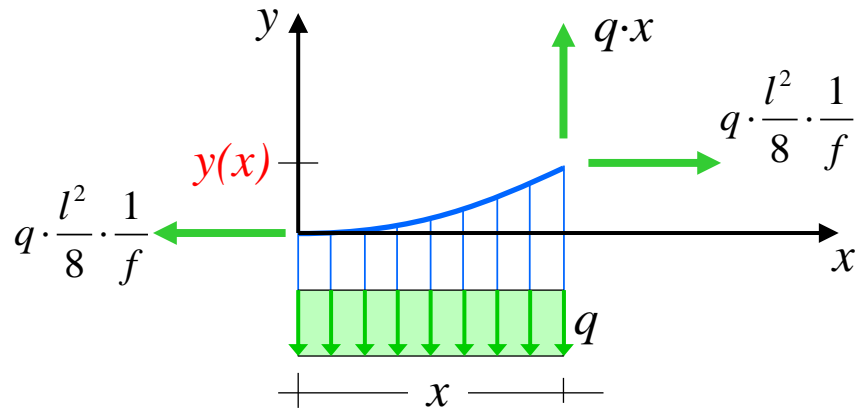
Horizontalkomponente

$$\sum M_{\text{Aufhängepunkt}} = 0 = q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - H \cdot f$$

$$\Rightarrow H = q \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{f}$$



Funktion  $y(x)$

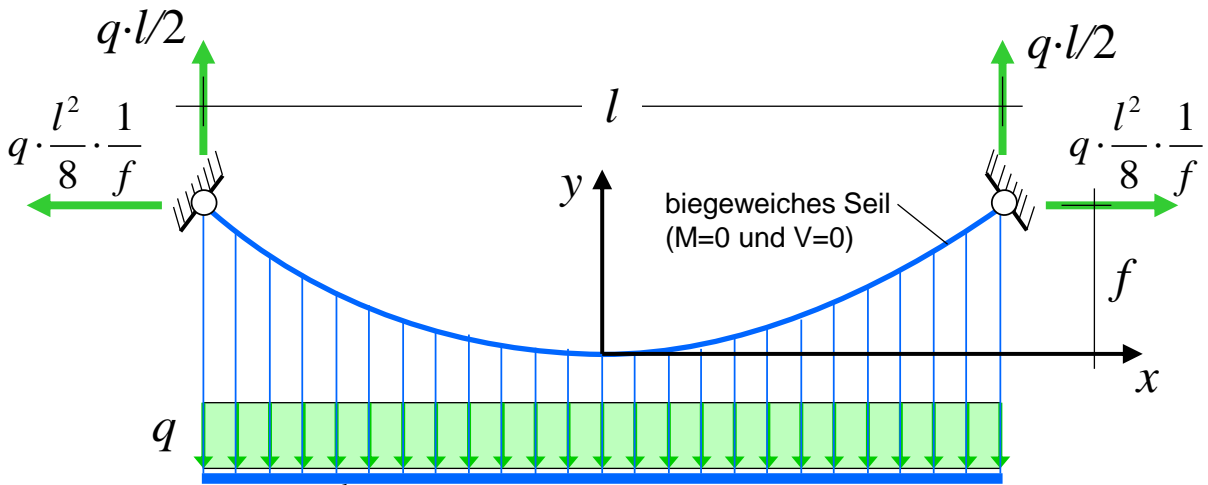


$$\sum M_x = 0 = q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - q \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{f} \cdot y(x)$$

Seilfunktion $\Rightarrow y(x) = \frac{4f}{l^2} \cdot x^2$ für Gleichstreckenlast
---

