Stabwerkmodelle

BHT
Berliner Hochschule
für Technik

Studiere Zukunft

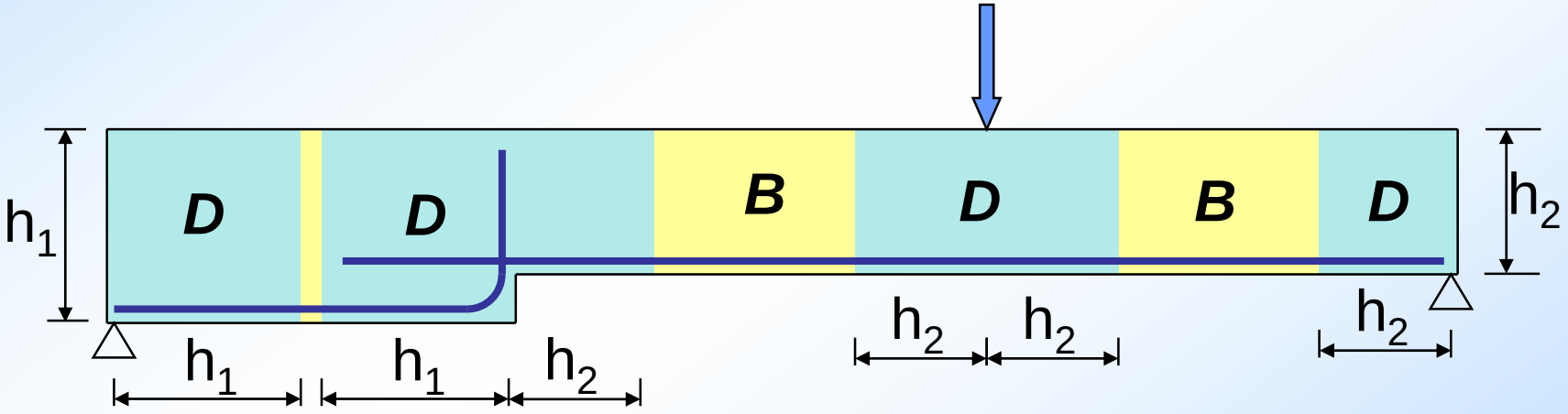
Prof. Dr.-Ing. Andreas Fischer

1 Einführung Stabwerkmodelle

Grundlage: Plastizitätstheorie

Abgrenzung von *Bernoulli-Bereichen* (B-Bereich)

Abgrenzung von *Diskontinuitätsbereichen* (D-Bereich)



geometrische und statische Diskontinuitäten

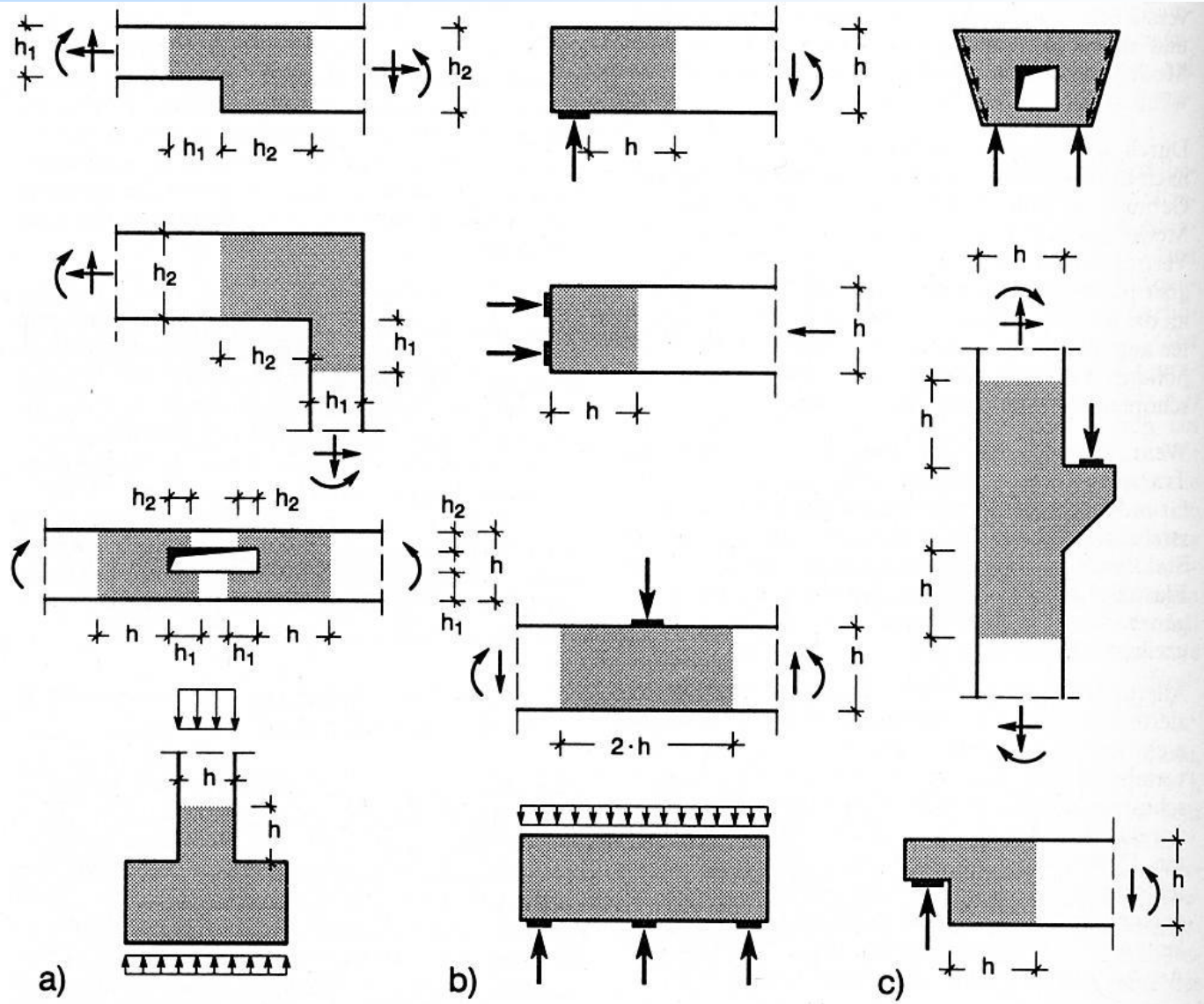
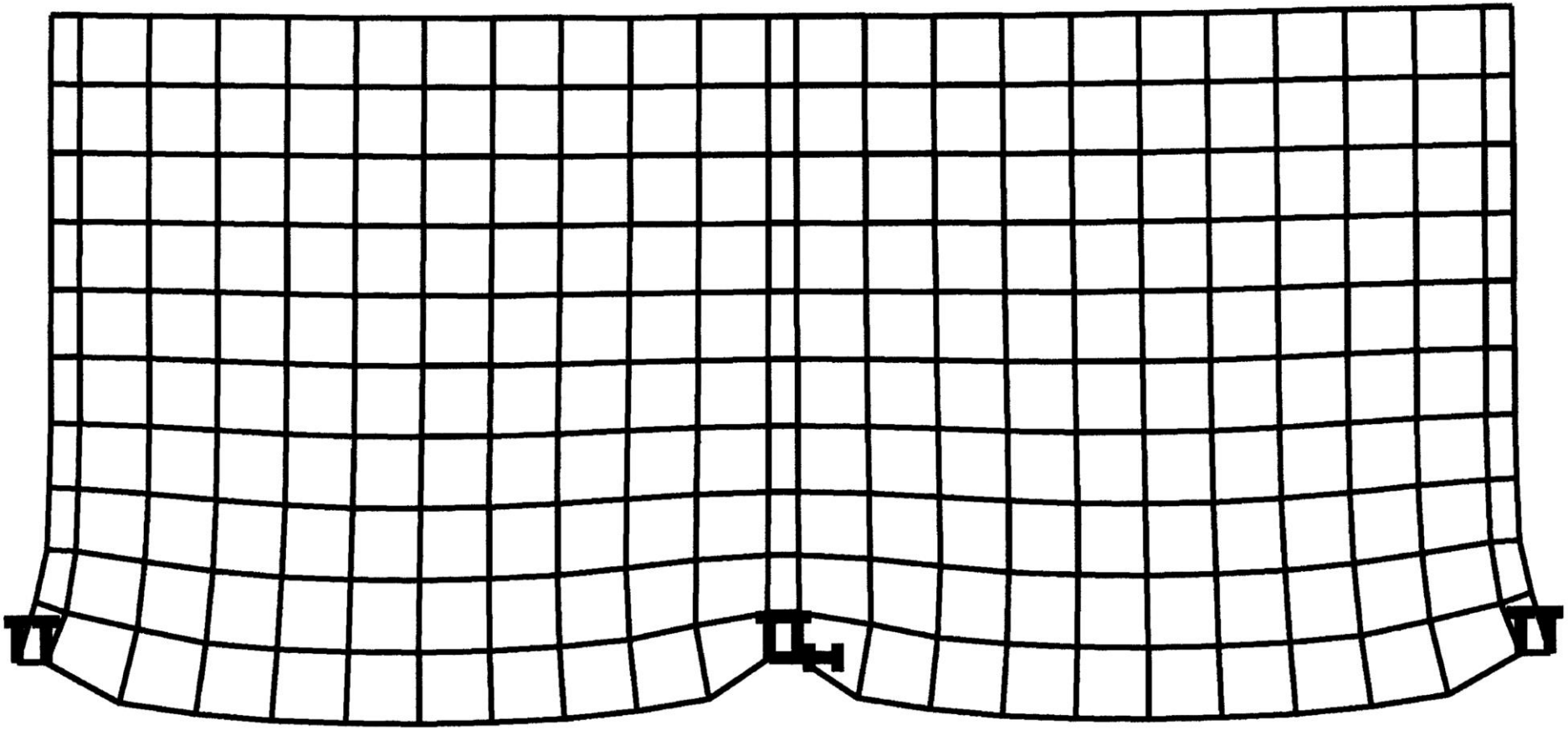


Bild 3.2-1. D-Bereiche (schraffierte Flächen) mit nichtlinearer Dehnungsverteilung infolge von
(a) geometrischen Diskontinuitäten,
(b) statischen Diskontinuitäten,
(c) statischen und geometrischen Diskontinuitäten

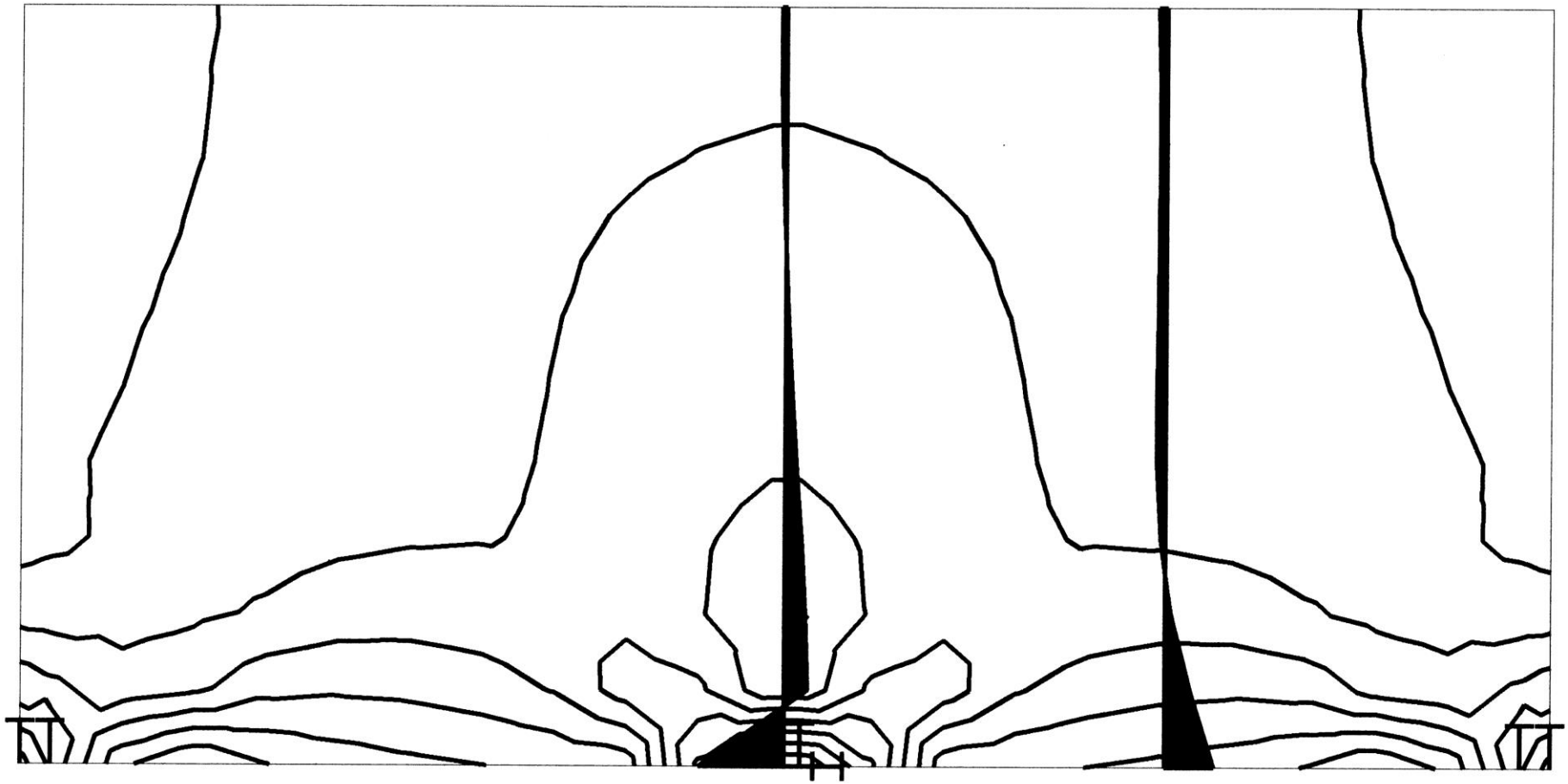
aus „Schlaich, Schäfer: Konstruieren im Stahlbetonbau“
Betonkalender 1984/89/93/98/01

Zweifeldrige Wandscheibe, Verformung

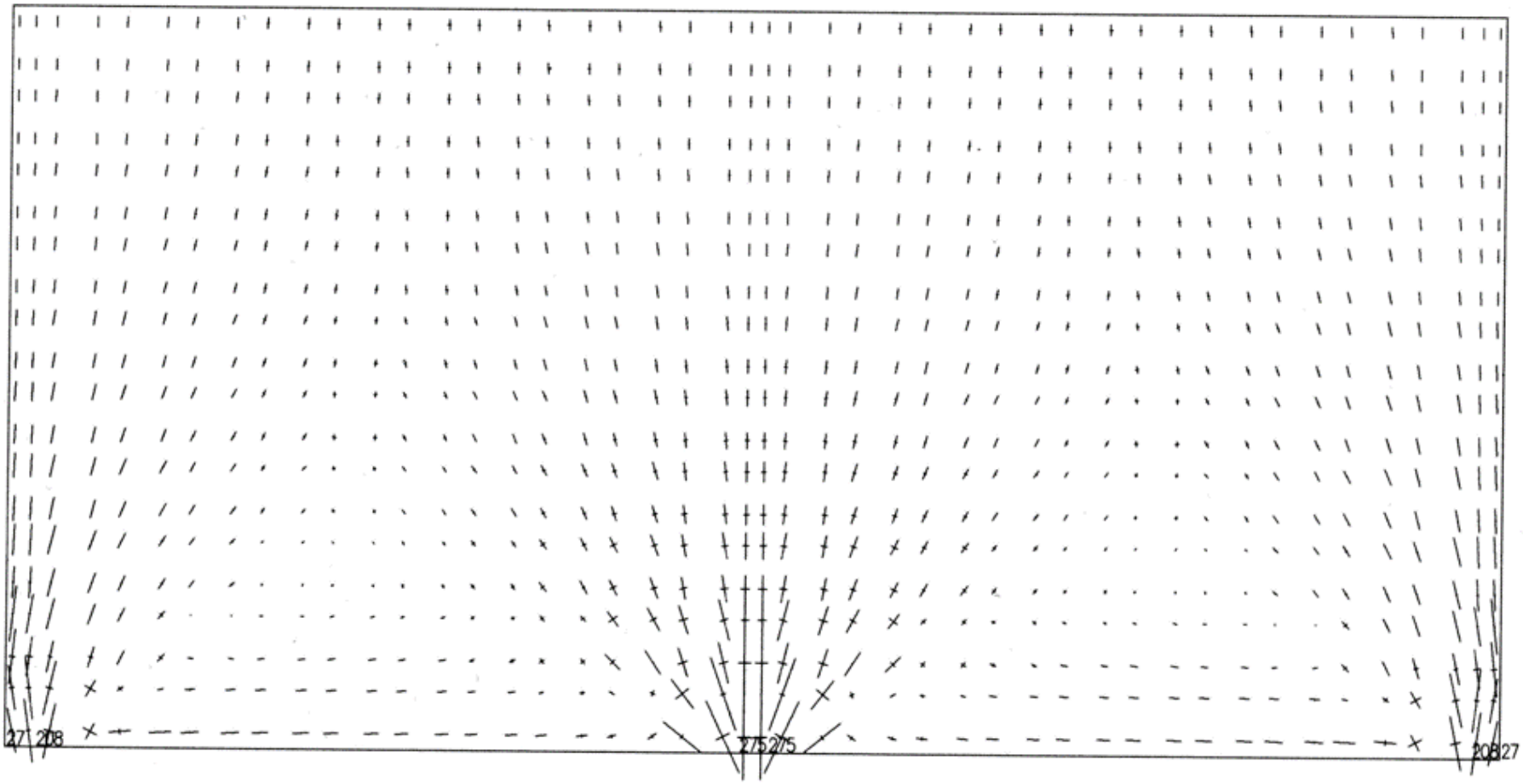


Zweifeldrige Wandscheibe, Spannungen

Höhenlinie für sigx in (kN/m2), Lastfall 1

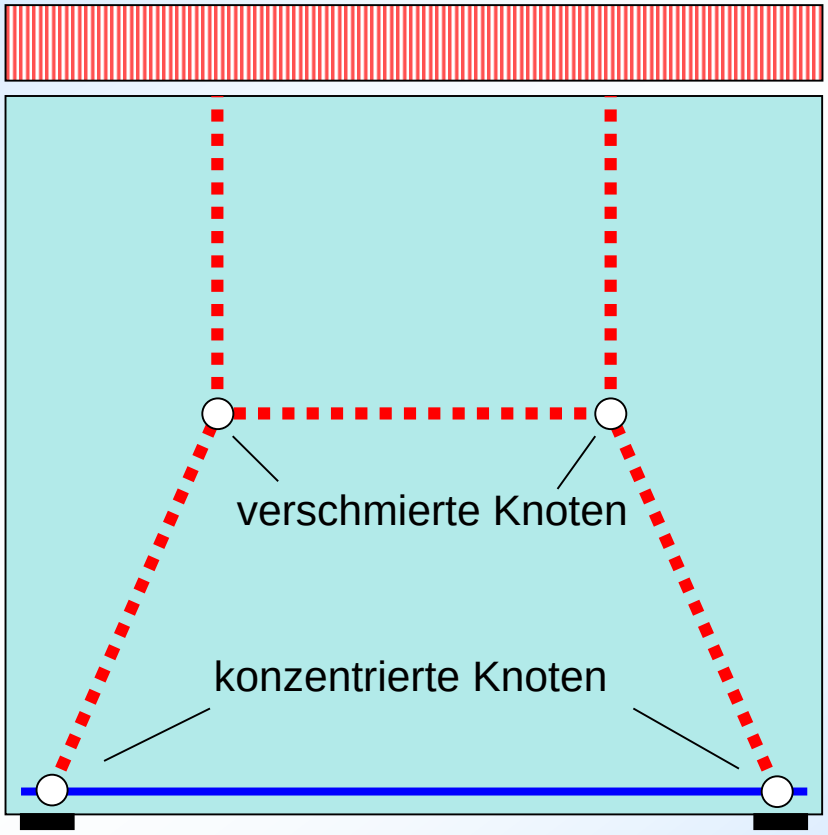


Zweifeldrige Wandscheibe, Spannungen



Auflagerkräfte Ay in (kN), Lastfall 1

1 Einführung



Wozu überhaupt Stabwerkmodelle ?

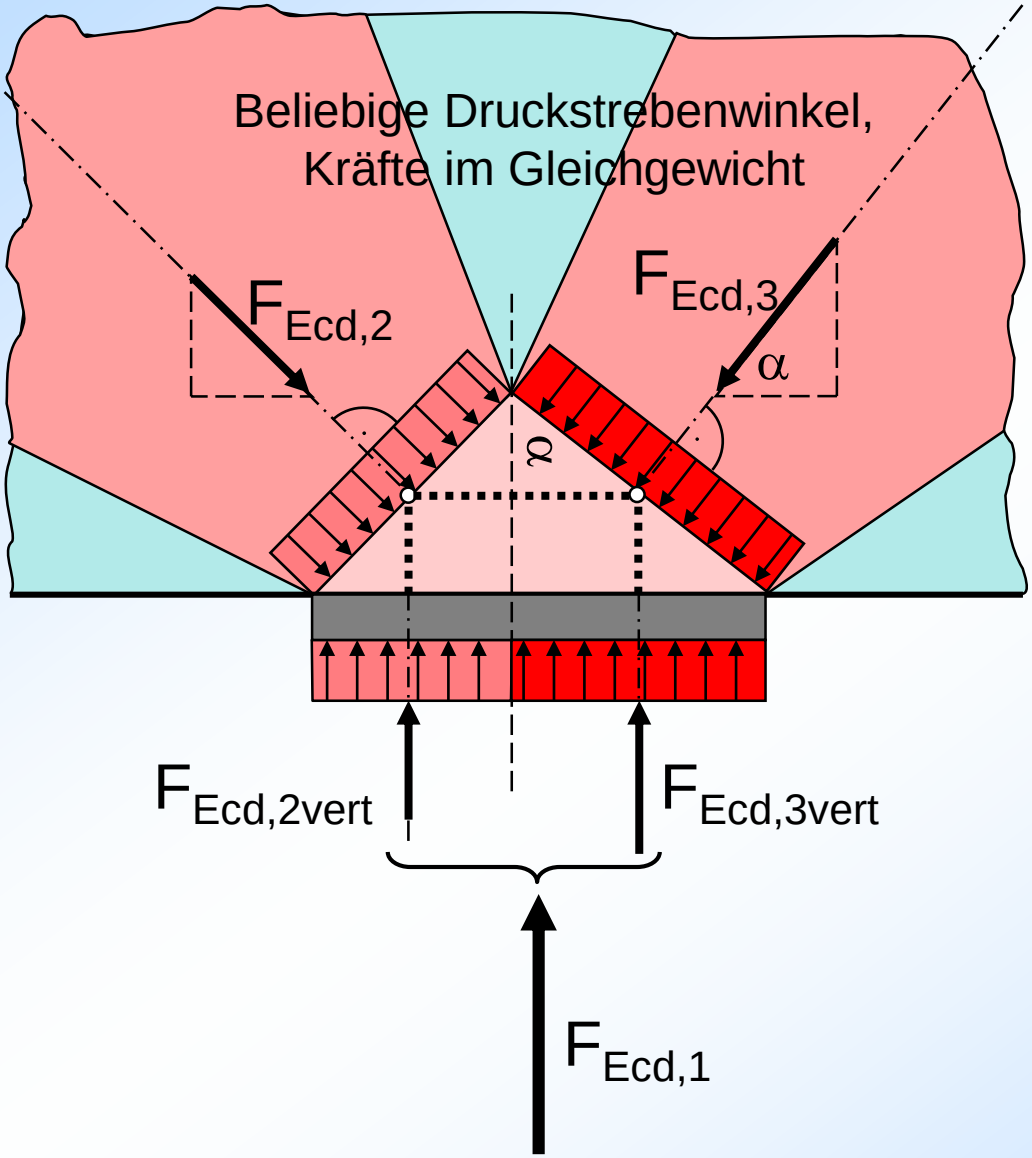
- Modellierung des Kraftflusses, Anschaulichkeit
- leichte Ermittlung der inneren Kräfte in komplexen Systemen durch Verwendung einfacher Grundelemente

  Stab: Druck- oder Zugstab

  Knoten: Kreuzungspunkt von mind. 3 Stäben, erfüllt Gleichgewicht
- einfache Methodik zur Ergänzung und zur Kontrolle von FE-Berechnungen
- Grundlage für die Bemessung von Scheiben, Konsolen, ausgeklinkten Auflagern etc. nach EC2

Druckknoten am Bauteilrand (CCC)

Entspricht EC2, Bild 6.26

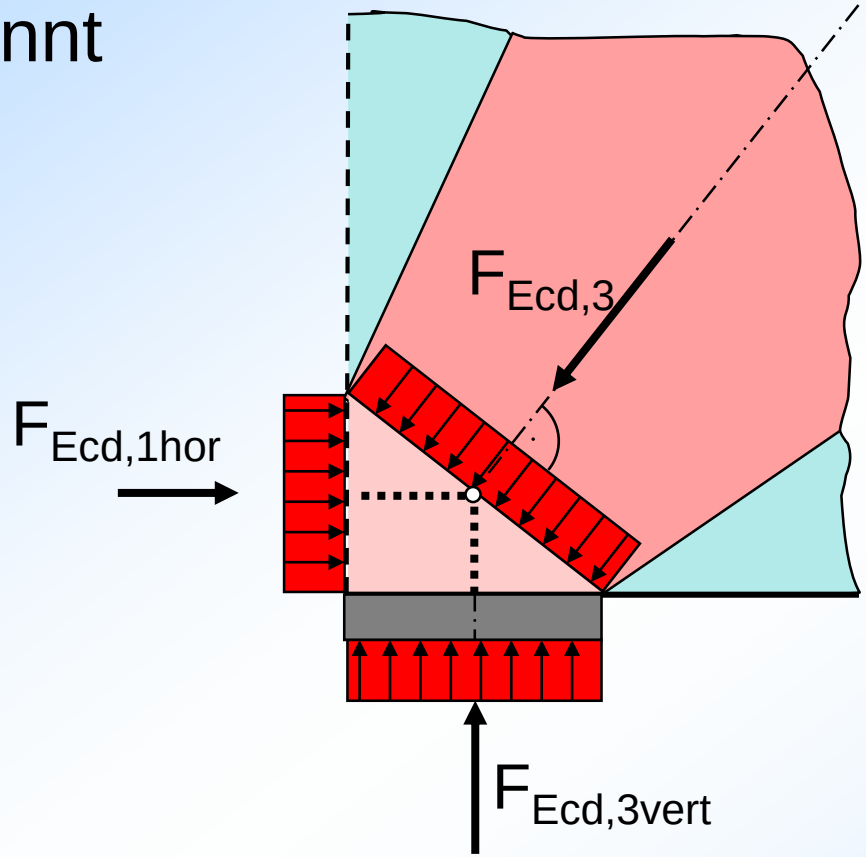


1. Lagerkraft wird entsprechend den Komponenten der beiden Druckstrebenkräfte aufgeteilt
2. Höhe des Knotendreiecks ergibt sich aus dem Verhältnis der Kraftkomponenten einer der beiden Druckstrebenkräfte
3. Alle am Knoten angreifenden Spannungen sind gleich groß (**hydrostatischer Knoten**)
4. Nachweis der Lagerpressung ist ausreichend

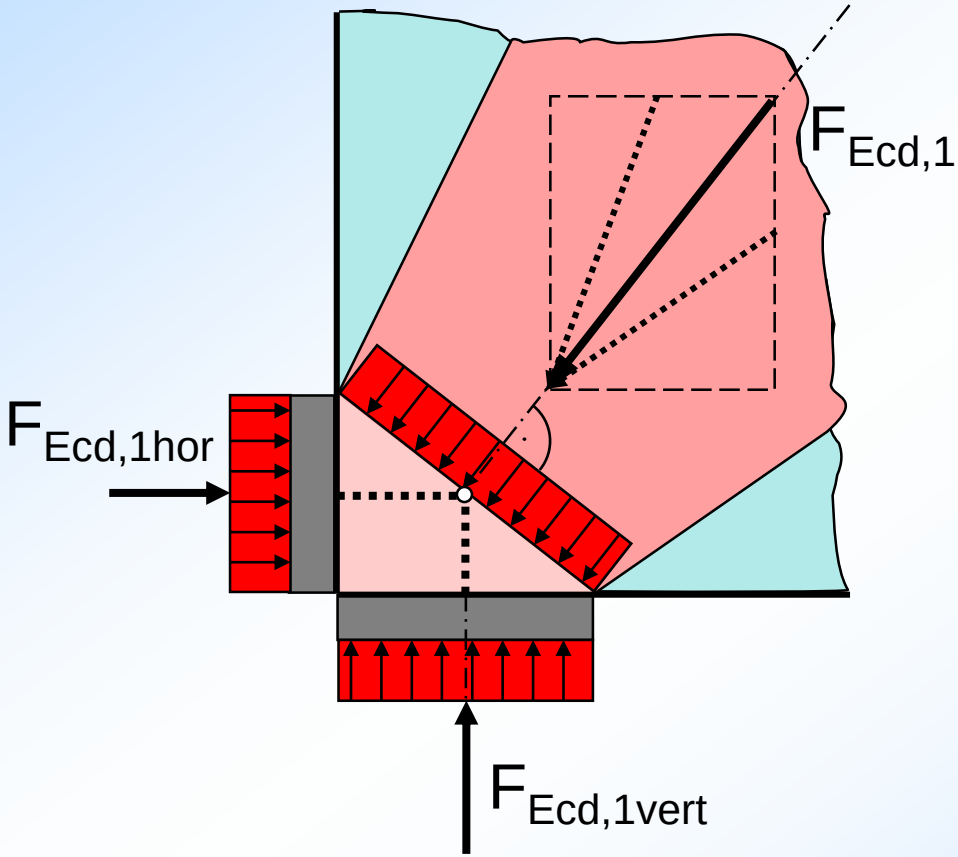
$$\sigma_{Rd,\max} = 1{,}1 \cdot \nu_2 \cdot f_{cd}$$

ν_2 erst ab C55/67

Druckknoten am Bauteilrand (CCC) durchtrennt



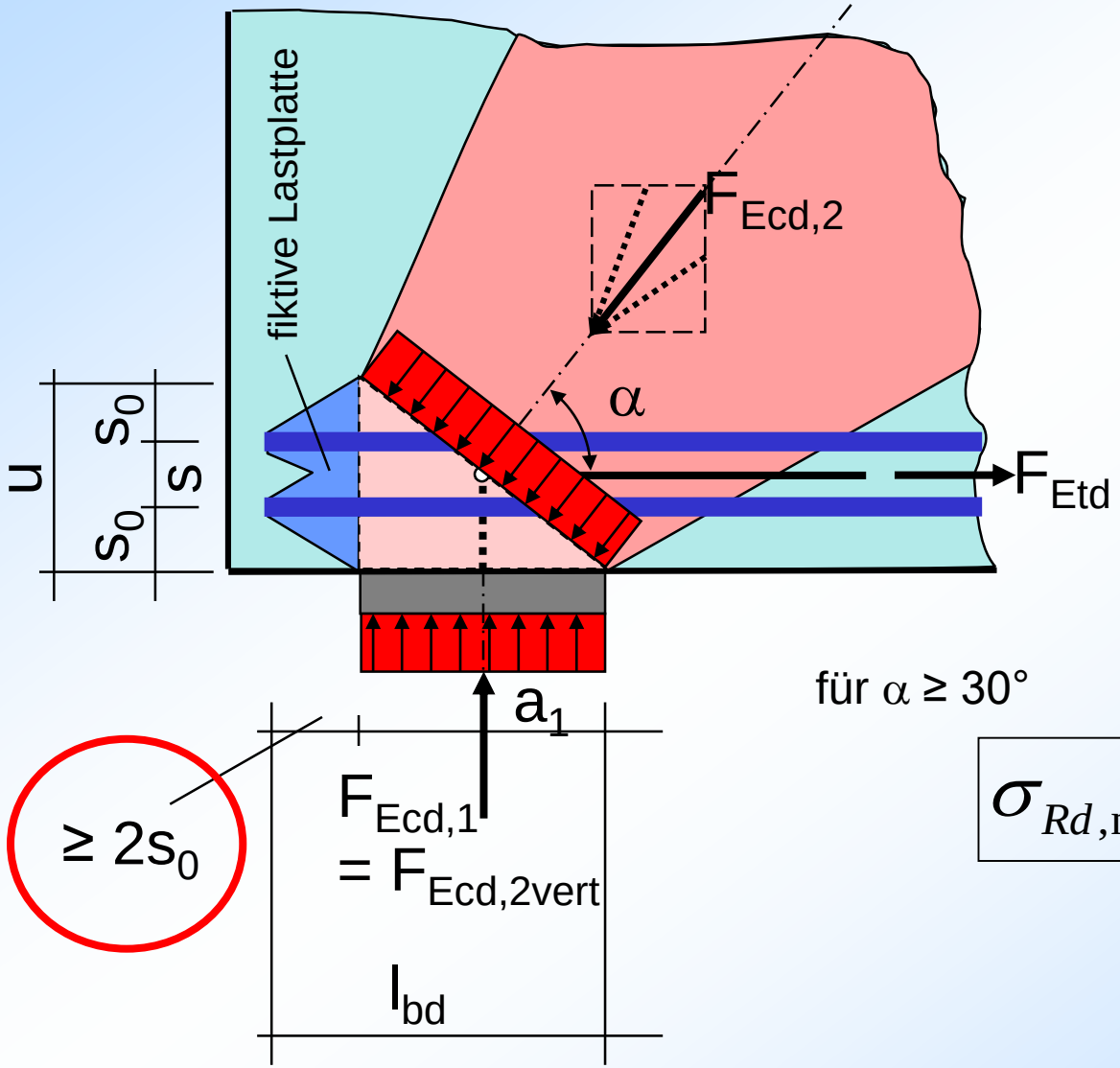
Druckknoten in Bauteilecke (CCC)



$$\sigma_{Rd,\max} = 1{,}1 \cdot \nu_2 \cdot f_{cd}$$

ν_2 erst ab C55/67

Druck-Zug-Knoten (TCC)

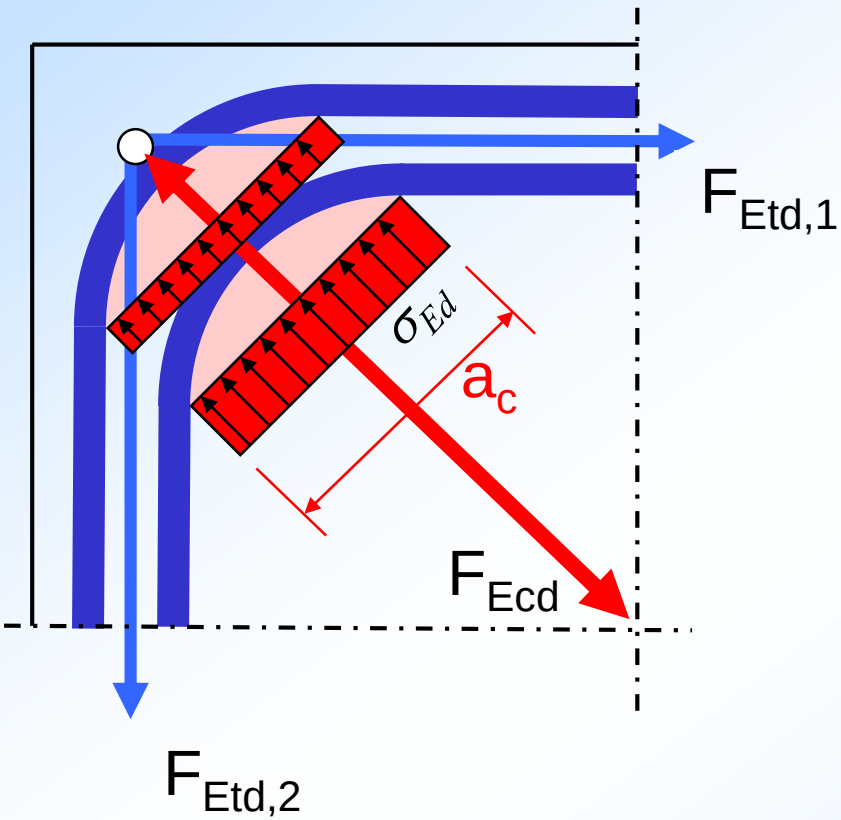


für α ≥ 30°

$$\sigma_{Rd,\max} = 0{,}75 \cdot \nu_2 \cdot f_{cd}$$

ν_2 erst ab C55/67

Knoten mit Umlenkung von Bewehrung (TTC)



EC2, Bild 6.28

Nachweis der zul. Druckspannung durch Einhaltung der Mindest-Biegerollendurchmesser d_{br} dringend zu empfehlen.

$$\boxed{\sigma_{Rd,\max} = 0{,}75 \cdot \nu_2 \cdot f_{cd}}$$

ν_2 erst ab C55/67

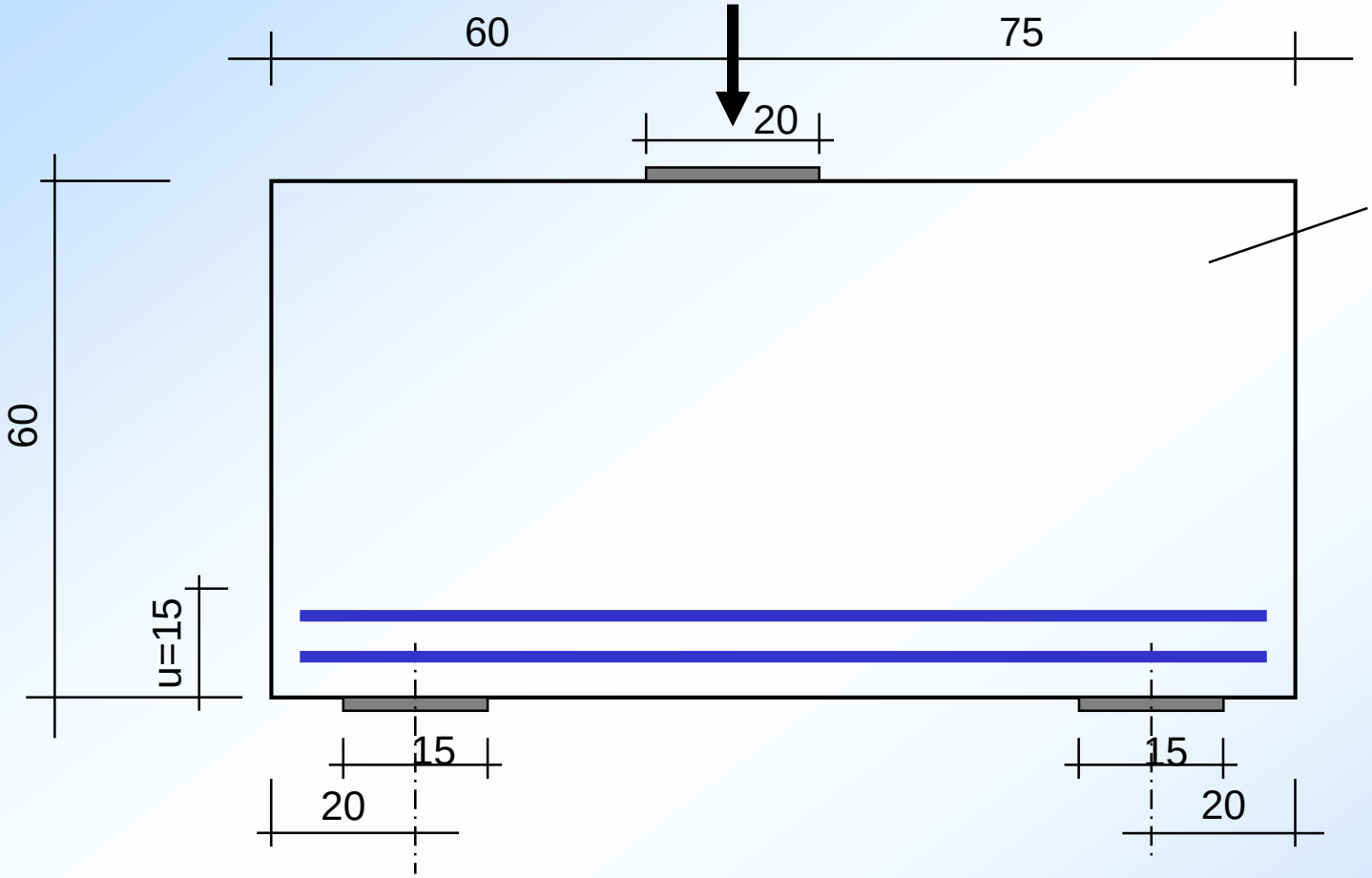
$$\sigma_{Ed} = \frac{F_{Etd}}{\underbrace{b_w \cdot d_{br}/2}_{\text{nach Kesselformel}}} = \frac{F_{Ecd}}{a_c \cdot b_w}$$

b_w Bauteilbreite senkrecht zur Zeichenebene

Ansatz von b_w setzt voraus, dass Spalten im Umlenk-knoten durch Querbewehrung vermieden wird.

Aufgabe:
Abfangekonstruktion C20/25

F_d = **650 kN**

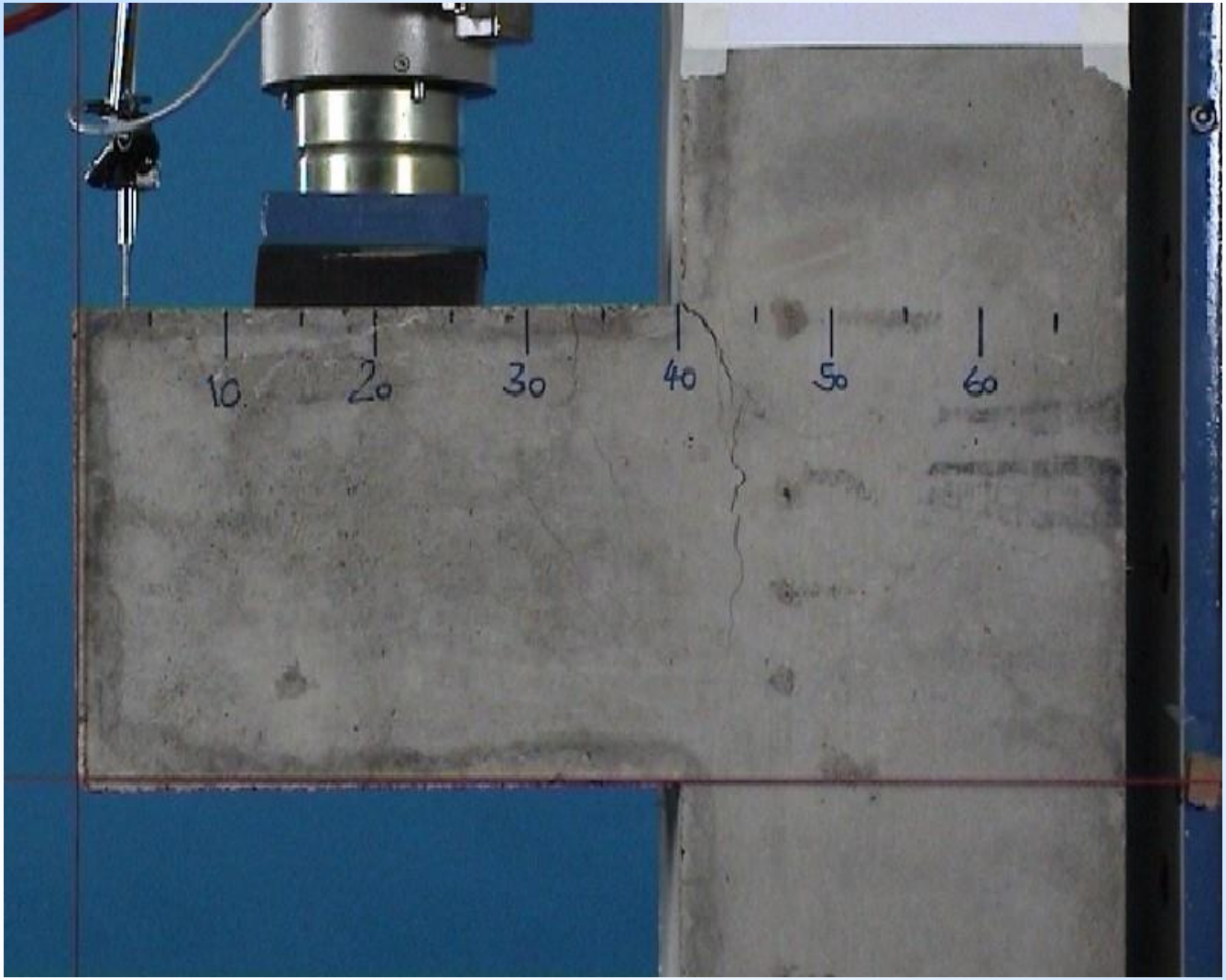


Eigengewicht soll unberücksichtigt bleiben,

Wanddicke = Lagerplattentiefe = 30 cm

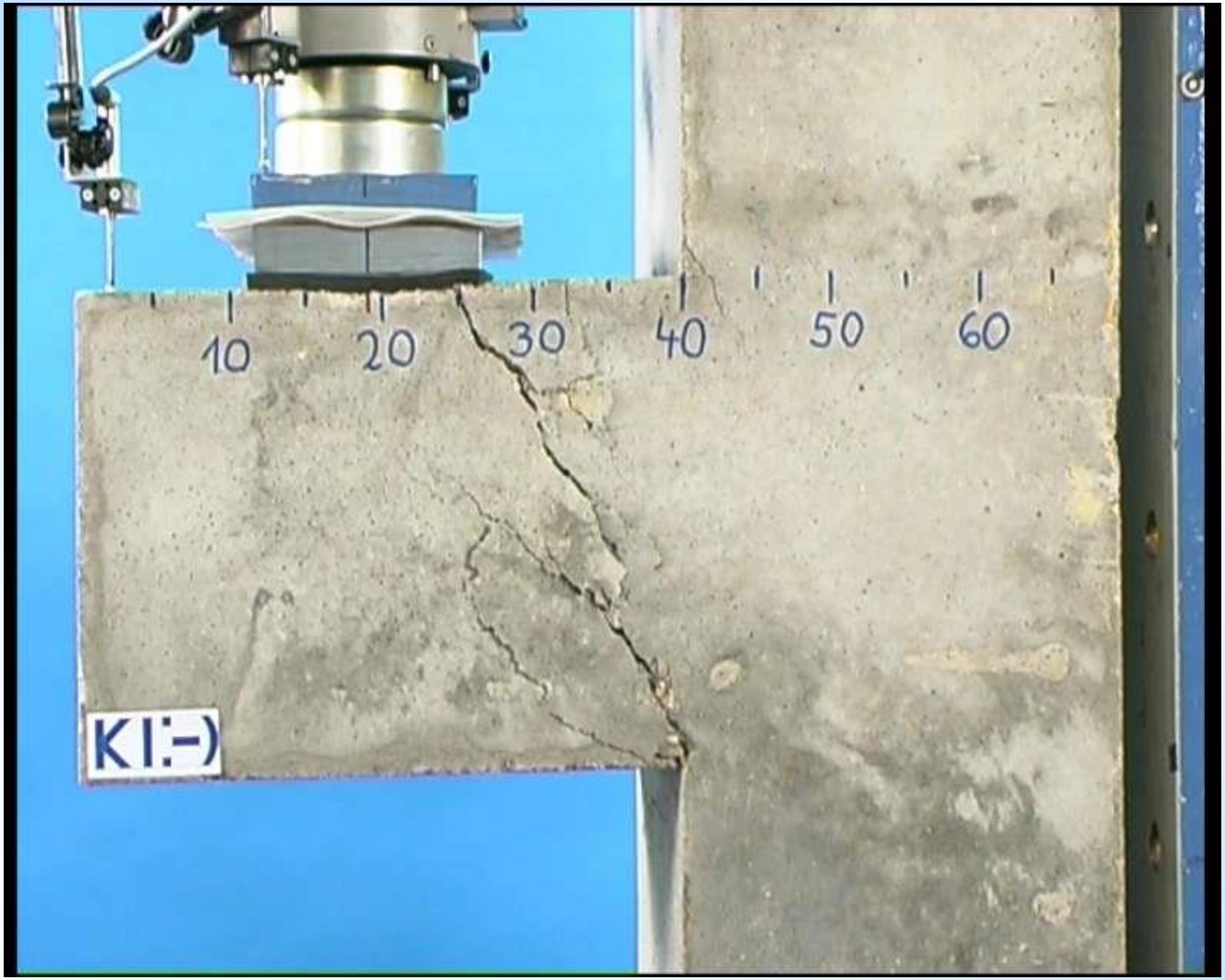
1. Ermitteln Sie über die **„genaue“** Konstruktion der Knoten die Stabgeometrie (Neigungswinkel der Druckstreben) und die Druckstrebenkräfte.
2. Ermitteln Sie die Spannungen an den Lastplatten (einschl. fiktiver Lastplatten) und vergleichen Sie diese mit der jeweils zulässigen Spannung.