Zusammenfassung

Seiltragwerk, belastet durch Gleichstreckenlast



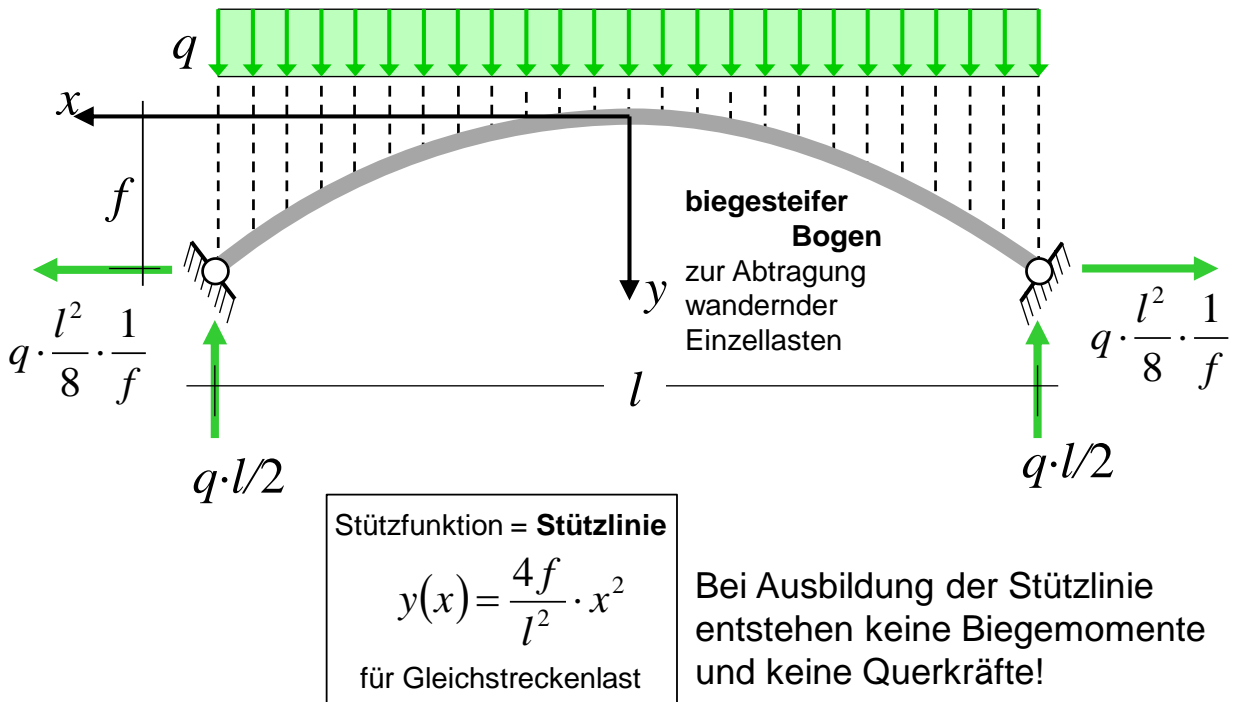
„Versteifungsträger“  
 versteift die Seilform bei  
 wandernden Einzellasten