2 Konsolen



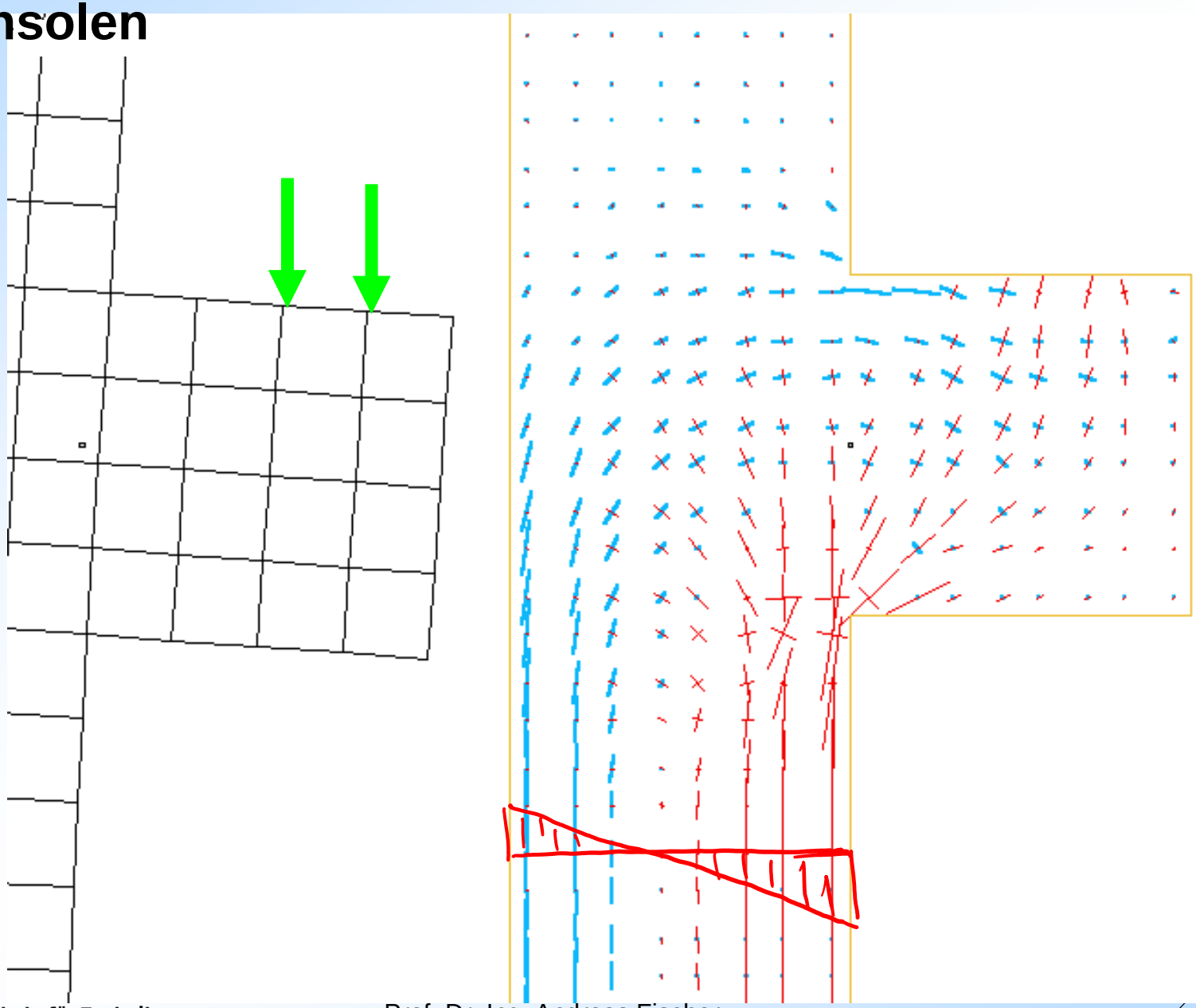
1. Projekt: KI-SMILE (Konstruktiver Ingenieurbau - Simulation, Motivation, Interaktion in Lehre und Experiment) : neue Medien im konstruktiven Ingenieurbau; Schlussbericht; [Laufzeit: 01.03.2001 - 31.12.2003] / [Projektpartner: Fachhochschule Potsdam, FB Bauingenieurwesen. Projektleitung: J. Vielhaber ... Fachhochschule Potsdam, FB Design. Leitung: M. Krohn. TFH Berlin, FB III. Leitung: A. Fischer. TU Berlin, Institut für Sprache und Kommunikation. Leitung: C. Schwender] https://edocs.tib.eu/files/e01fb06/516981633.pdf

2 Konsolen

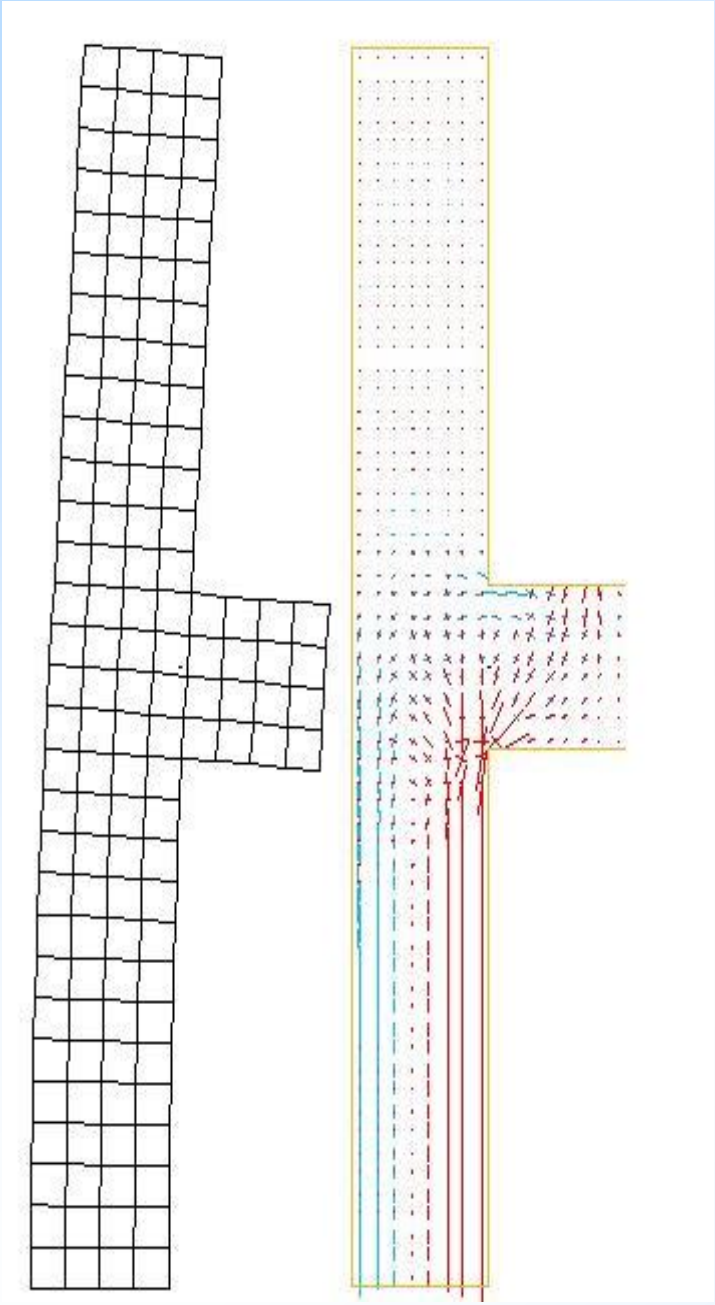


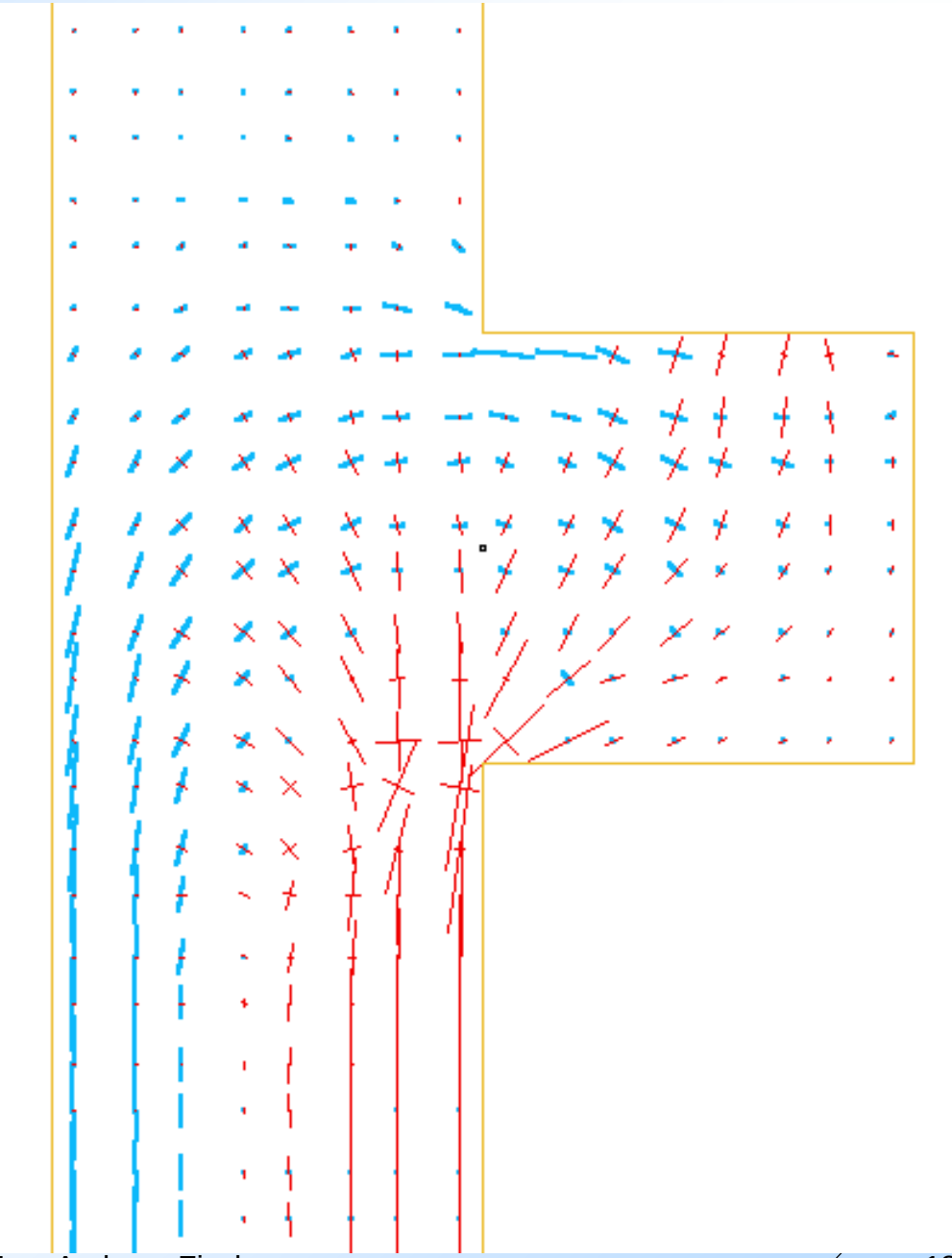
1. Projekt: KI-SMILE (Konstruktiver Ingenieurbau - Simulation, Motivation, Interaktion in Lehre und Experiment) : neue Medien im konstruktiven Ingenieurbau; Schlussbericht; [Laufzeit: 01.03.2001 - 31.12.2003] / [Projektpartner: Fachhochschule Potsdam, FB Bauingenieurwesen. Projektleitung: J. Vielhaber ... Fachhochschule Potsdam, FB Design. Leitung: M. Krohn. TFH Berlin, FB III. Leitung: A. Fischer. TU Berlin, Institut für Sprache und Kommunikation. Leitung: C. Schwender] https://edocs.tib.eu/files/e01fb06/516981633.pdf

2 Konsolen



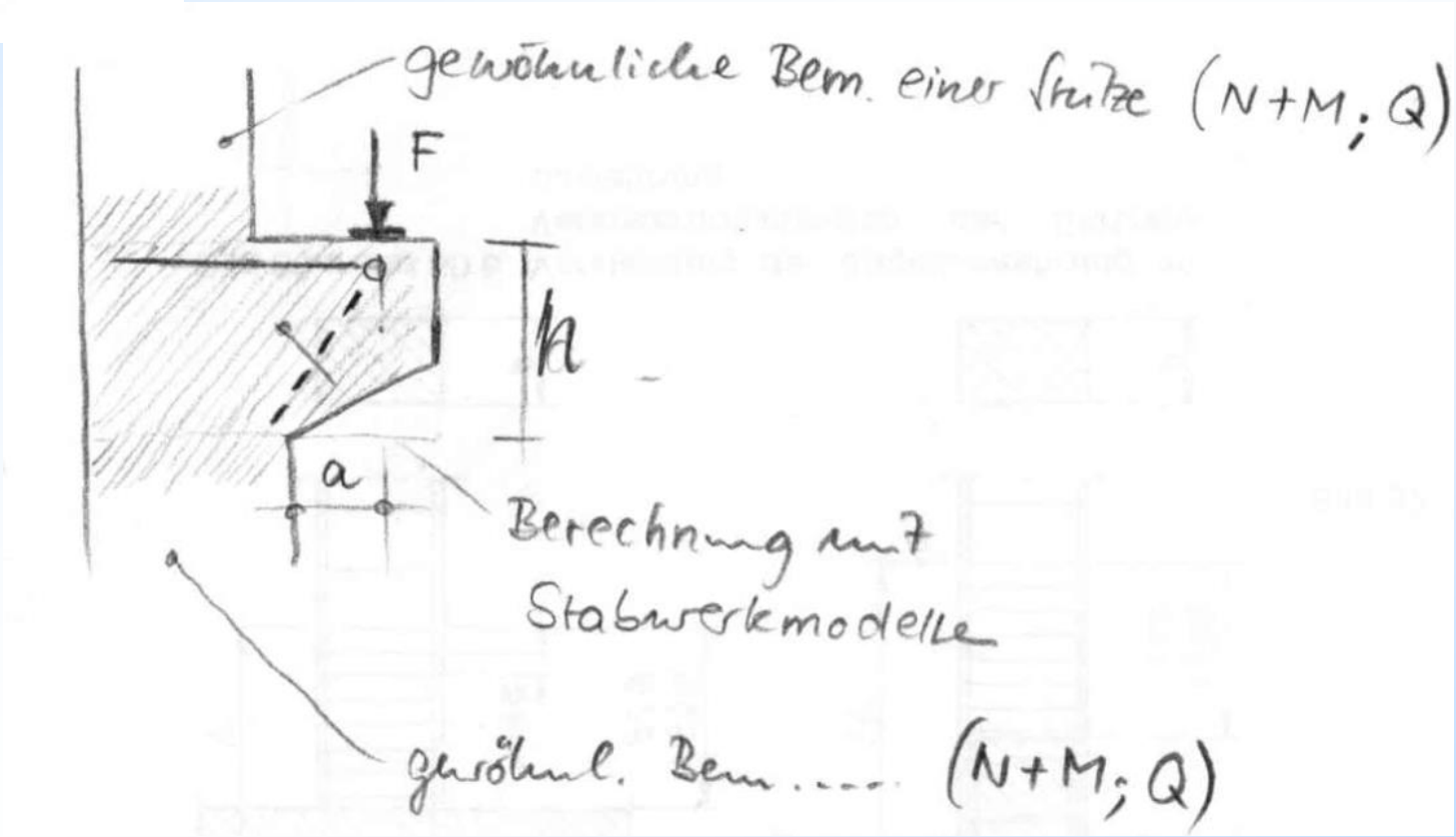
Stabwerkmodelle



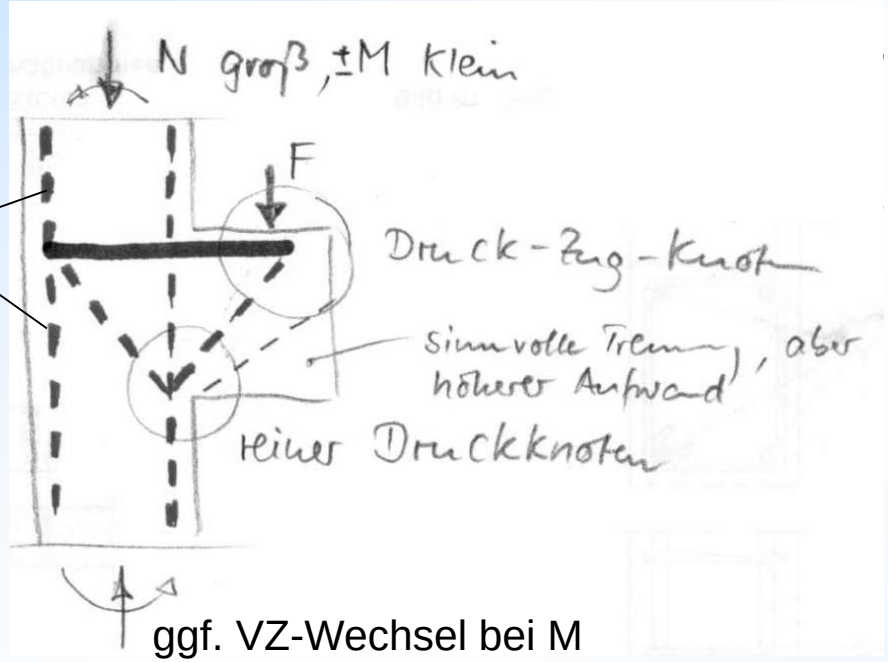


<u>Konsolen</u> = kurze „Kragträger“, besser: Kragscheiben, die nicht mehr nach der Balkentheorie bemessen werden können.

$\frac{a}{h} \leq 1{,}0$



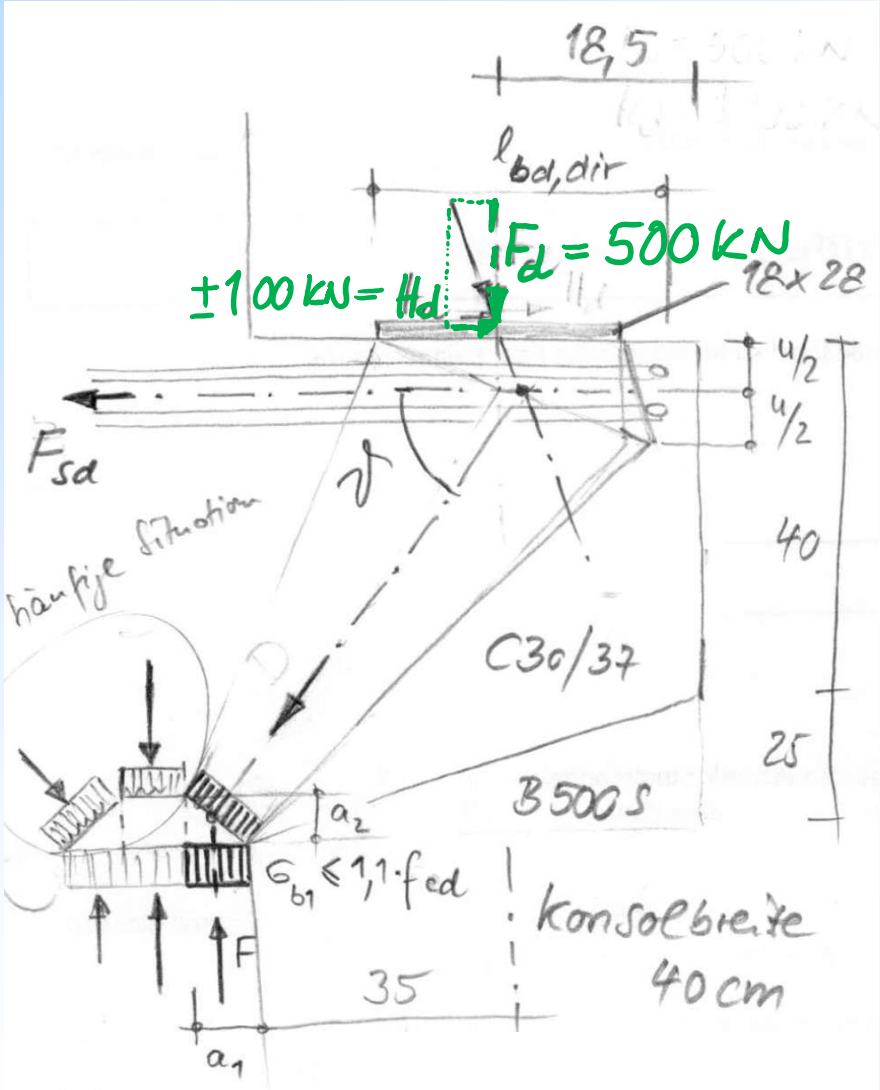
bei neg. M und geringerem N kann dieser Gurt auch ein Zuggurt sein.



Lasteinleitung mittels einfacher, unbewehrter Elastomerlager zur Vermeidung großer Kantenpressungen sehr empfehlenswert (dabei Mindestrandabstände beachten).
Sofern nicht besonders nachgewiesen, sollte eine zusätzliche H-Kraft infolge unberücksichtigter Zwangbeanspruchung von ± 0,2·F in der Mitte des Lagers berücksichtigt werden.

hohe Konsole,
wenn $\frac{a}{h} \leq 0{,}4$
„Berechnung wie
wandartige Träger"

Beispiel:



Bauteil mit häufigem Zutritt von Außenluft

1. Nachweis der Lagerpressung
2. Ermittlung von a_1
3. Vorschätzen von u/2 und a_2
4. Ermittlung von $F_{cd,h}$ und F_{sd}
5. Kontrolle von a_2
6. Bewehrungswahl und Kontrolle u/2, ggf. red u an gedachter Lastplatte beachten
7. Nachweis der Verankerungslänge
8. Nachweis am Umlenkknoten und der Übergreifungslänge mit dem Zuggurt, bzw. beim Druckgurt Nw der Verankerungslänge ab der Stützenvorderkante

$F_d = 500\ kN$ C30/37 $f_{cd} = \frac{0{,}85 \cdot 30}{1{,}5} = 17{,}0\ MN/m^2$

$H_d = 0{,}20 \cdot 500 = 100\ kN$

Konsole mit $0{,}4 \leq \frac{a}{h} \leq 1{,}0$ $\frac{a}{h} = \frac{35}{65} = 0{,}54$

1. Nachweis der Lagerpressung

$\sigma_l = \frac{0{,}500}{0{,}18 \cdot 0{,}28} = 9{,}9\ MN/m^2 \leq 0{,}75 \cdot 17 = 12{,}75$ generell empfehlenswert: (Ausführung mit Schlaufen)

2. Ermittlung von a_1

$\sigma_1 = \frac{0{,}500\ MN}{a_1 \cdot 0{,}40\ m} \leq 1{,}1 \cdot 17{,}0$ in der Regel Knoten unter allseitigem Druck $\Rightarrow a_1 = 0{,}067\ m$

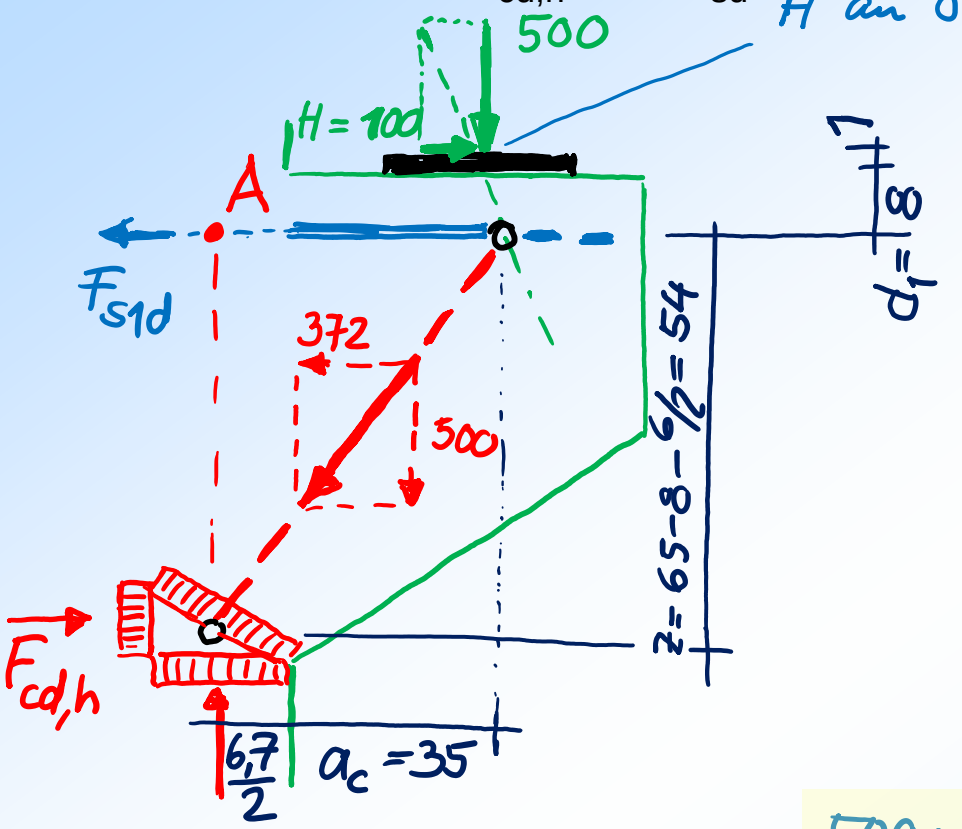
3. Vorschätzen von $u/2$ und a_2

$a_2 \approx 6\ cm$

$u/2 \approx 8\ cm$

4. Ermittlung von $F_{cd,h}$ und F_{sd}

H an ok Lager liegt auf sicherer Seite



$$\Sigma M_A = 0 \quad \Rightarrow F_{cd,h} = \frac{500 \cdot 0{,}3835 + 100 \cdot 0{,}09}{0{,}54} = 372\ \text{kN}$$

$$\Sigma F_{hor} = 0 \quad \Rightarrow F_{sd} = 472\ \text{kN}$$

5. Kontrolle von a_2

$$\text{erf}\, a_2 = \frac{0{,}372\ \text{MN}}{0{,}40\text{m} \cdot (1{,}1 \cdot 17{,}0\ \text{MN/m}^2)} = 0{,}05 \leq 0{,}06\ \text{m}$$

geschätzt

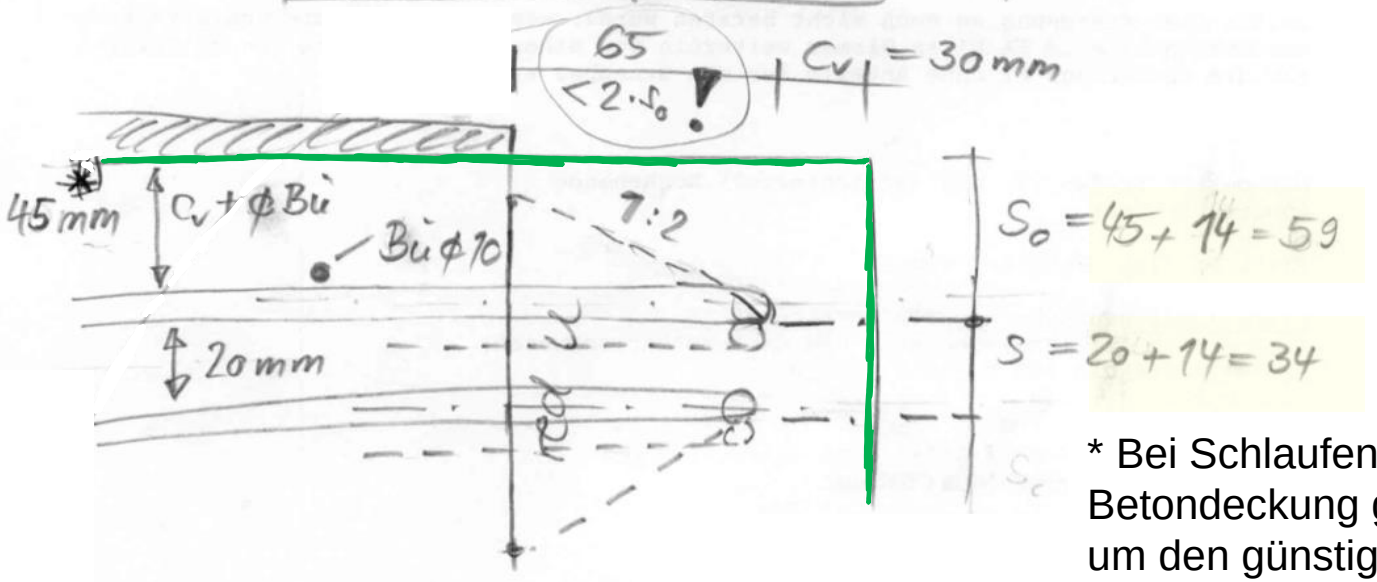
6. Bewehrungswahl und Kontrolle u/2, ggf. red u an gedachter Lastplatte beachten

$$\text{erf } A_s = \frac{0{,}472}{435} \cdot 10^4 = 10{,}85 \text{ cm}^2$$

XC3 ⇒ mind C20/25

⇒ $c_v = 20 + 15 = 35$

$\boxed{\text{gew. } 4 \text{ Schlaufen } \phi 14} \hat{=} 12{,}32 \text{ cm}^2$



* Bei Schlaufen muss die Betondeckung größer sein als $3 \cdot ø_s$, um den günstigen α_1-Wert bei der Verankerungslänge nutzen zu können.

Schwerachse der Bew. $\frac{u}{2} = 59 + \frac{34}{2} = 76 \text{ mm} \geq 80 \text{ mm}$ (geschätzt)

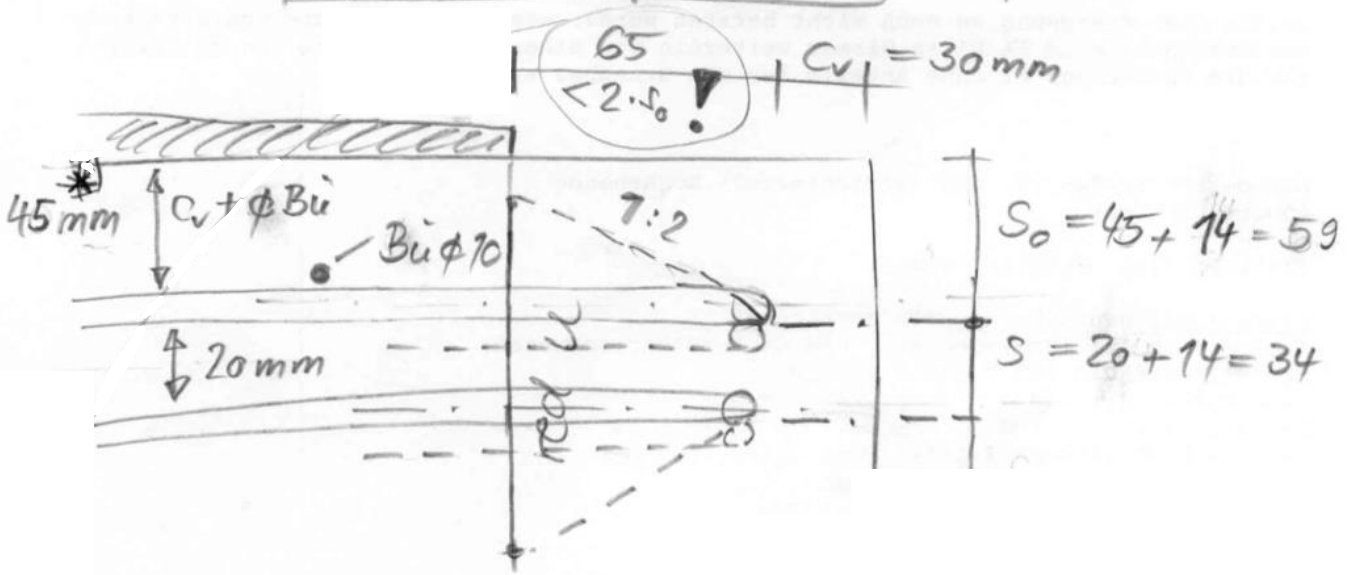
6. Bewehrungswahl und Kontrolle u/2, ggf. red u an gedachter Lastplatte beachten

$$\text{erf } A_s = \frac{0{,}472}{435} \cdot 10^4 = 10{,}85 \text{ cm}^2$$

XC3 ⇒ mind C20/25

⇒ $c_v = 20 + 15 = 35$

$\boxed{\text{gew. 4 Schlaufen } \phi 14} \hat{=} 12{,}32 \text{ cm}^2$



Hinweis zur Betondeckung der Schlaufen: die 30mm können auch als richtig betrachtet werden, wenn im Fertigteilwerk eine besondere Qualitätskontrolle vorgenommen wird (s. EC2, Tab. 4.3.N).

Spannungsnachweis an fiktiver Lastplatte:

$$\sigma_c = \frac{0{,}472 \text{ MN}}{0{,}40 \text{ m} \cdot 0{,}099 \text{ m}} = 11{,}9 \leq 12{,}75 \text{ MN/m}^2$$

$$\text{red } u = 34 + 2 \cdot \frac{65}{2} = 99 \text{ mm}$$

7. Nachweis der Verankerungslänge unter der Lastplatte

gew. Verankerung mit liegenden Schlaufe $d_{br} \geq 15 \cdot d_s \Rightarrow \alpha_1 = 0{,}5$

$c_v \geq 3 \cdot d_s$

mäßiger V.

$$\text{erf } l_{bd,dir} = \frac{2}{3} a_1 \cdot \alpha_4 \cdot \frac{\text{erf } A_s}{\text{vorh } A_s} \cdot 71$$

günstiges Querdr.

$\geq 0{,}3$

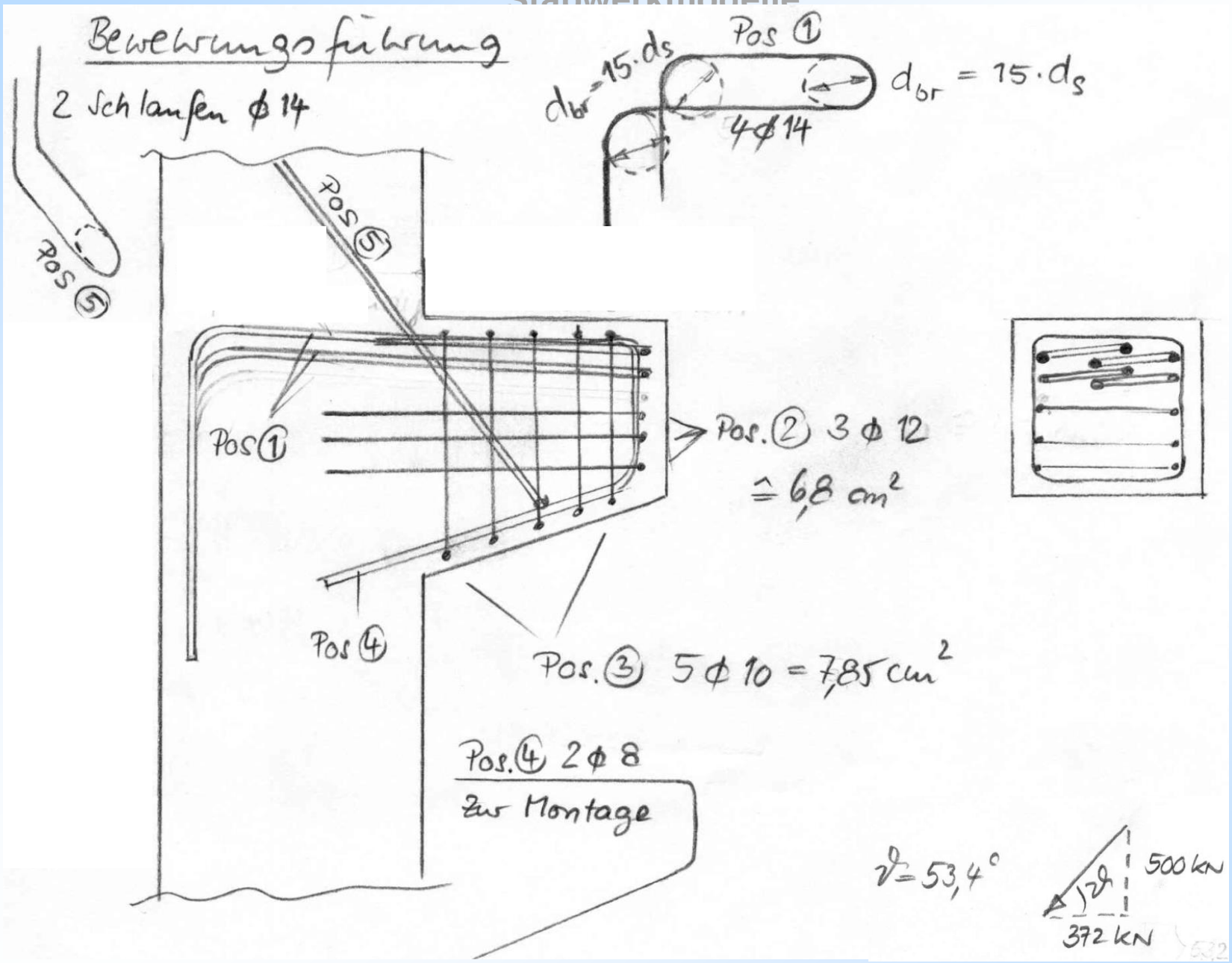
$$= \frac{2}{3} \cdot 0{,}5 \cdot \frac{10{,}85}{12{,}32} \cdot 71 \approx 21$$

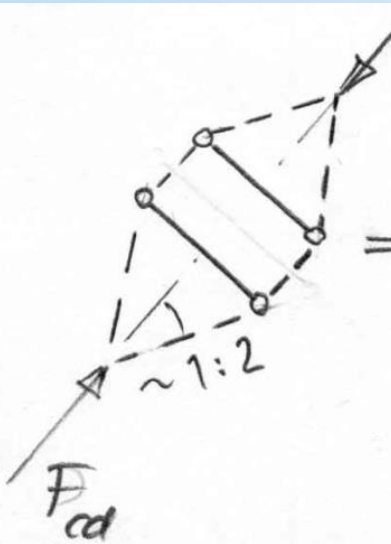
$$\geq \frac{d_{br}}{2} + d_s = \frac{15 \cdot 1{,}4}{2} + 1{,}4 = 11{,}9 \text{ cm}$$

$$\text{vorh } l_{b,dir} = 9 + 18{,}5 - 3{,}0 = 24{,}5 \text{ cm} \geq 21 \text{ cm}$$

8. Nachweis am Umlenkknoten und der Übergreifungslänge mit dem Zuggurt, bzw. beim Druckgurt Nw der Verankerungslänge ab der Stützenvorderkante

hier mangels Stützendaten nicht geführt


Bewehrungsführung
2 Schlaufen ϕ 14
Pos ⑤
Pos ⑤
Pos ①
$d_{br} = 15 \cdot d_s$
$d_{br} = 15 \cdot d_s$
4ϕ14
Pos ①
Pos. ② 3 ϕ 12
≙ 6,8 cm²
Pos ④
Pos. ③ 5 ϕ 10 = 7,85 cm²
Pos. ④ 2 ϕ 8
zur Montage
ϑ = 53,4°
500 kN
372 kN



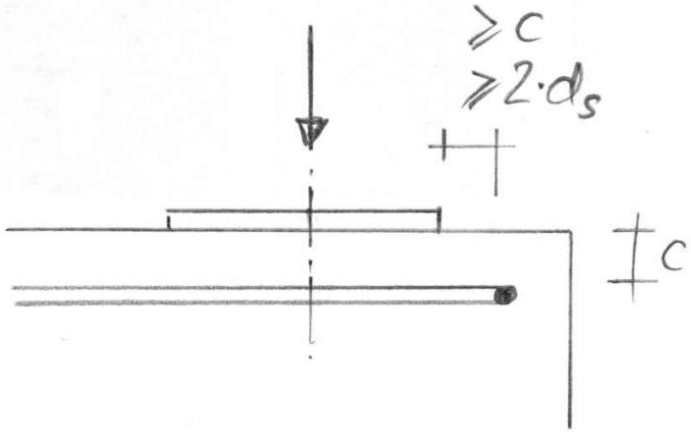
$F_{cd} = 0{,}500 / \sin 53{,}4° = 0{,}623\ MN$

$\Rightarrow F_{sd} \approx 2 \cdot \frac{F_{cd}}{4} \Rightarrow erf\ A_s = \frac{0{,}312 \cdot 10^4}{435} = \underline{\underline{7{,}2\ cm^2}}$

vereinfachend horizontal u. vertikal
Pos ② Pos ③

einlegen.

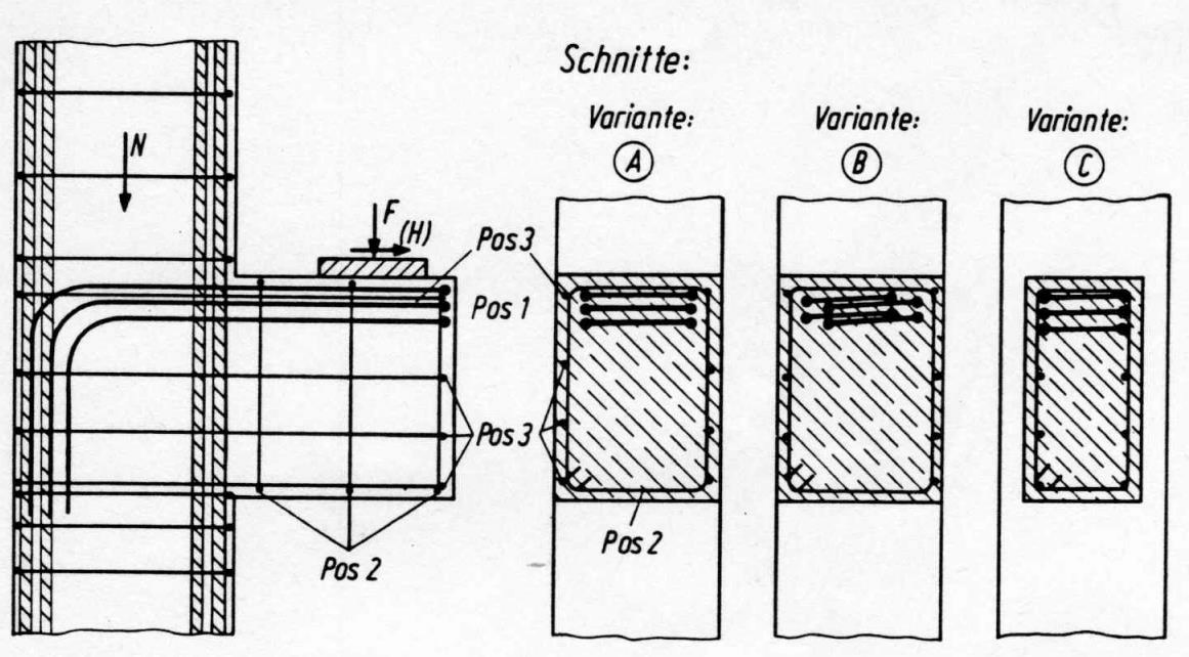
weitere konstruktive Forderung

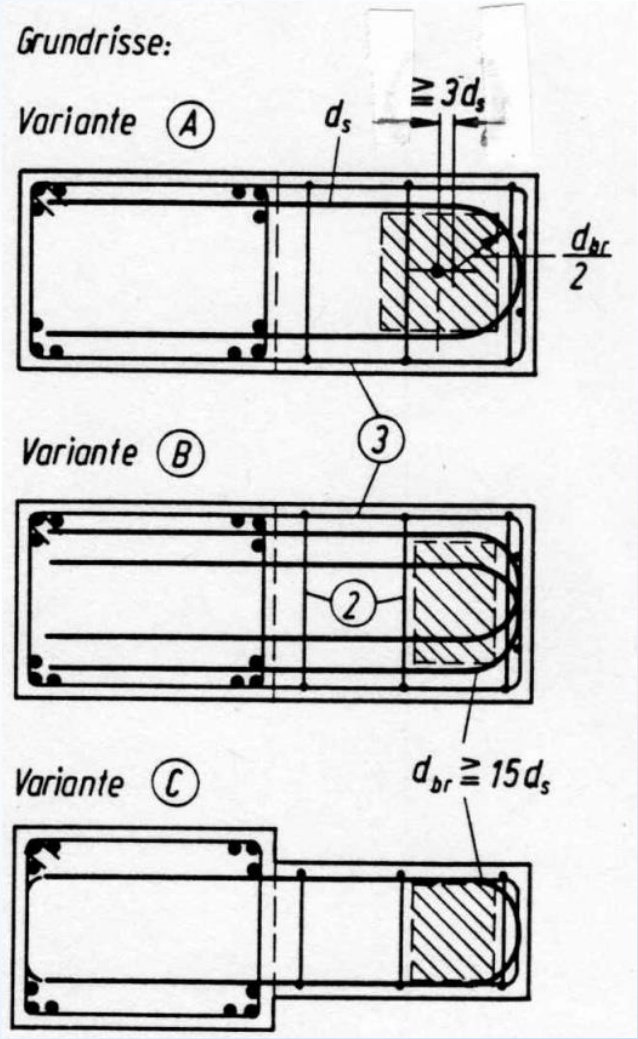


$c = 4{,}5\ cm$

$2 \cdot d_s = 2 \cdot 1{,}4 = 2{,}8\ cm$

vorh: $18{,}5 - 9{,}0 - 3{,}0 - 1{,}4 = 5{,}1\ cm$





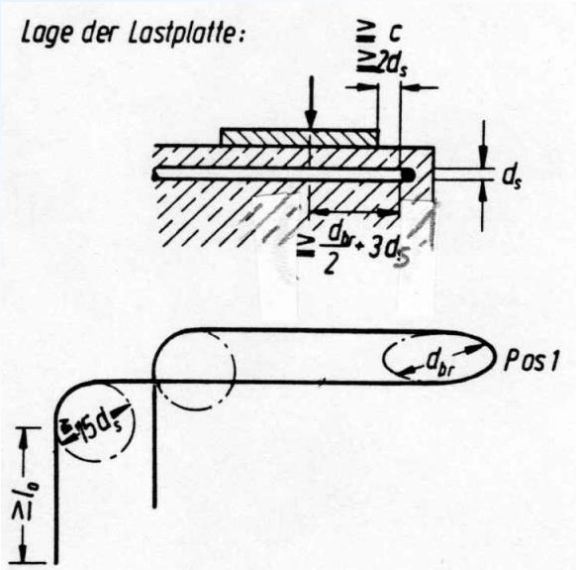


Bild 4.5-7. Zweckmäßige Bewehrungen in Konsolen (Modell Bild 4.5-1a)

entnommen aus:
Schlaich/Schäfer: Konstruieren im Stahlbetonbau in Bk 98/II

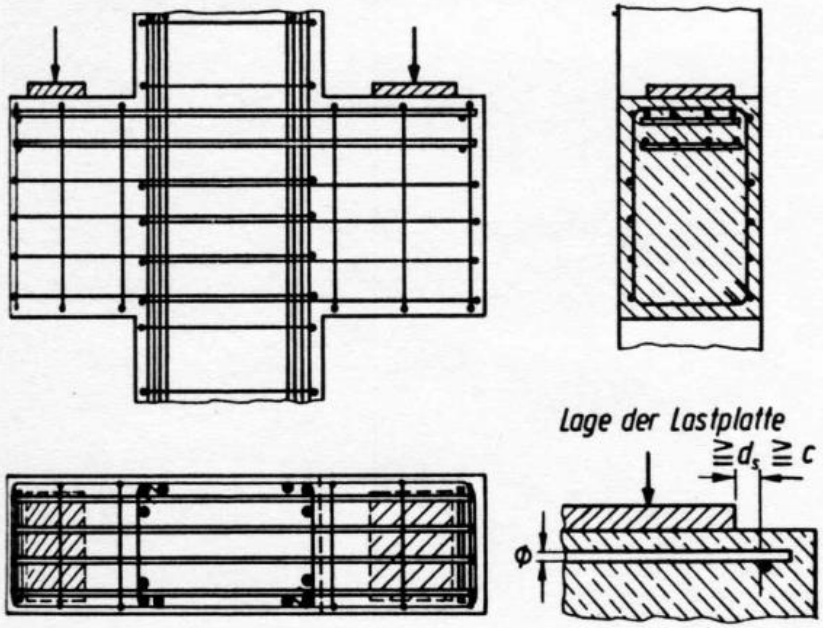


Bild 4.5-8. Verankerung der Gurtbewehrung von Konsolen mit angeschweißtem Querstab

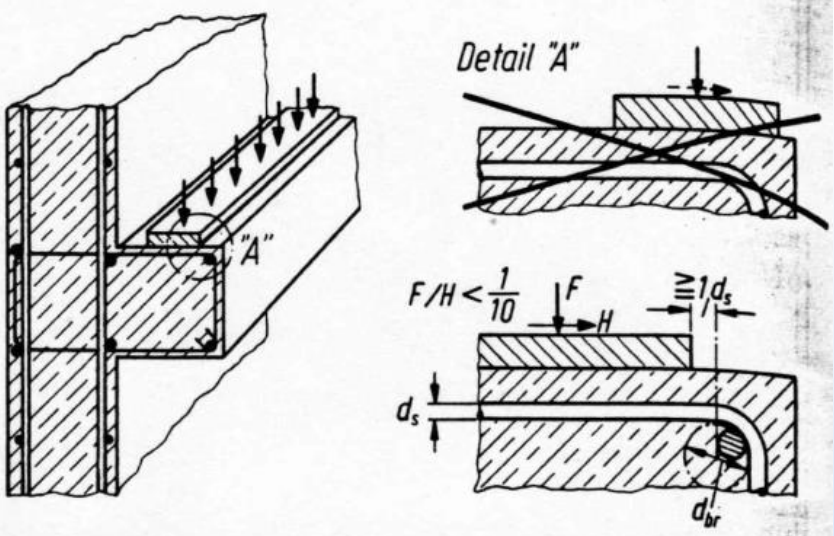
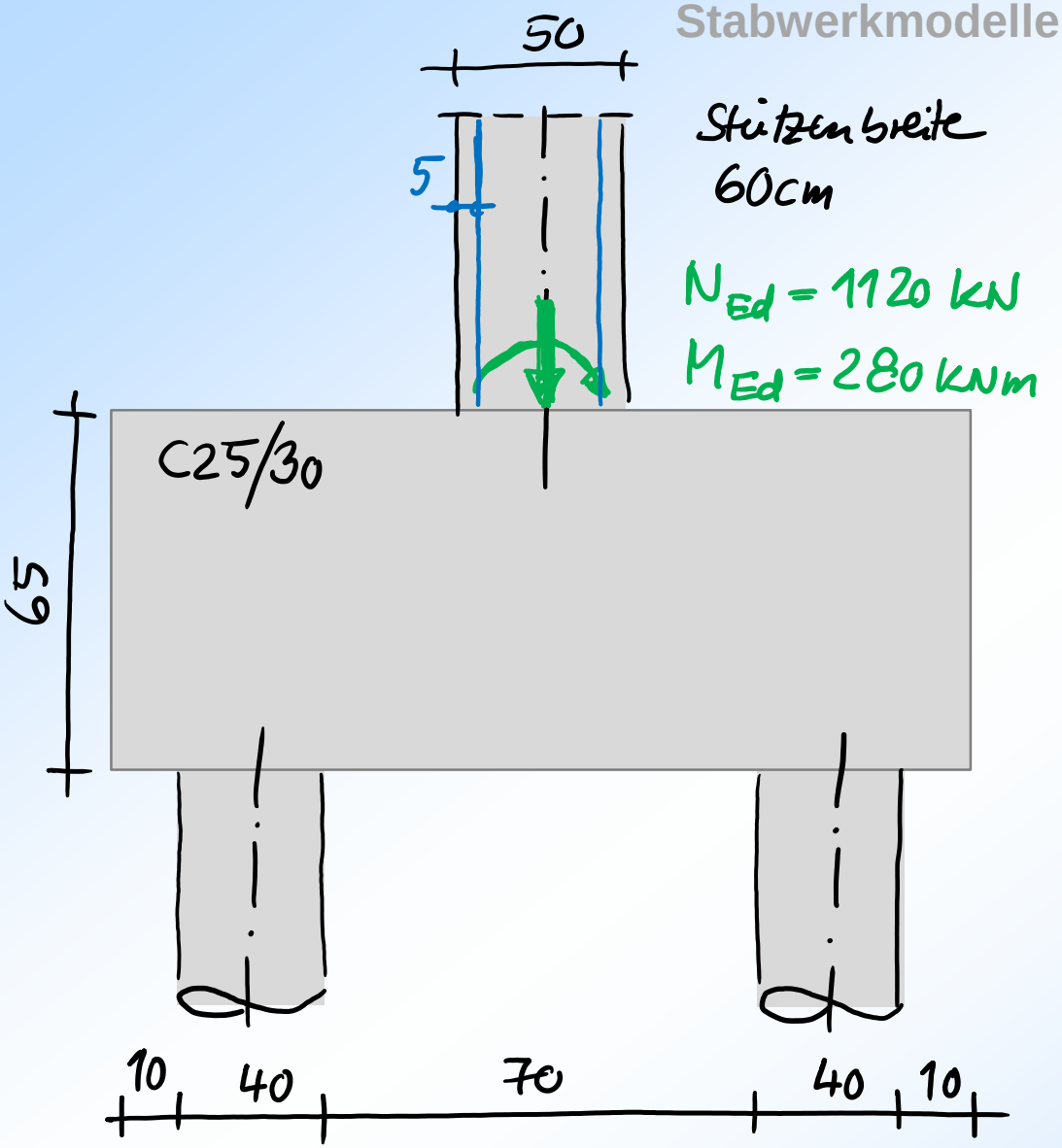