math. Funktion

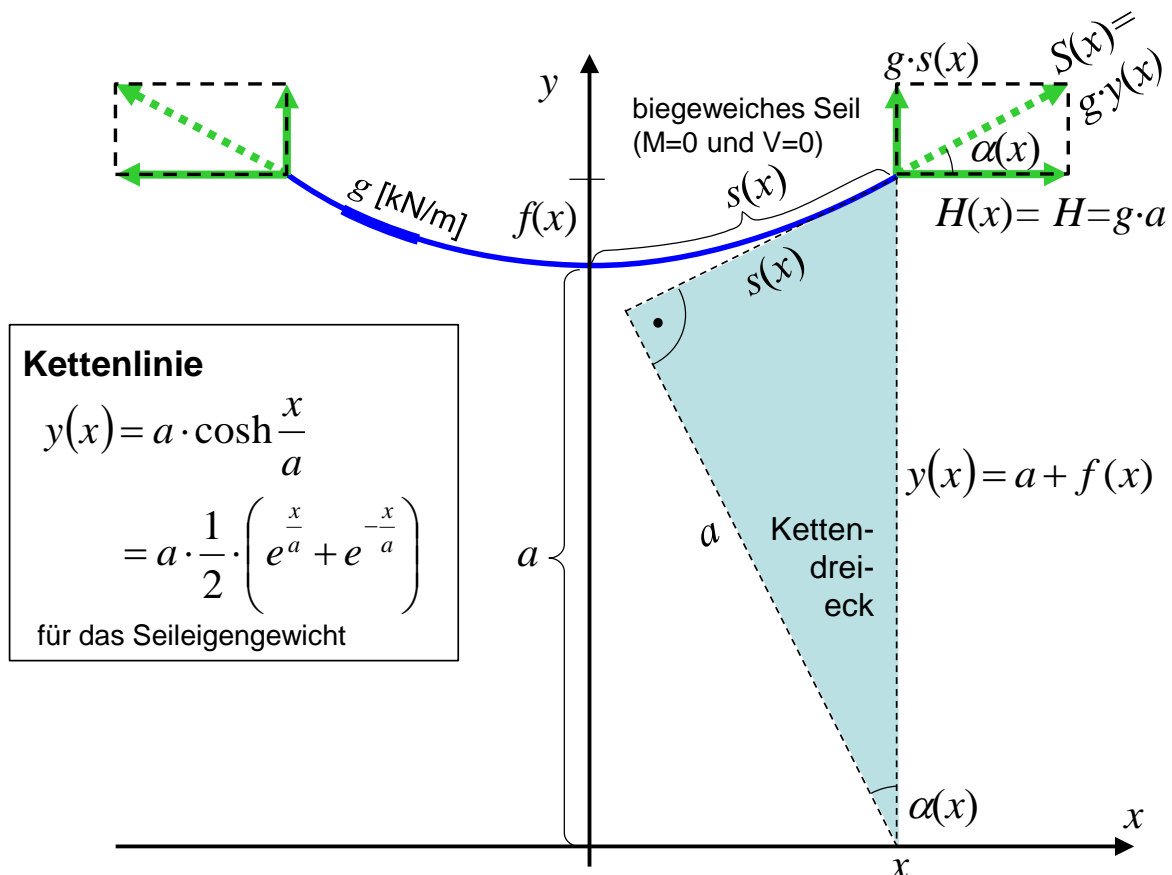
Seilfunktion $y(x) = \frac{4f}{l^2} \cdot x^2$ für Gleichstreckenlast
---

9.3 Bogentragwerk, belastet durch Gleichstreckenlast

math. Funktion?