Bild 4.5-6. Regel für nach unten abgebogene Gurtstäbe in Konsolen nach [4.19]

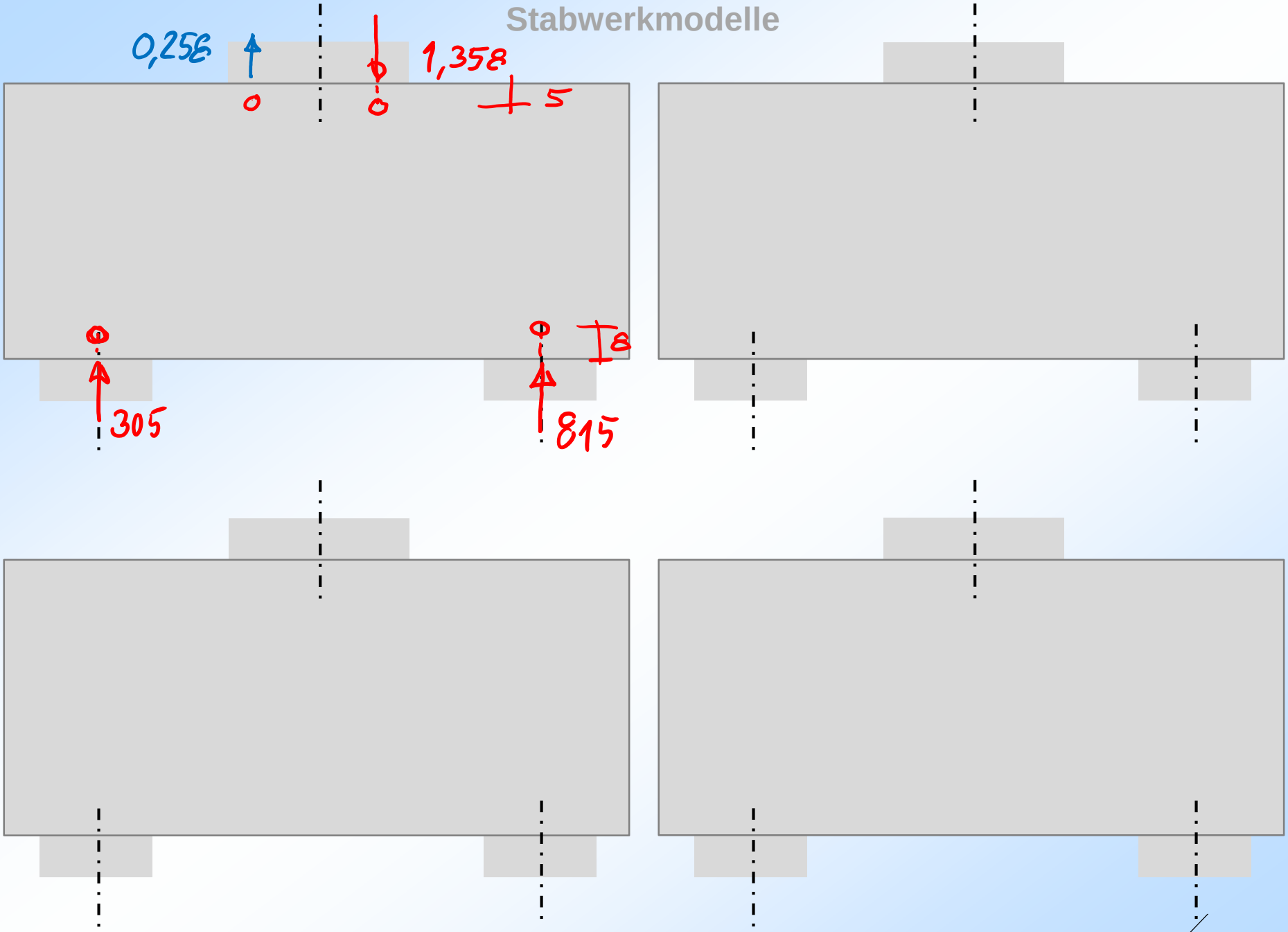
entnommen aus:
Schlaich/Schäfer: Konstruieren im Stahlbetonbau in Bk 98/II

Quelle: https://www.baulinks.de/webplugin/2007/1027.php4

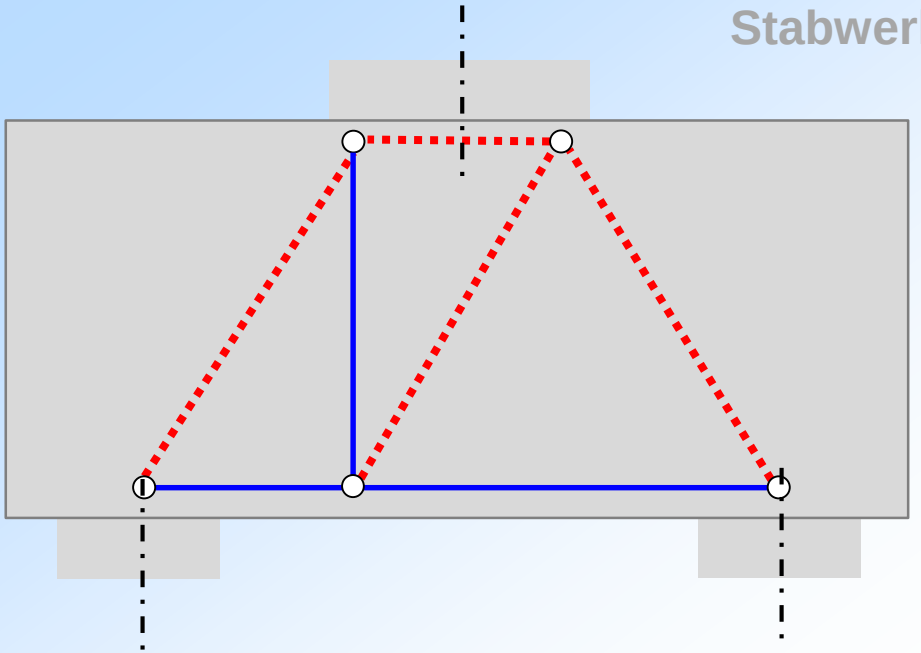
Was ist hier falsch?

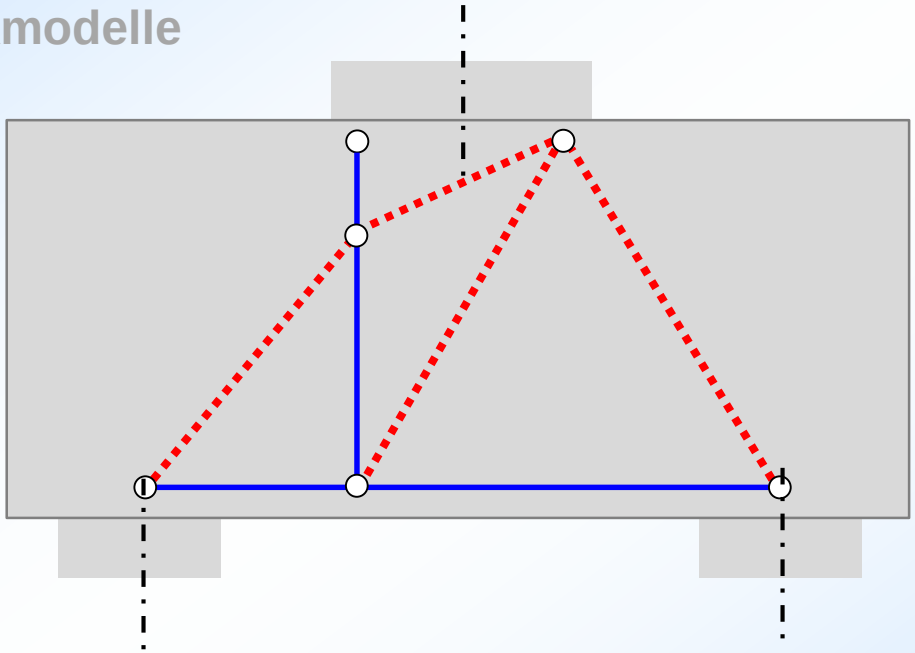

50
Stützenbreite
60cm
5
$N_{Ed} = 1120$ kN
$M_{Ed} = 280$ kNm
C25/30
65
10
40
70
40
10

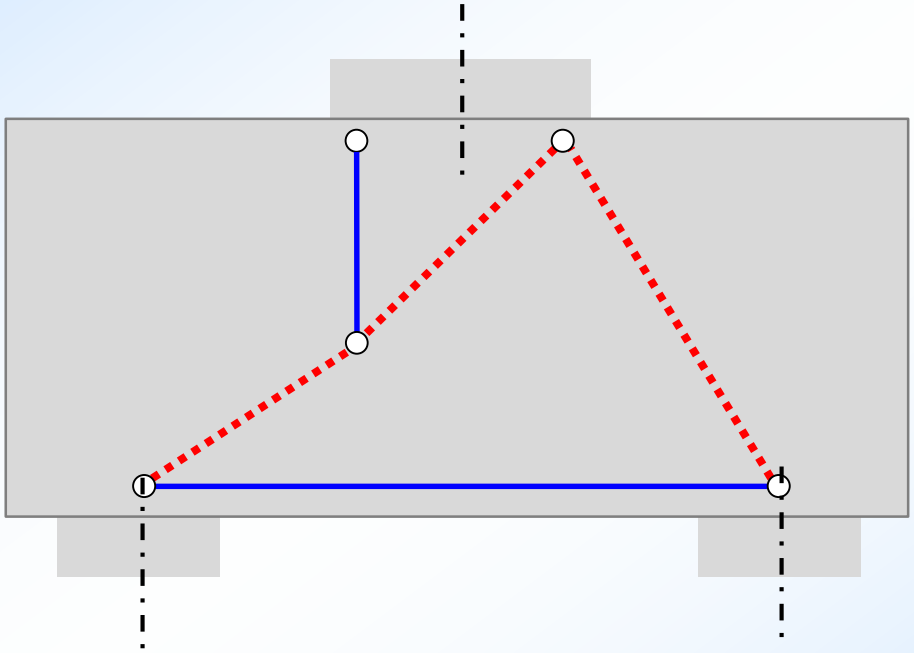
Stabwerkmodelle

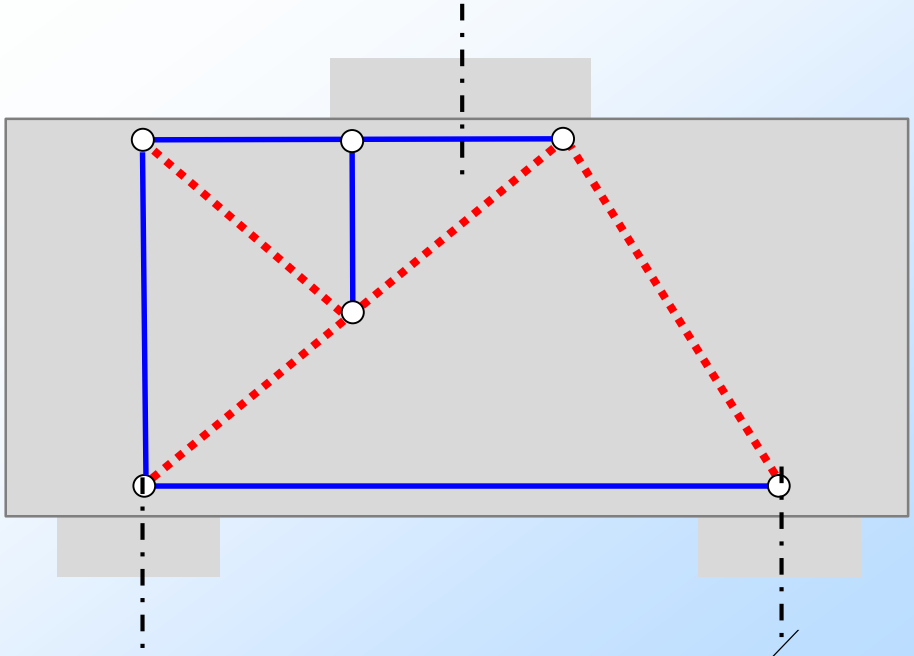


Stabwerkmodelle









Die Dehnungen in den Druckstäben sind vernachlässigbar gering

Bewertung der Stabwerke mit Hilfe der Formänderungsarbeit:

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^l \varepsilon \cdot N \cdot dx = \frac{1}{2}\cdot \sum \varepsilon_i \cdot F_i \cdot l_i = \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{yd} \cdot \sum F_i \cdot l_i \sim \sum F_i \cdot l_i$$

System 1

$W_i =$

System 2

$$W_i = \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{yd} \cdot \left[\underbrace{602\cdot 75 + 305\cdot \frac{35}{h}\cdot 35 + 258\cdot(52-h) + \left(602 - 305\cdot\frac{35}{h}\right)\cdot \frac{52}{36{,}6}\cdot h}_{} \right]$$

$h = 52\,cm \approx 81600 \longrightarrow \hat{=}$ System 1

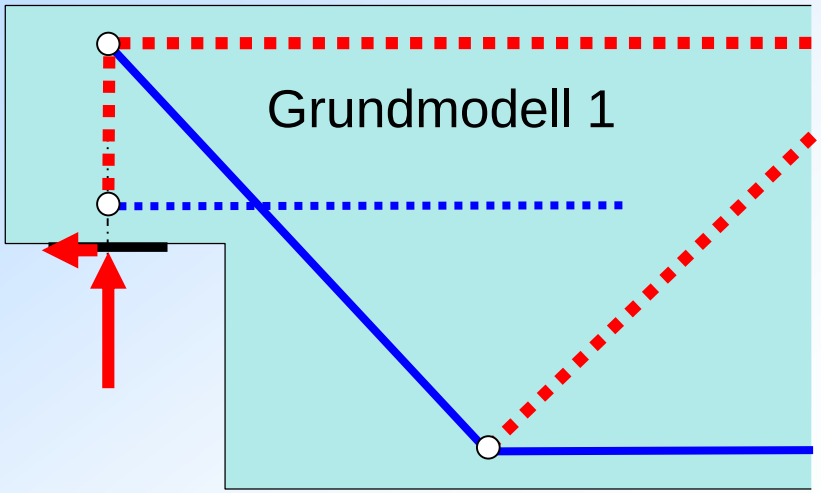
$25{,}4 \approx 73300$ (Min)

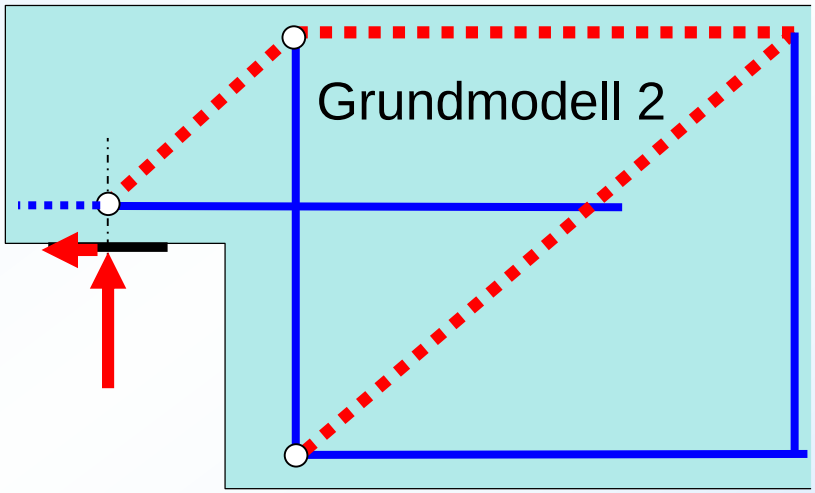
$17{,}7 \approx 75100 \longrightarrow \hat{=}$ System 3

System 4:

$$W_i = \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{yd} \left[\quad \right] \approx \frac{\varepsilon_{yd}}{2}\cdot 92400$$

3 Ausgeklinkte Auflager



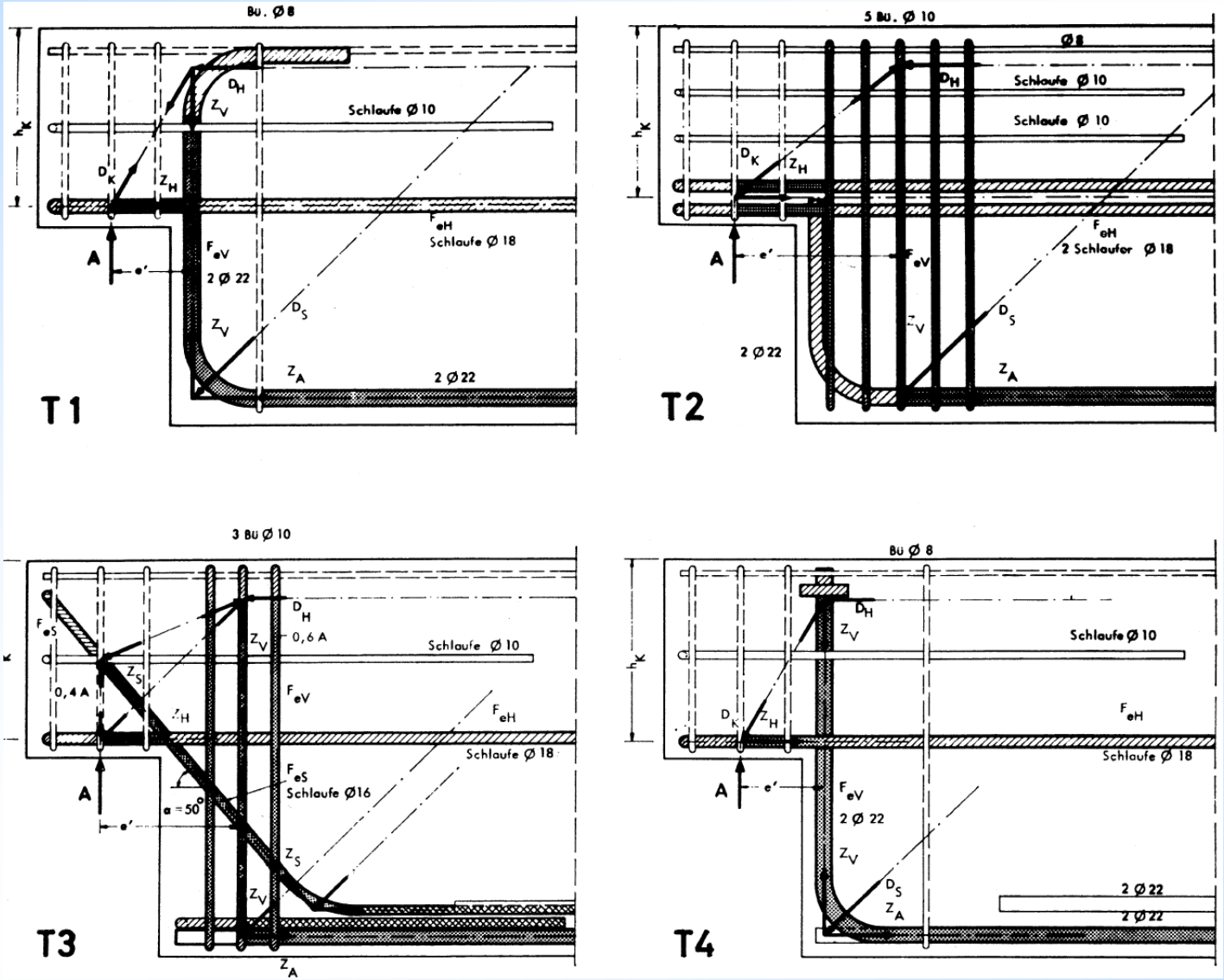


- ➖ aufgebogene Feldbewehrung ungeeignet für Verankerung über Verbund
- ➖ große Rissbreite bei dicken Stäben
- ➕ günstiger unterer Umlenkknoten

- ➖ große Rissbreite in einspringender Ecke
- ➖ kurze Verankerung der großen Kraft in Konsolbew. am Auflagerknoten
- ➖ stark druckbeanspruchter oberer Knoten
- ➖ ungünstiger unterer Umlenkknoten
- ➕ einfache Bewehrungsführung

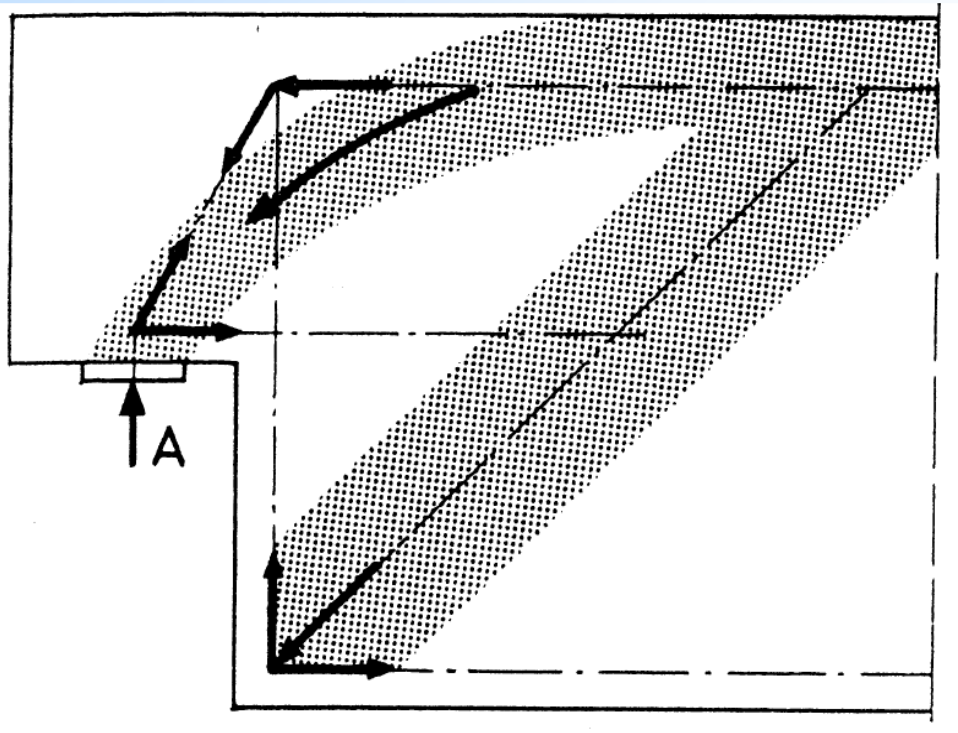
Offene Frage: wo verbleibt die Zugkraft des Konsolbandes im Träger?

Rostasy und Steinle haben Versuche zu abgesetzten Auflagern durchgeführt:



Betonwerk Fertigteil-technik 1975

…. und das Tragverhalten mit Stabwerkmodellen beschrieben:



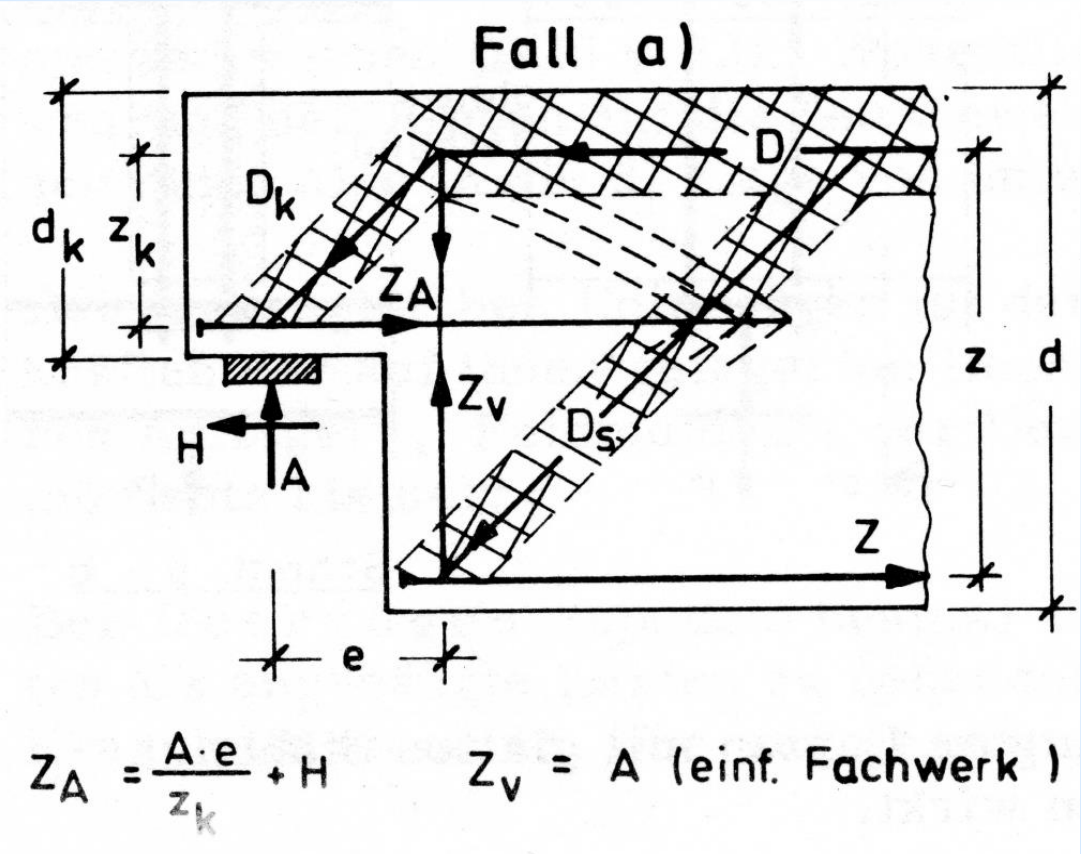
Die gemessenen Kräfte in der vertikalen Aufhängebewehrung waren stets kleiner als die Auflagerkräfte, Rostasy/Steinle erklären dies mit einer zusätzlichen direkten Abstützung der Druckstrebe.

Die Verallgemeinerung, dass die Vertikalkraft stets kleiner als die Auflagerkraft ist, scheint aufgrund der wenigen Versuche (6) unzulässig, zumal alle Träger nur eine sehr kurze Nase hatten, wodurch der direkte Lastabtrag begünstigt wird.

Unbefriedigend: die Verankerungskräfte aus dem Konsolband werden nicht verfolgt.

BFT 1975

Aufbauend auf den Stuttgarter Versuchen von Rostasy und Steinle formulieren Leonhardt und Mönnig 1977 in der 3. Auflage der „Vorlesung über Massivbau“, Dritter Teil:

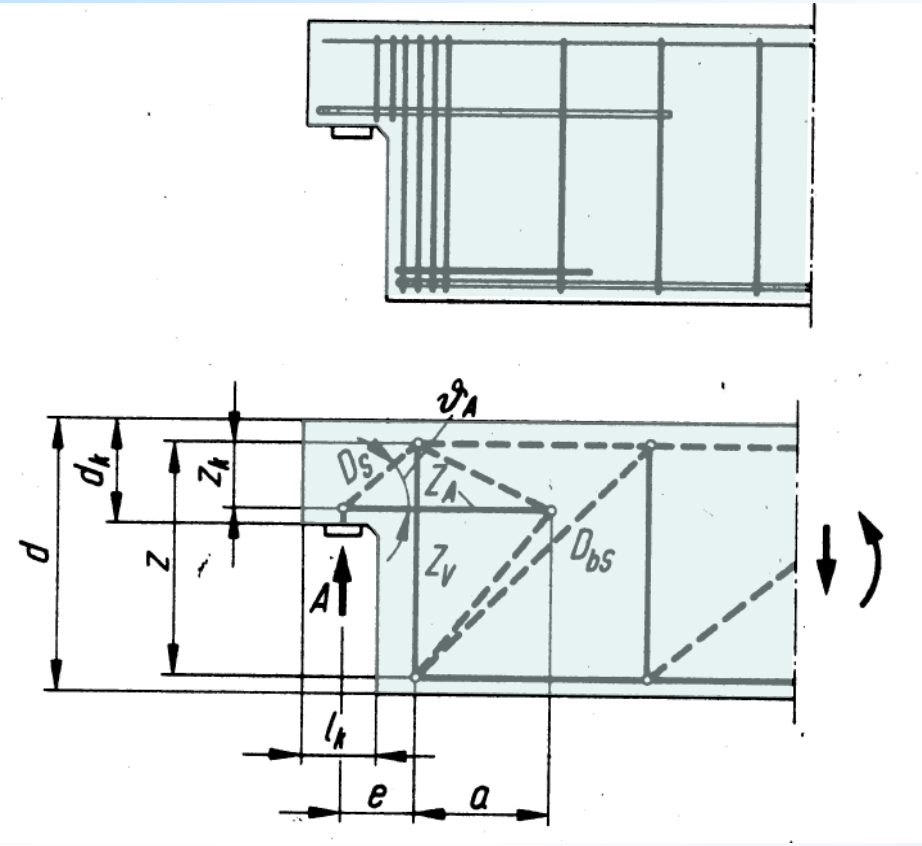


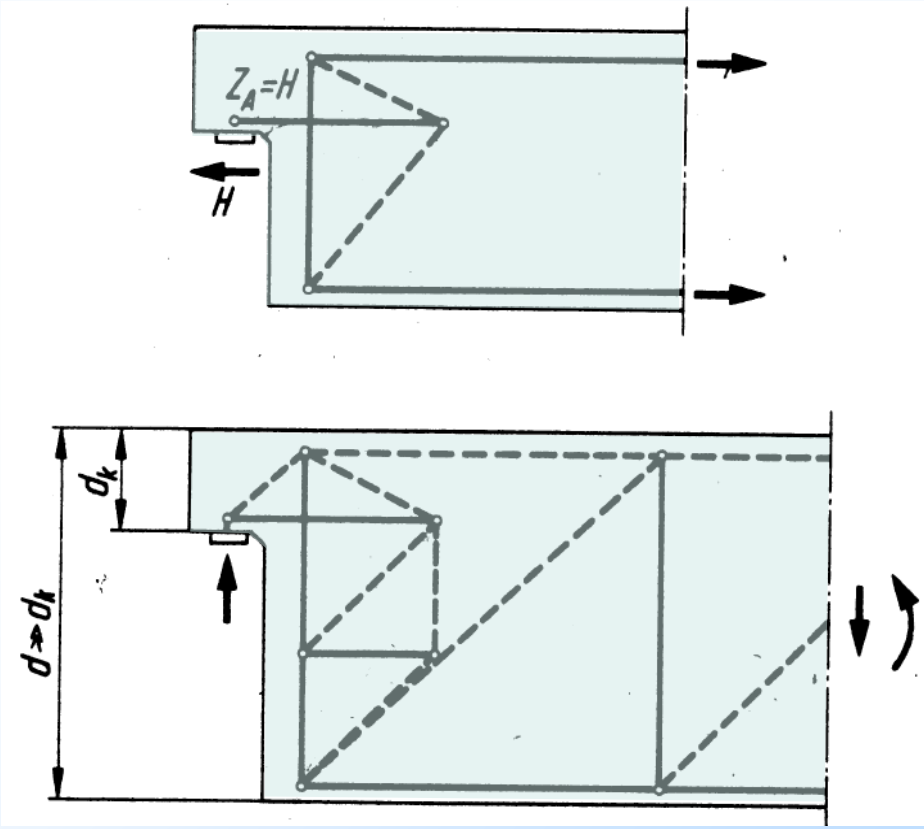
Unbefriedigend:
Die vertikale Kraft Z_v braucht allerdings nicht größer als die Auflagerkraft angesetzt werden.

$$Z_v = A \cdot 0{,}35 \cdot \frac{d}{d_k} \leq A$$

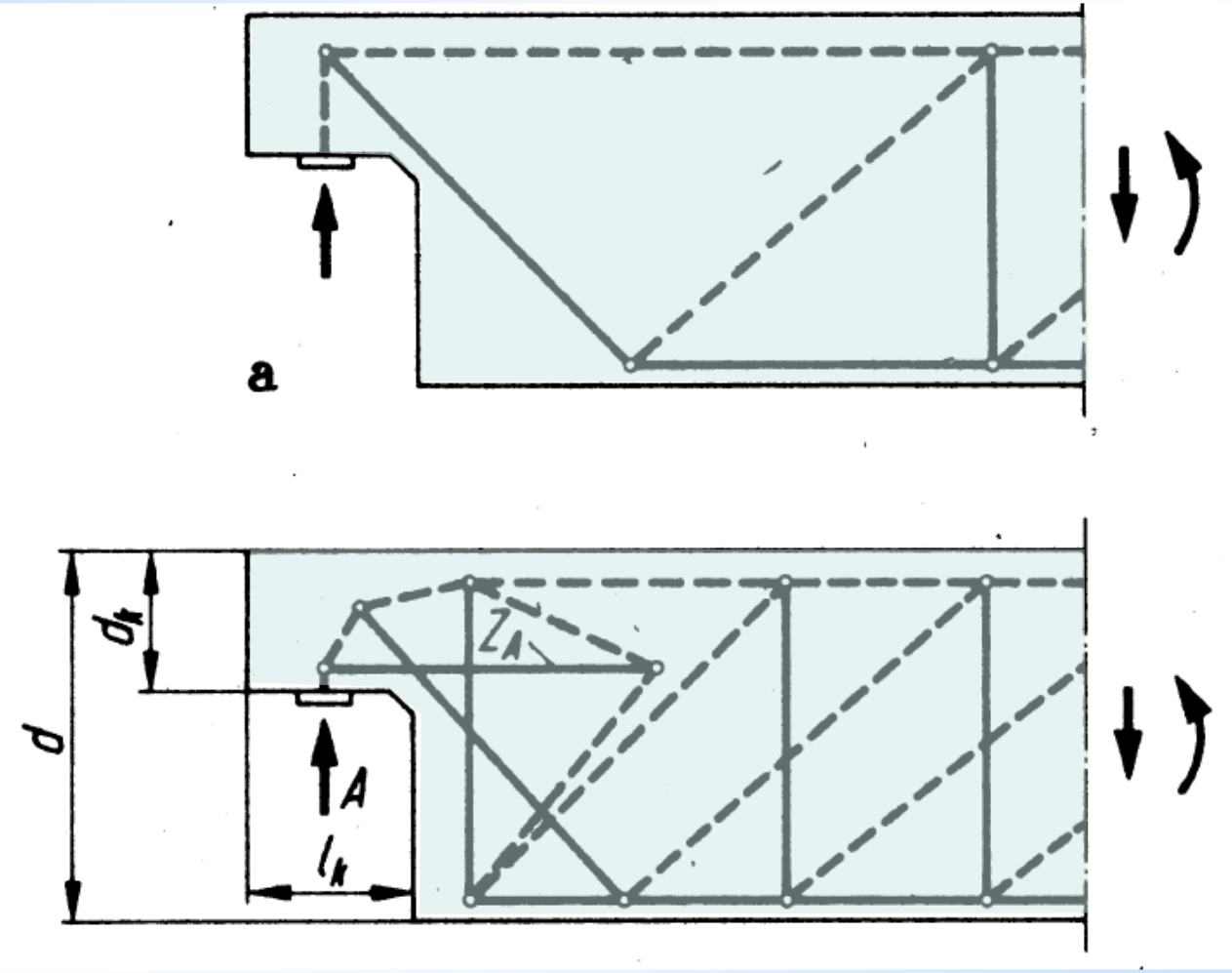
(Hier findet sich ein grafischer Hinweis zur rechten Verankerung der Konsolbew., allerdings ist der Kraftfluss nicht zu Ende gedacht)

Schlaich verwendet in seinem ersten Betonkalender-Aufsatz „Konstruieren im Stahlbetonbau“ von 1984 zur Bemessung mit Stabwerkmodellen folgendes Modell bei ausschließlich vertikaler Bewehrung:



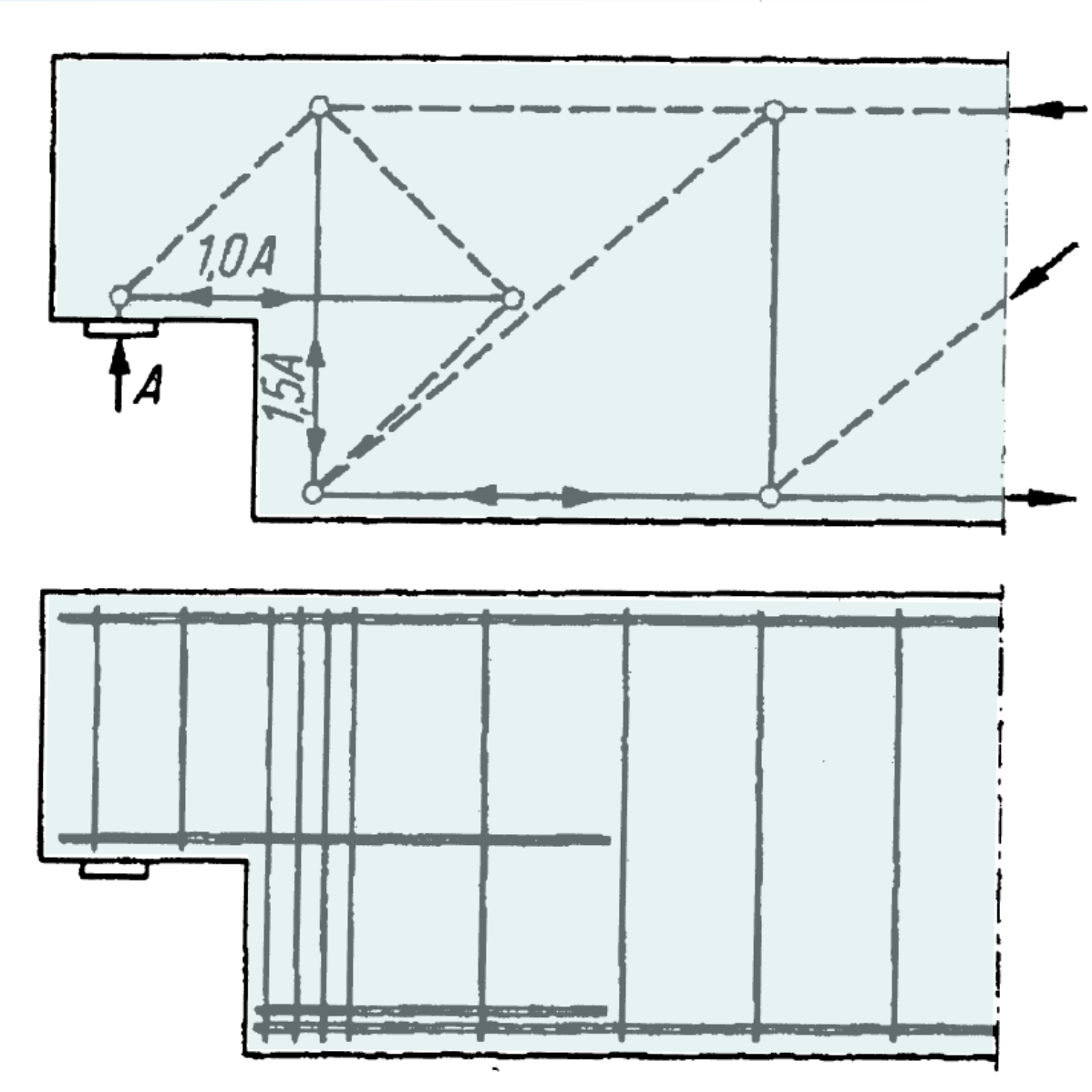


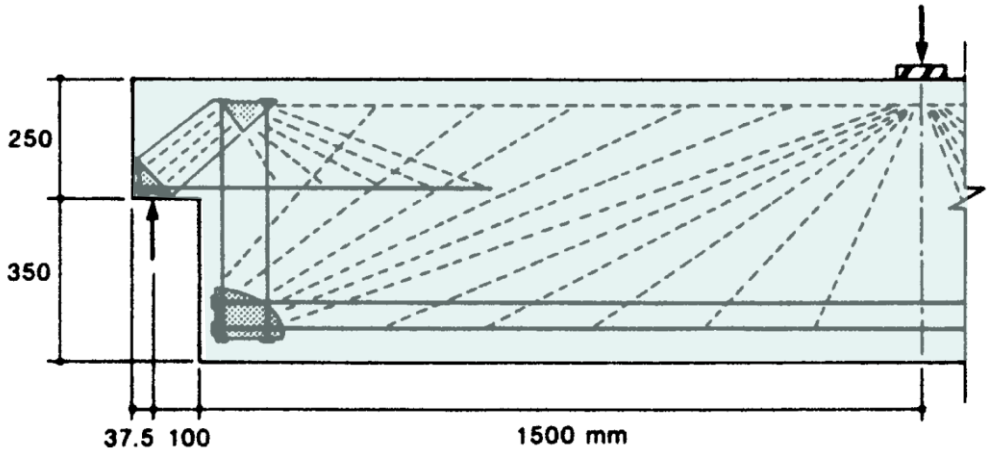
… und für ausschließlich schräge Bewehrung sowie für gemischte Bewehrung:



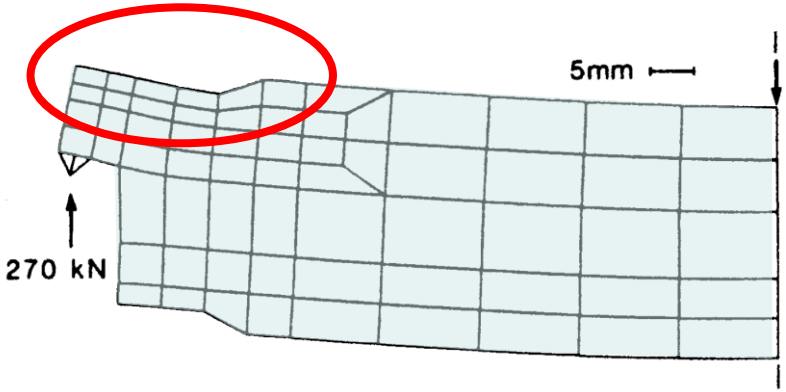
Aufsatz Schlaich: „Zum einheitlichen Bemessen von Stahlbetontragwerken“, Beton und Stahlbetonbau, 4/1984

vgl. auch Schlaich: „Konstruieren im Stahlbetonbau“ Betonkalender-Aufsatz von 1984

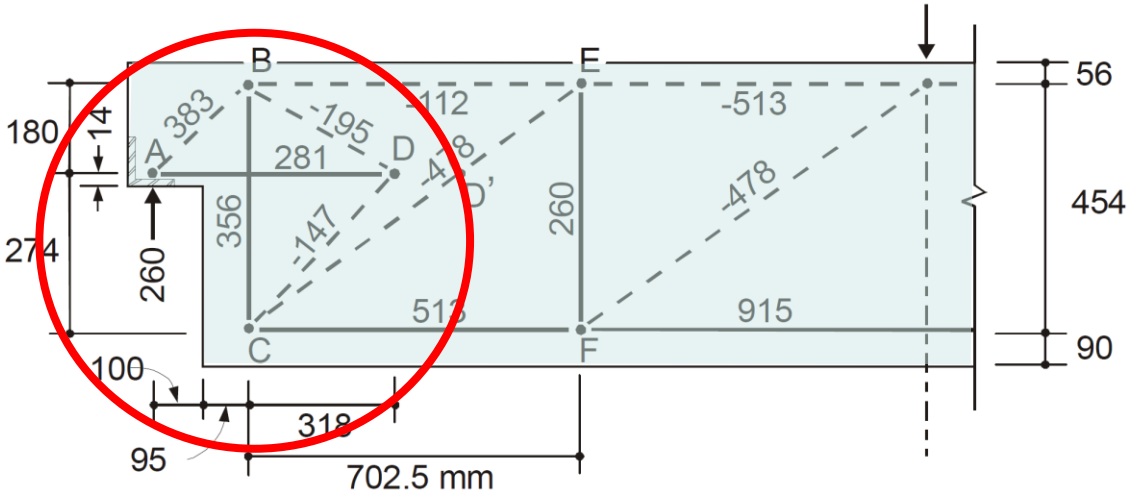




Strut and tie model

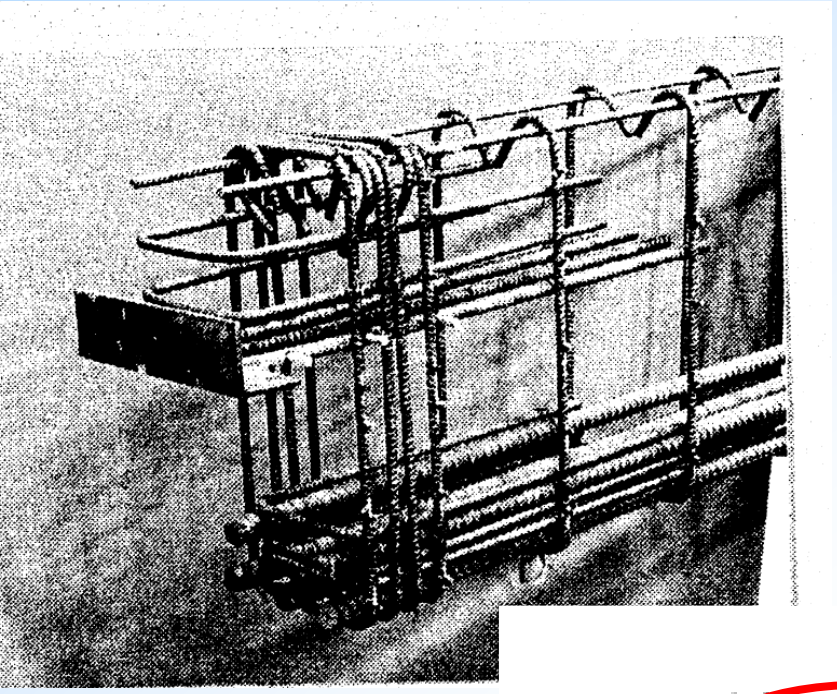


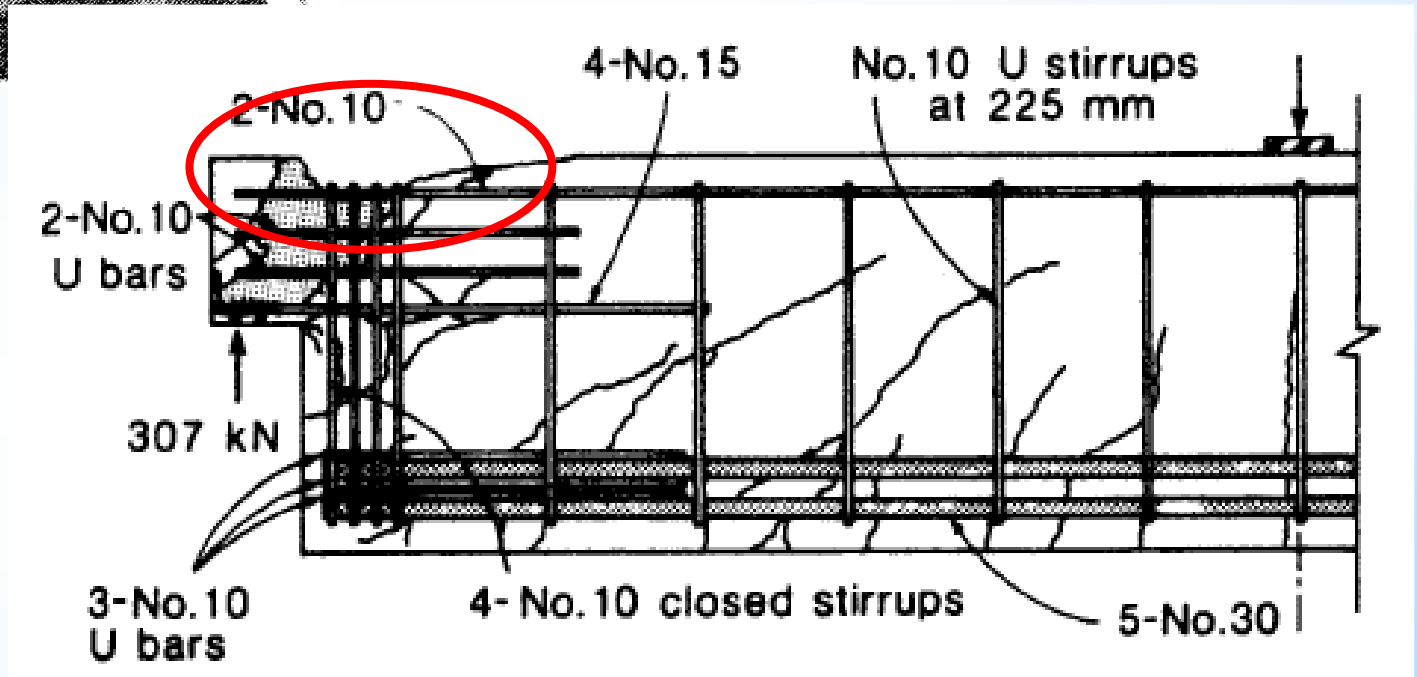
Finite element mesh and deflected shape at failure



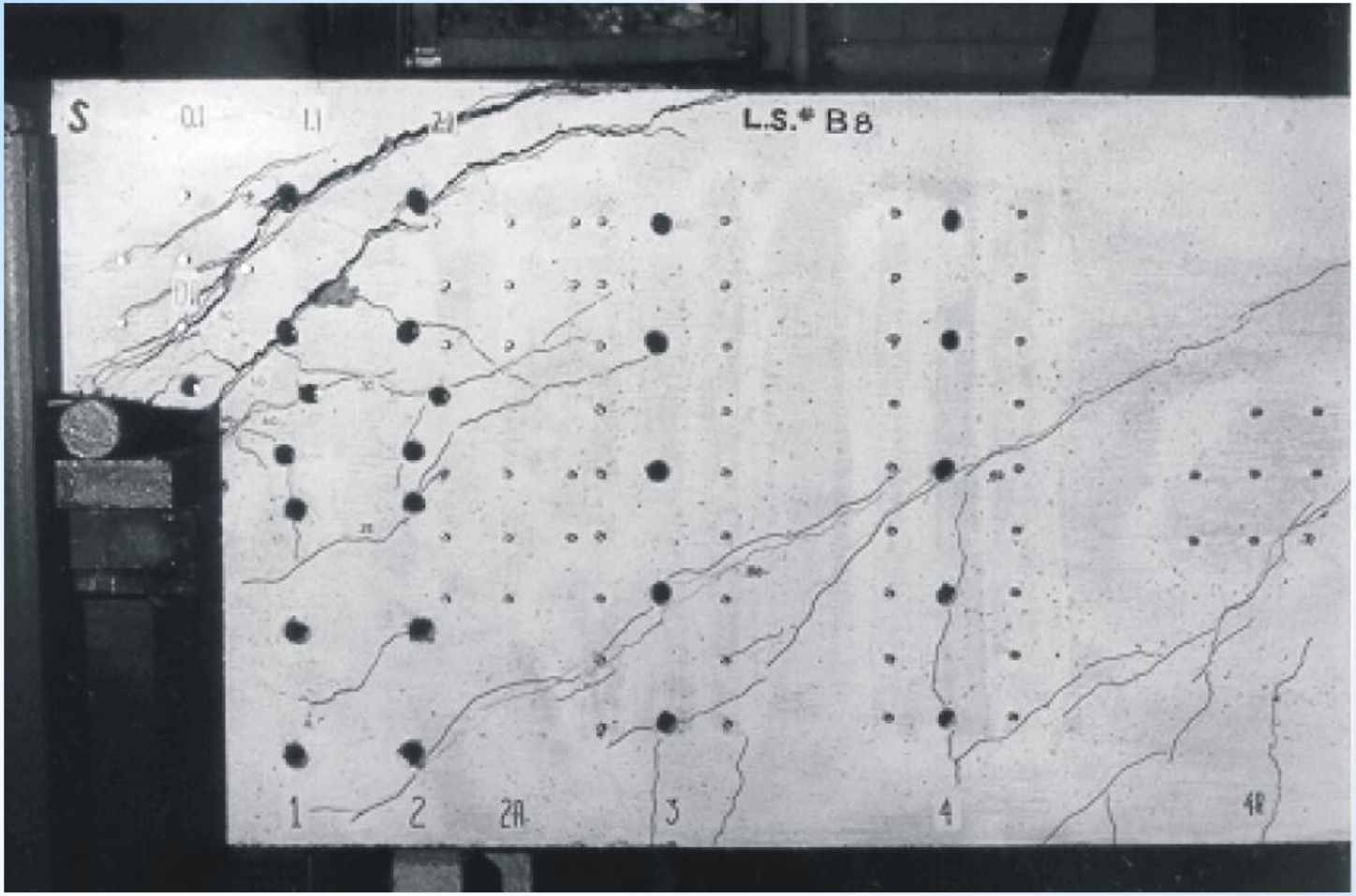
Truss idealization and member forces in kN

W. Cook und D. Mitchell (ACI Structural Journal, 1988, pp. 206-216) verwenden das gleiche Modell und finden gute Übereinstimmung mit den von ihnen durchgeführten Versuchen.