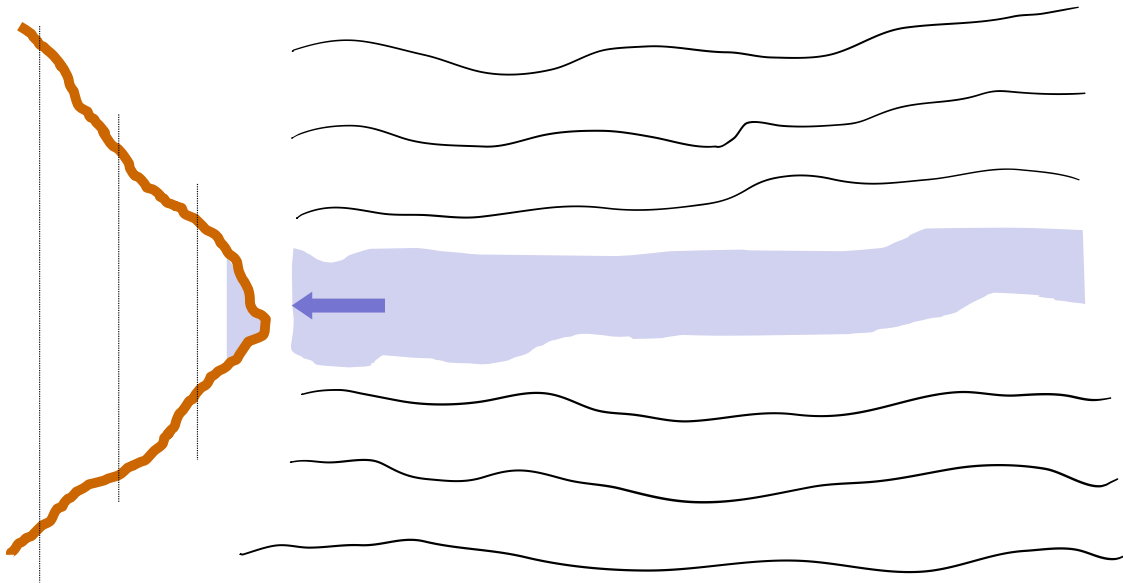


9.4 Mathematische Funktion für das Eigengewicht des Seils (der Kette)



## 9.5 Stützlinien/Seillinien für andere Beanspruchungen

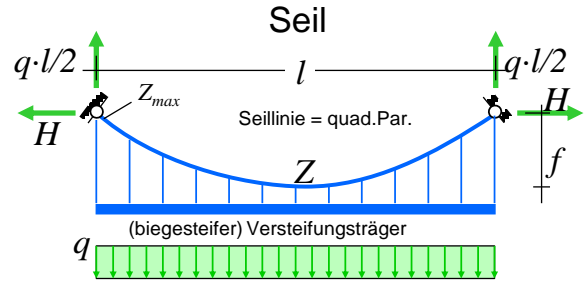
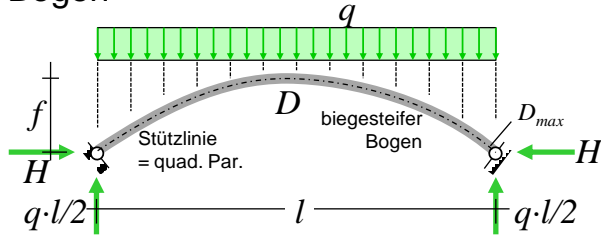
**z. B. für eine Talsperre?**



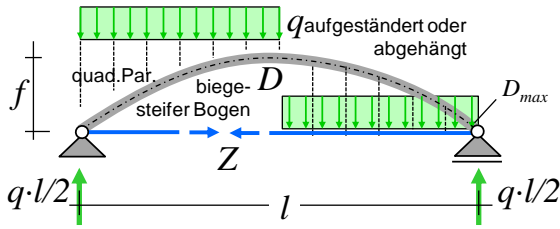
Für jede Beanspruchung muss man die jeweilige Stützlinie/Seillinie finden/ermitteln.

9.6 Optimierte Tragsysteme für Gleichlasten

Bogen



Bogen mit Zugband

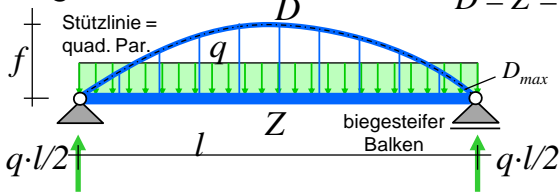


$$H = D = Z = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1}{f}$$

$$D = Z = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1}{f}$$

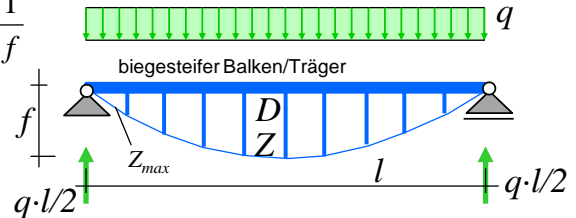
jeweils enge Teilung vorausgesetzt

Langerscher Balken

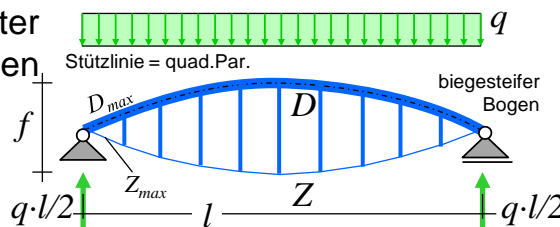


$$D = Z = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1}{f}$$

Unterspannter Balken/Träger

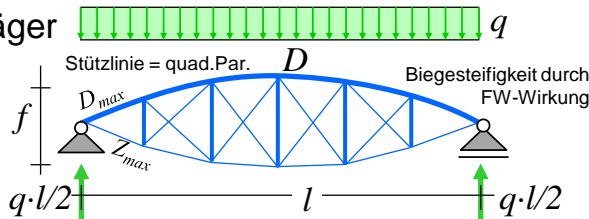


Unterspannter Bogen



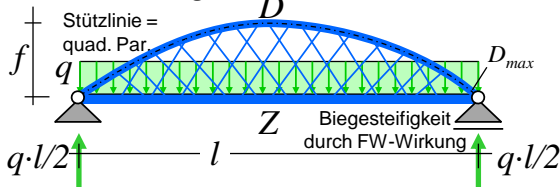
$$D = Z = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1}{f}$$