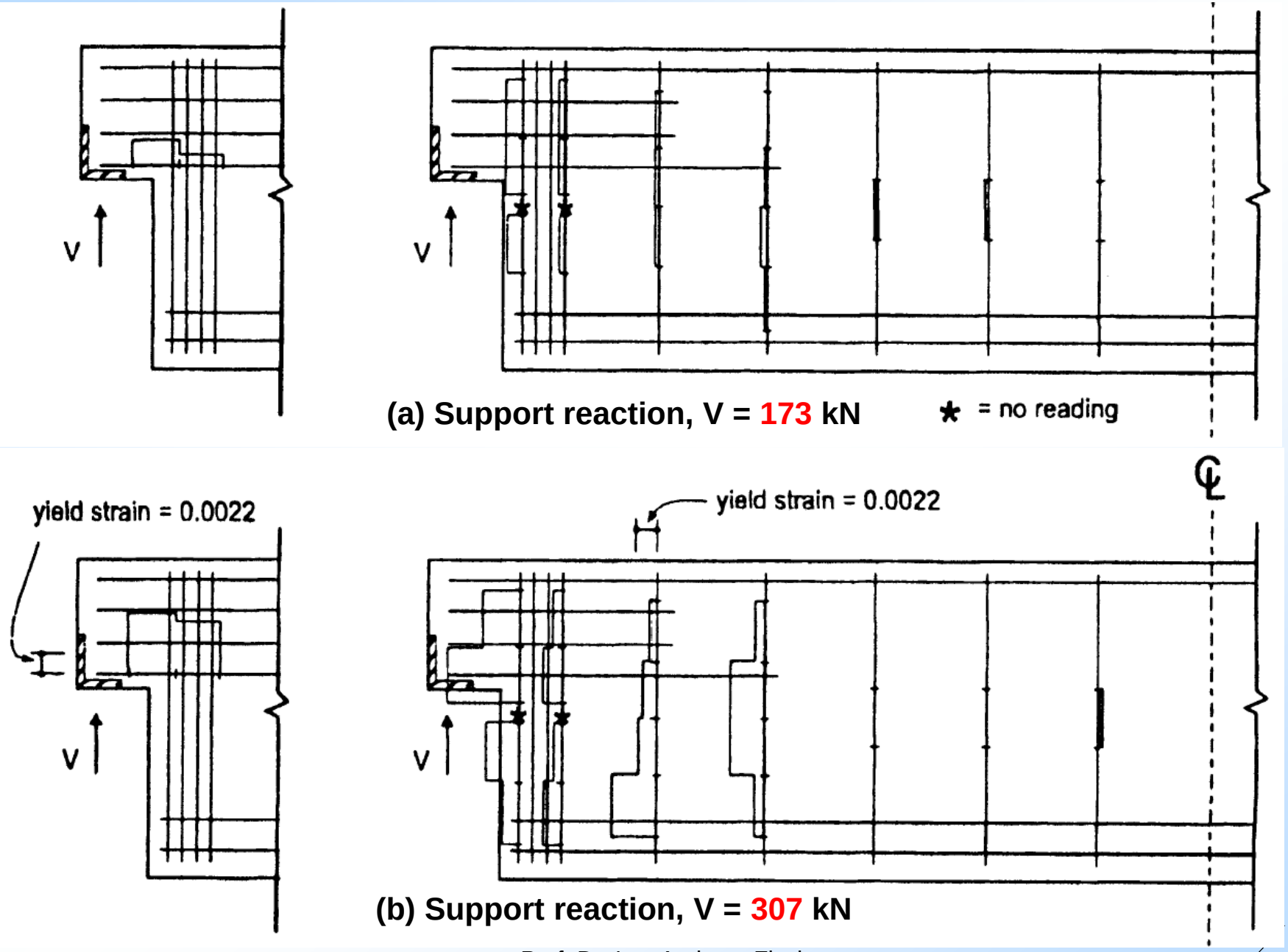


(c) Reinforcement details and failure conditions



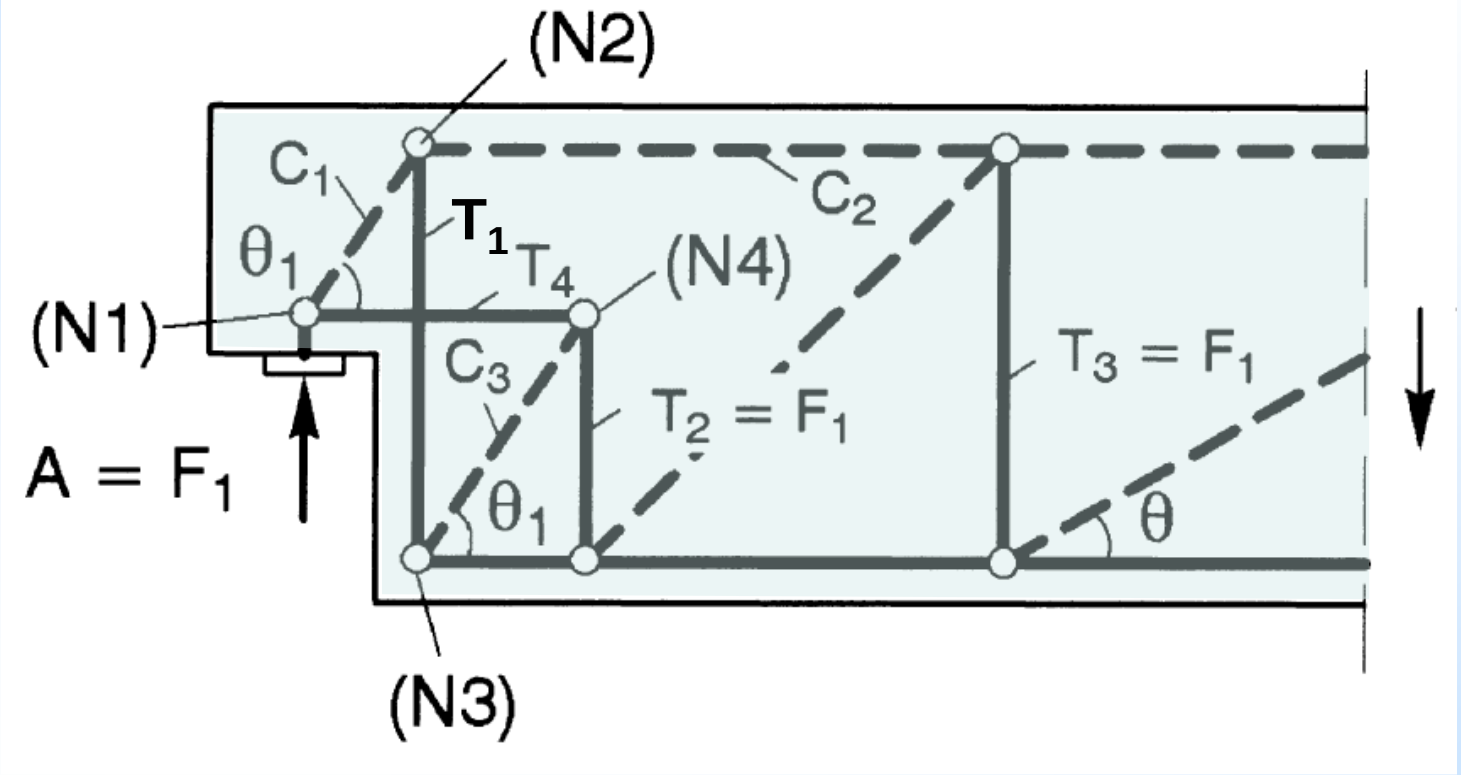
http://onlinepubs.trb.org/onlinepubs/nchrp/docs/NCHRP20-07(306)_FR.pdf

Mitchell, D.; Cook, W.D.;Uribe, C.M.; Alcocer, S.:Experimental verification of strut-and-tie-models In: Reineck, K.-H.(Ed.): Examples for the Design of Structural Concrete with Strut-and-Tie- Models, ACI Special Publication-208 (2002), pp. 41-62

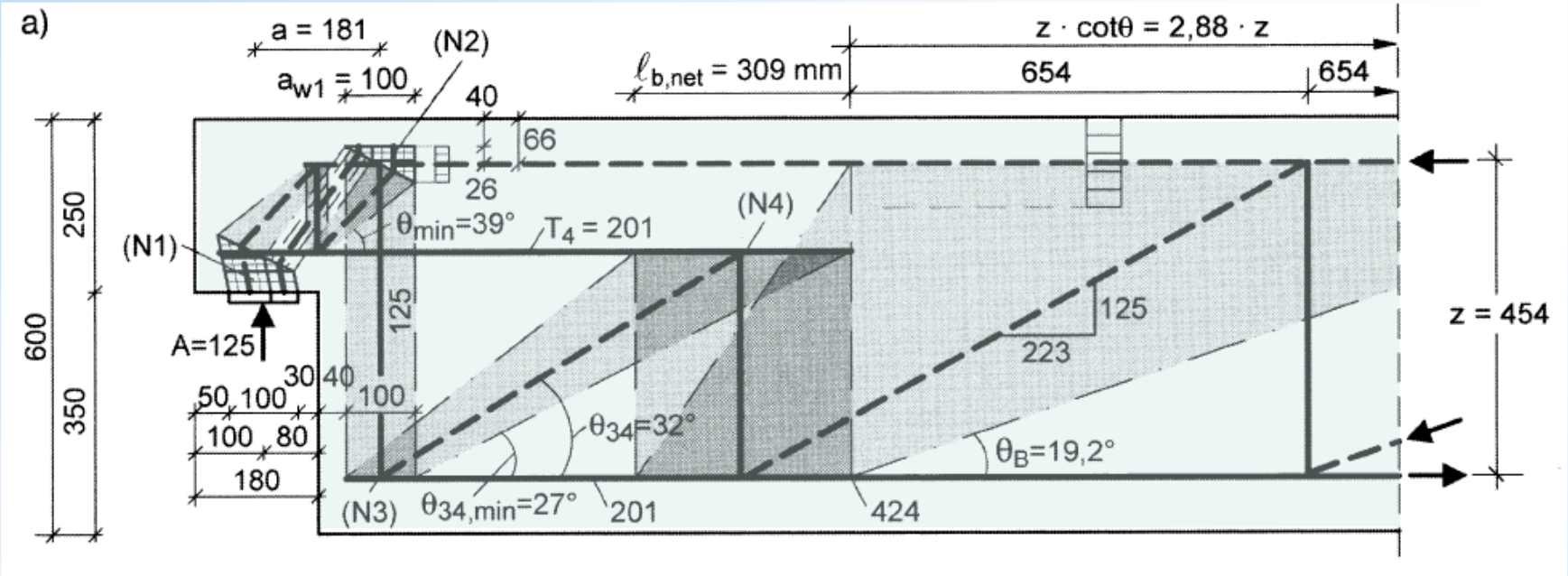


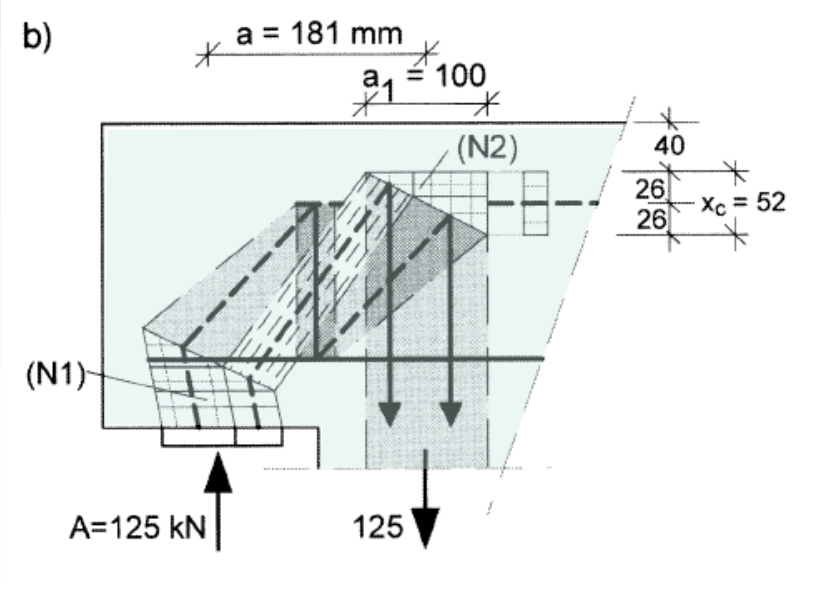
Mitchell, D.; Cook, W.D.;Uribe, C.M.; Alcocer, S.:Experimental verification of strut-and-tie-models In: Reineck, K.-H.(Ed.): Examples for the Design of Structural Concrete with Strut-and-Tie- Models, ACI Special Publication-208 (2002), pp. 41-62

Schlaich schlägt seit der Neuauflage seines Betonkalender-Aufsatzes „Konstruieren im Stahlbetonbau“ von 1989, letztmalig erschienen 2001 ein geändertes Modell vor:



Bei diesem Modell ist die Kraft T_1 identisch mit der Auflagerkraft A

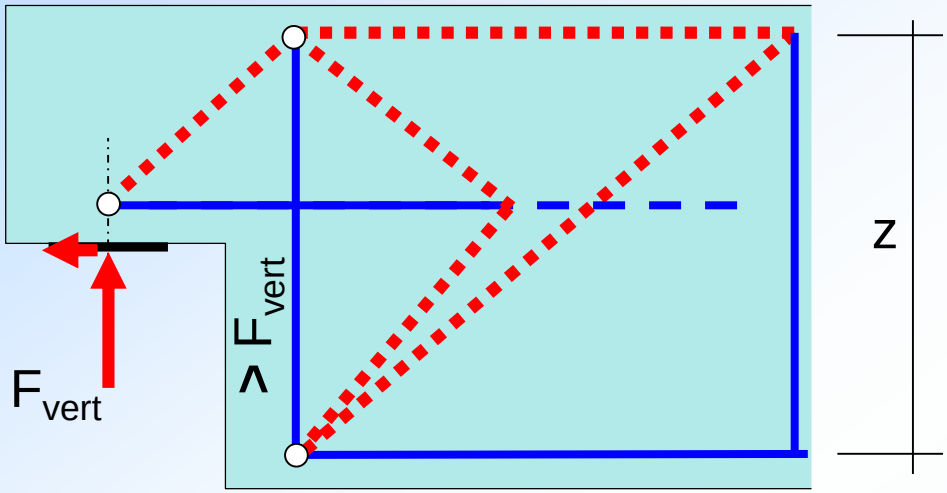




Im Betonkalender 2005 befasst sich Reineck recht ausführlich mit der „Modellierung der D-Bereiche von Fertigteilen“. Das Stuttgarter Modell von Schlaich erfährt hier eine strengere Behandlung.

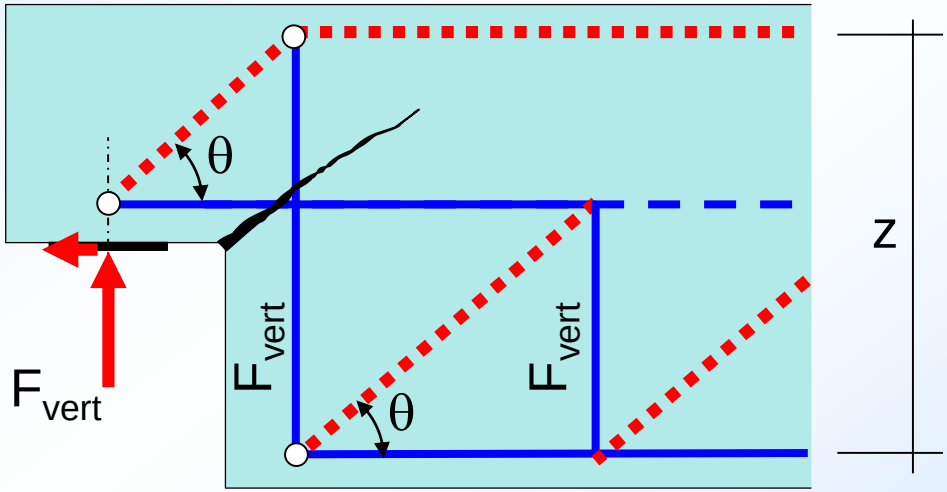
Der Beton oberhalb der „Aufhängebügel“ bleibt konsequenterweise unberücksichtigt!

Überlegungen zur Verankerung der Horizontalbewehrung



Modell
Mitchell / Cook

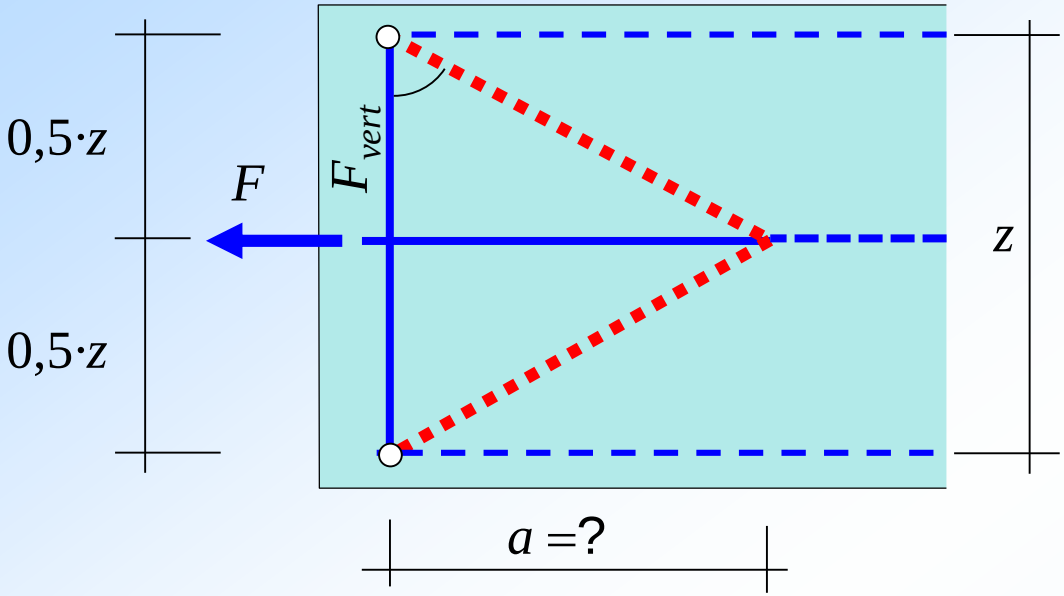
Im Gebrauchszustand sind kleinere Verformungen und Rissbreiten zu erwarten



Modell
Schlaich / Schäfer / Reineck

Größere Risstiefe möglich, dadurch auch größere Rissbreite und Rotation im oberen Knoten.

Minimum der Formänderungsarbeit?



Annahmen:

Formänderungsarbeit in den Druckstäben zunächst vernachlässigt.

Die Zugstäbe erreichen die Fließdehnung gleichzeitig

Stabkräfte sind konstant über die Stablänge

Formände-rungsarbeit:

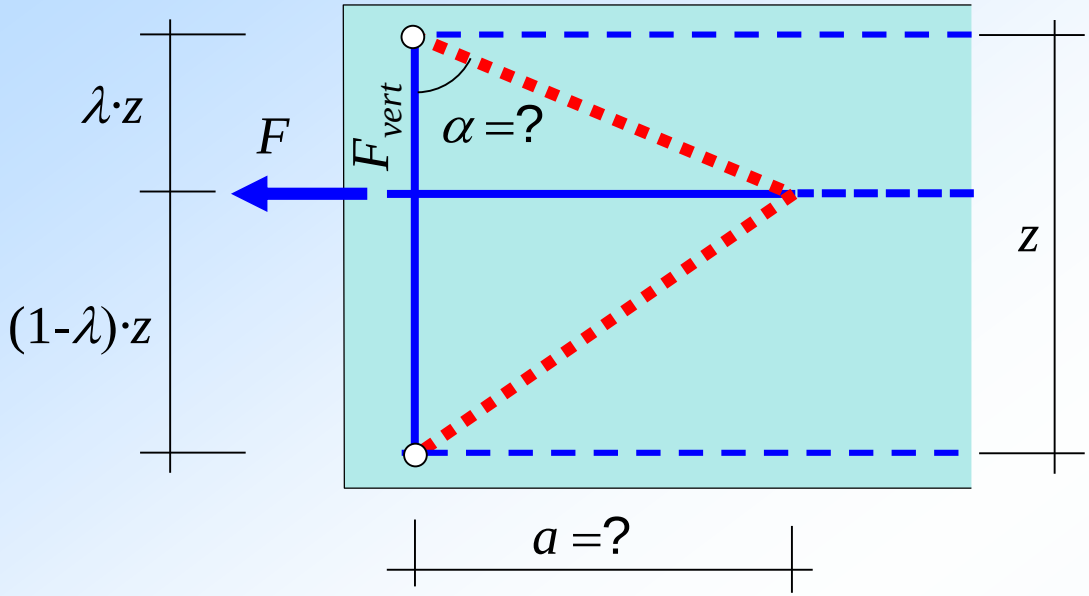
$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^l \varepsilon \cdot N \cdot dx = \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{Fl} \cdot F \cdot \overbrace{0,5 \cdot z \cdot \tan\alpha}^{a} + \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{Fl} \cdot \overbrace{\frac{0,5 \cdot F}{\tan\alpha}}^{F_{vert}} \cdot z$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{Fl} \cdot F \cdot z \cdot \left(0,5 \cdot \tan\alpha + \frac{0,5}{\tan\alpha}\right)$$

z. B. durch Probieren ergibt sich für den Klammerausdruck ein Minimum bei α = 45° $\Rightarrow a = 0,5 \cdot z$ und $F_{vert} = 0,5 \cdot F$

Hinweis: auch für die Druckstäbe ergibt sich bei α = 45° ein Min. der Form.änd.arb.!

Minimum der Formänderungsarbeit?



Annahmen:

Formänderungsarbeit in den Druckstäben zunächst vernachlässigt.