Pauli-Träger



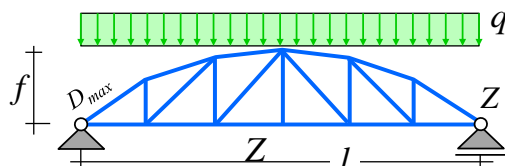
$$D = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1}{f}$$

Netzwerkbogen

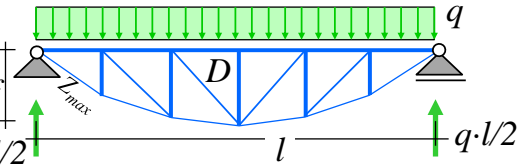


$$D = Z = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1}{f}$$

Fachwerkträger



$$Z = D = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1}{f}$$





## **10 Mehrteilige Tragwerke (TM2)**

### **10.1 Einführung**

Sind bei einem Tragwerk alle Teile biegefest miteinander verbunden, gilt es als einteiliges Tragwerk. Sobald Gelenke in ein Tragwerk eingefügt sind (Ausnahme: Gelenke an Auflagern), spricht man von mehrteiligen Systemen. Es gibt verschiedene Arten von Gelenken: Momentengelenke, Querkraftgelenke und Normalkraftgelenke. Außer der jeweils im Namen genannten Schnittgröße werden alle anderen Schnittgrößen übertragen bzw. in den benachbarten Teil des Tragwerkes übertragen. Ein sehr häufig verwendetes Gelenk ist das Momentengelenk, bei dem also nur Querkräfte und Normalkräfte oder etwas allgemeiner formuliert nur zwei Gelenkkräfte übertragen werden.

Gelenke können aus Gründen einer einfachen Montage sinnvoll sein. Häufig sind auch statisch bestimmte Tragwerke anstelle von statisch unbestimmten Tragwerken erwünscht, so dass bei einigen Tragwerken Gelenke eingefügt werden.

Eine anschauliche Unterscheidung solcher mehrteiligen Systeme in kinematische (bewegliche), statisch bestimmte oder statisch unbestimmte Tragsysteme kann leicht zu einer schwierigen Aufgabe werden. Diese Aufgabe muss aber immer vor einer Tragwerksberechnung gelöst werden.

Statisch bestimmt nennen wir Systeme, bei denen unbekannte Kraft- oder Momentengrößen allein mit Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können. Für jeden freigeschnittenen Tragwerksteil haben wir drei Gleichgewichtsbedingungen. Bei z.B. drei Tragwerksteilen haben wir insgesamt 9 Gleichgewichtsbedingungen, die zu einem linearen Gleichungssystem mit 9 unbekanntem Größen führen. Ein System aus  $n$  linearen Gleichungen mit ebenso  $n$  Unbekannten kann eindeutig gelöst werden, wenn die Determinante nicht Null ergibt. Damit wäre die Frage der statischen Bestimmtheit oder andererseits der Beweglichkeit eines Tragsystems mathematisch geklärt, und zwar unabhängig davon, ob wir das von der Anschaulichkeit verstehen. Beim Entwurf oder der Berechnung von Tragwerken sollte dem/der planenden Ingenieur/in allerdings anschaulich (also ohne Berechnung) klar sein, ob ein System tragfähig oder beweglich ist. Um das zu intuitiv beurteilen zu können, müssen wir lernen, uns in das Tragverhalten von Tragsystemen hineinzuversetzen.

### **10.2 Einfach aufgebaute, mehrteilige Systeme ebener Tragwerke**

### **10.3 Der Gelenkträger oder Gerberträger**

### **10.4 Der Dreigelenkrahmen**

## Literatur

- [1] Leicher, G.: Tragwerkslehre in Beispielen und Zeichnungen, Werner-Verlag, 2. Auflage 2006
- [2] Gross, Hauger, Schröder, Wall: Technische Mechanik 1
- [3] Gabbert, U. ;Raecke, I.: Technische Mechanik - für Wirtschaftsingenieure
- [4] Fleßner, H.: Ein Beitrag zur Ermittlung von Querschnittswerten mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen. In: *Bauingenieur* 37 (1962), Nr. 4, S. 146–149