Die Zugstäbe erreichen die Fließdehnung gleichzeitig

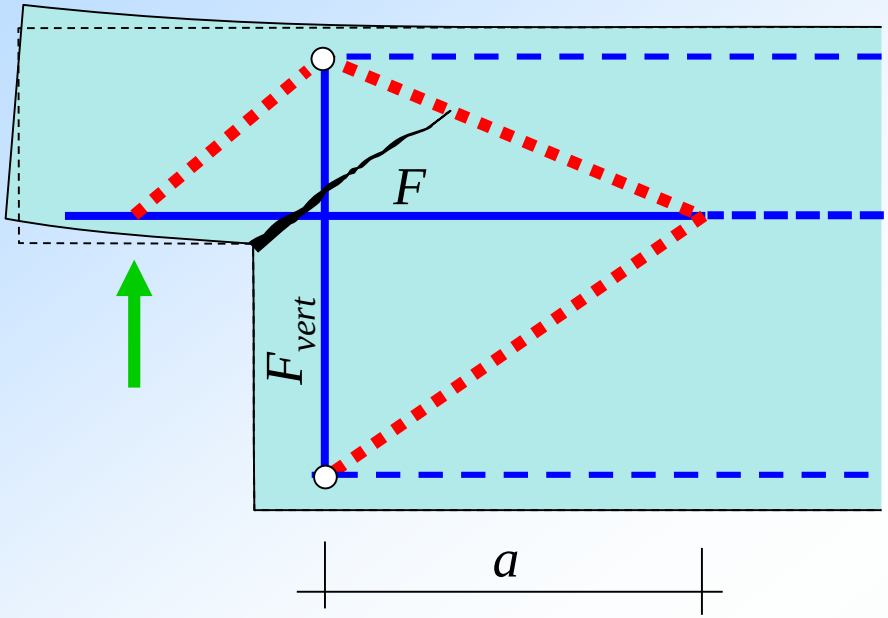
Stabkräfte sind konstant über die Stablänge

Formänderungsarbeit:

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^l \varepsilon \cdot N \cdot dx = \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{Fl} \cdot F \cdot \overbrace{\lambda \cdot z \cdot \tan\alpha}^{a} + \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{Fl} \cdot \overbrace{\frac{(1-\lambda)\cdot F}{\tan\alpha}}^{F_{vert}} \cdot z$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_{Fl} \cdot F \cdot z \cdot \left(\lambda \cdot \tan\alpha + \frac{1-\lambda}{\tan\alpha}\right)$$

z. B. durch Probieren ergibt sich für den Klammerausdruck für λ = 0,25 ein Minimum bei α = 60° $\Rightarrow a = 0{,}433 \cdot z \approx 0{,}5 \cdot z$ und $F_{vert} = 0{,}433 \cdot F \approx 0{,}5 \cdot F$

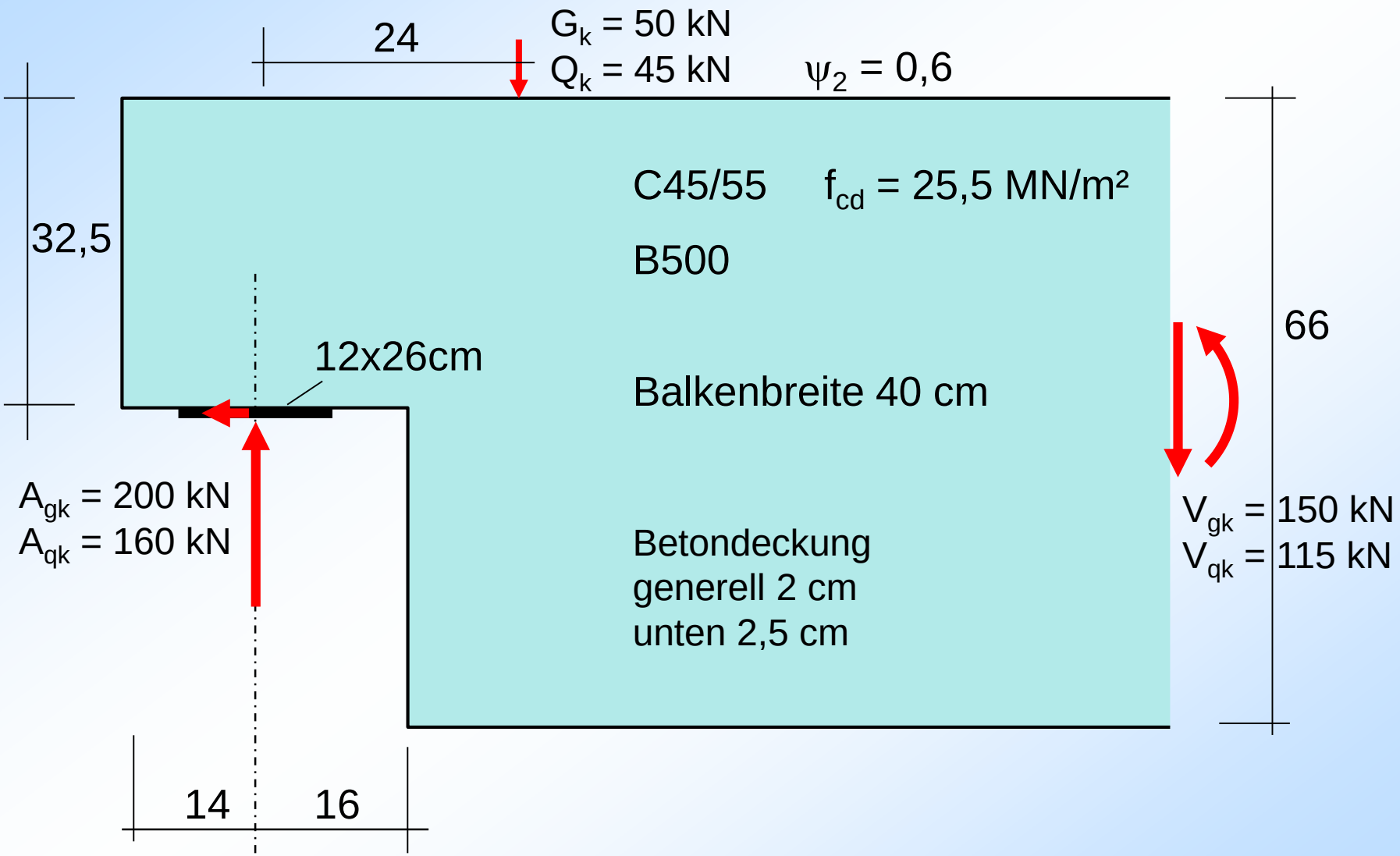


Wenn die vertikale Bewehrung infolge einer zu geringen Dimensionierung frühzeitig fließt, vergrößert sich a automatisch. Dadurch wird die gedehnte Länge der horizontalen Bewehrung größer und damit auch die Rotation der Trägernase um den oberen Knoten. Letzteres führt dort zu einem früheren Druckversagen.

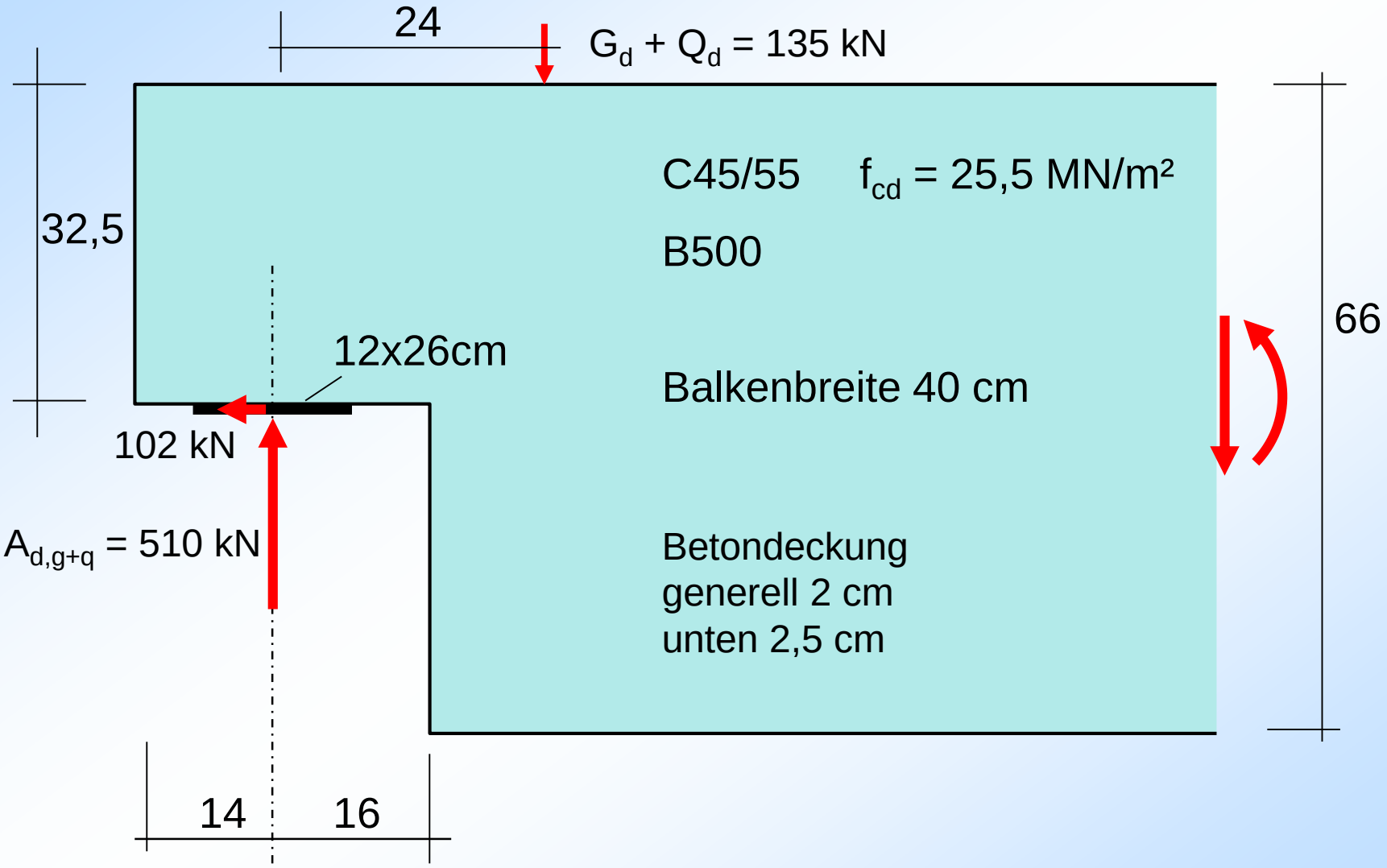
Zusammenfassung:

- Das Modell mit ausschließlich aufgebogener Bewehrung lässt sich nur mit Ankerplatten realisieren.
- Das Modell mit ausschließlich vertikaler Bewehrung nutzt die Betondruckzone nicht aus und führt zum frühzeitigen Abplatzen der Betondeckung.
- Die Verankerung des Konsolbandes bei dem aktuellen Modell von Schlaich / Schäfer und Reineck führt insbesondere bei längeren Auflagernasen zu erheblichen Verformungen bereits im Gebrauchszustand.
- Die Verankerung des Konsolbandes sollte mit Hilfe des Sprengwerkes, also durch Verstärkung der sog. „Aufhängebewehrung“ realisiert werden.
- Am sinnvollsten ist eine rechnerische Kombination beider Grundmodelle

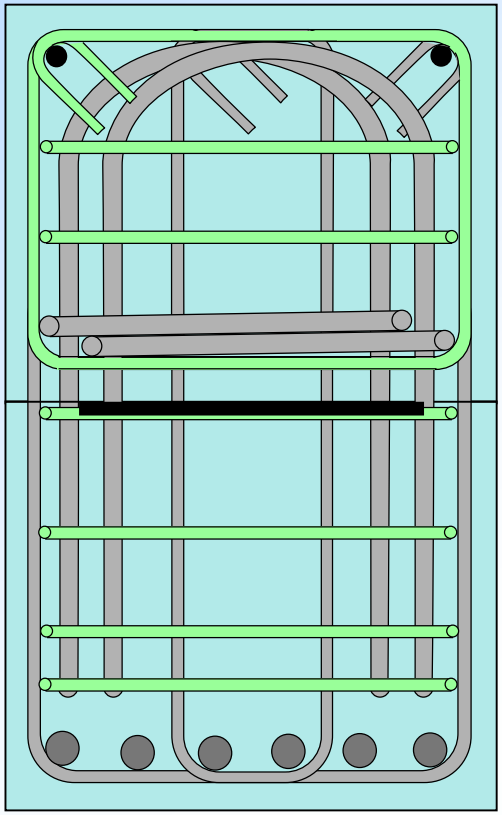
Beispiel:


24
G_k = 50 kN
Q_k = 45 kN
ψ_2 = 0,6
32,5
C45/55
f_{cd} = 25,5 MN/m²
B500
66
12x26cm
Balkenbreite 40 cm
A_{gk} = 200 kN
A_{qk} = 160 kN
V_{gk} = 150 kN
V_{qk} = 115 kN
Betondeckung
generell 2 cm
unten 2,5 cm
14
16

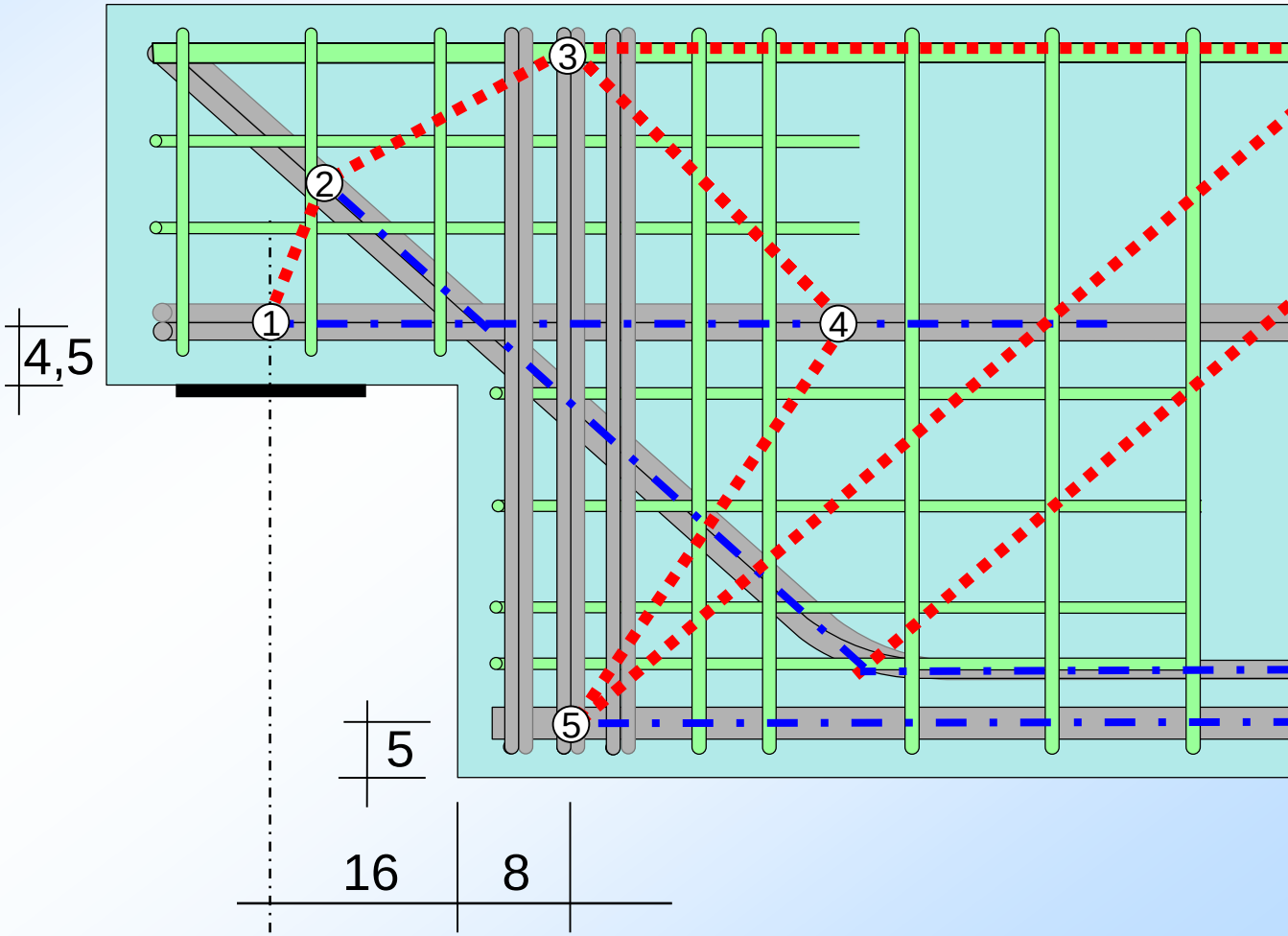
Beispiel:


24
$G_d + Q_d = 135$ kN
32,5
C45/55 $f_{cd} = 25{,}5$ MN/m²
B500
66
12x26cm
Balkenbreite 40 cm
102 kN
$A_{d,g+q} = 510$ kN
Betondeckung
generell 2 cm
unten 2,5 cm
14
16

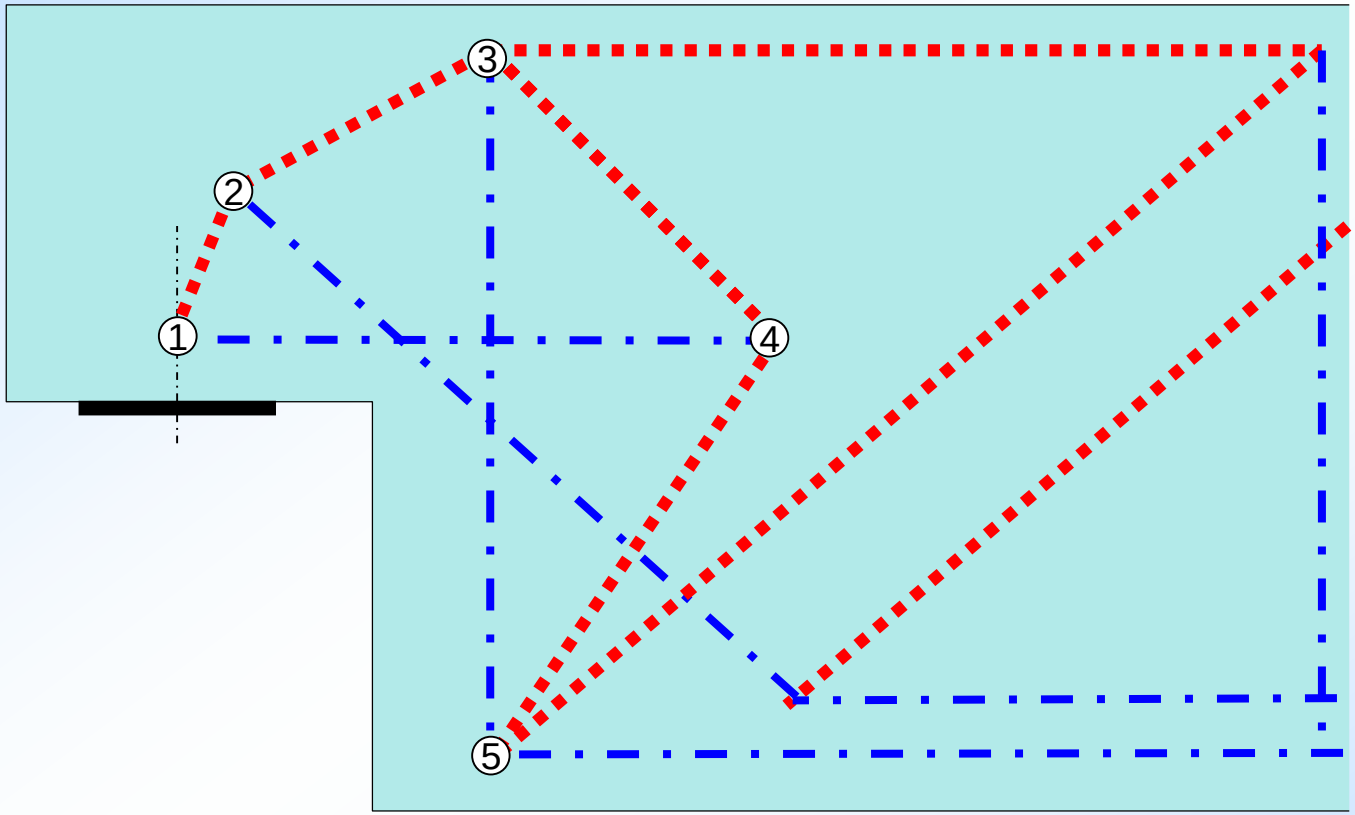
Eine Vorbemessung ergab die nachfolgenden Randabstände:



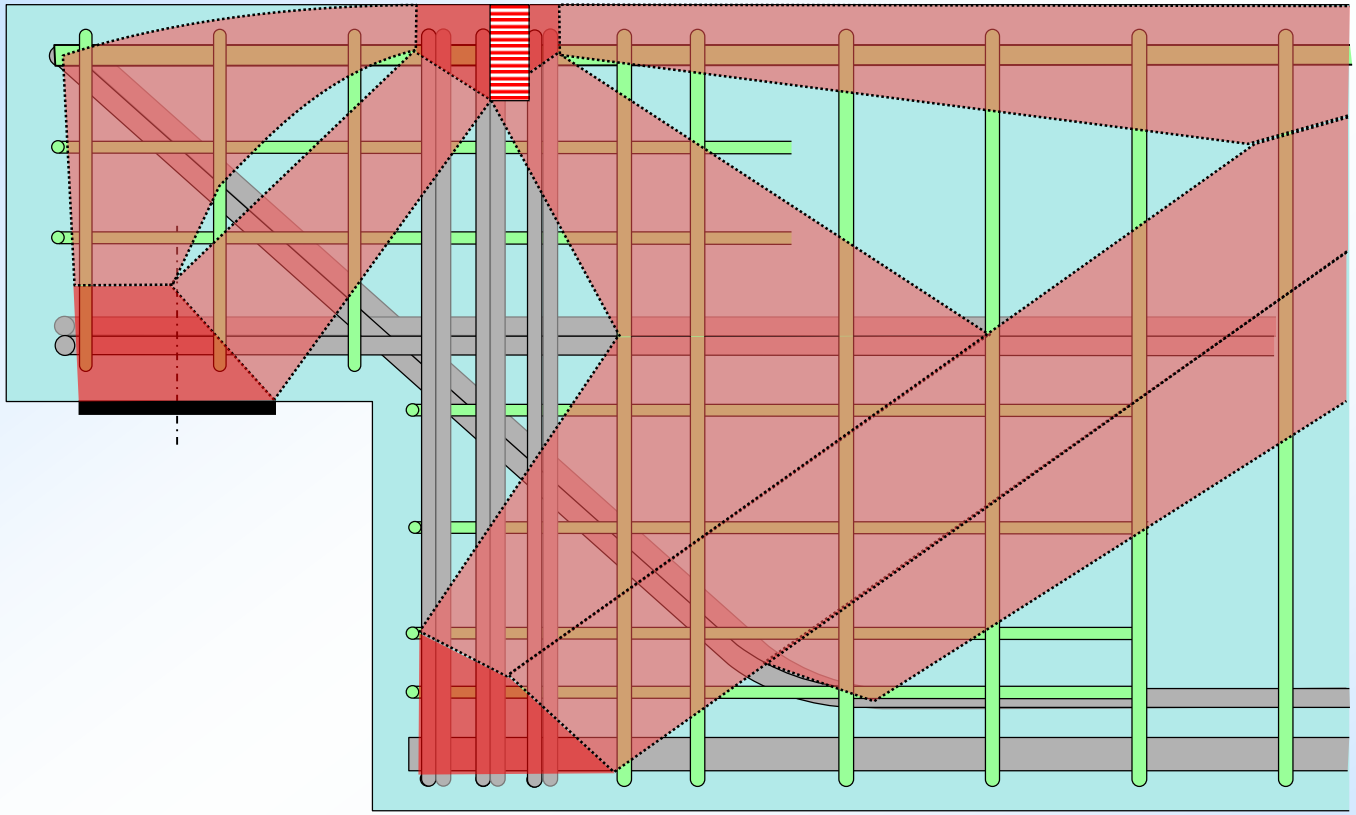
6 ∅ 28
am Auflager



idealisiertes Stabwerkmodell



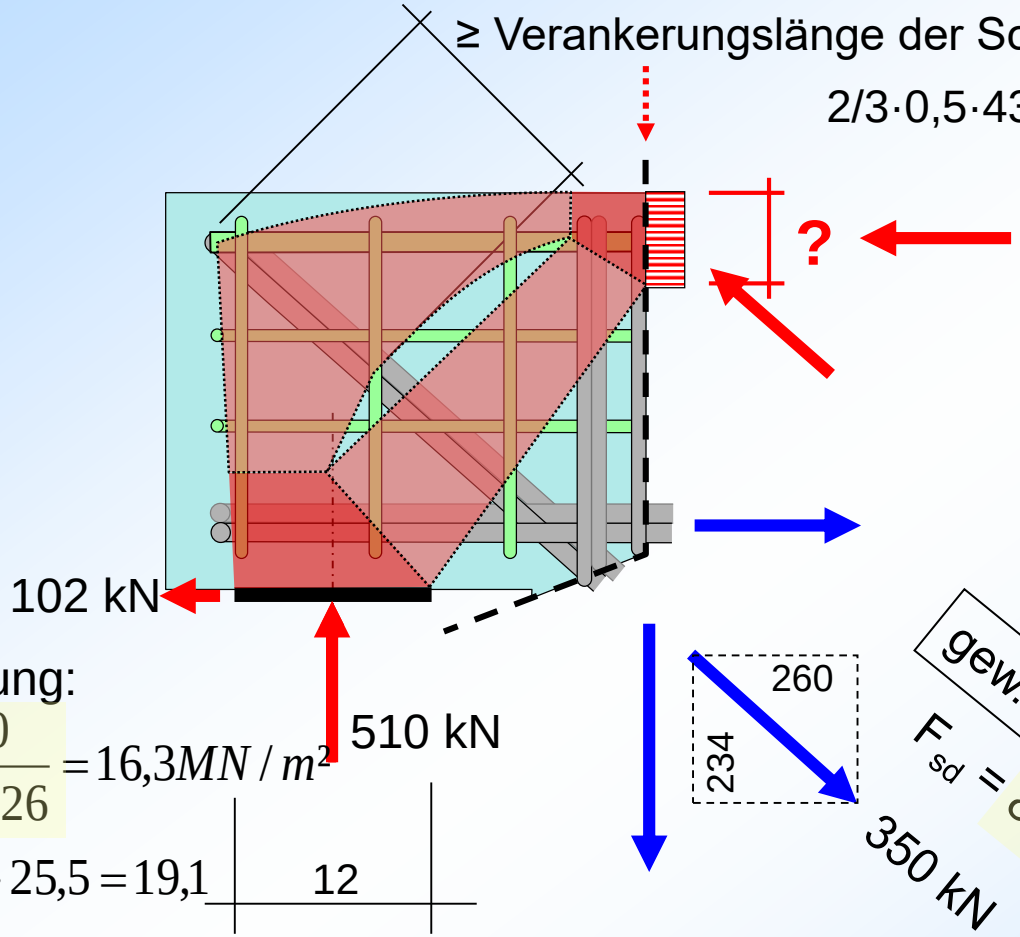
Nur mit einer Schrägbewehrung in der Auflagernase ist es möglich, die Druckzone oberhalb der „Aufhängebügel“ zu aktivieren und ein vorzeitiges Abplatzen der Betondeckung zu verhindern.



Damit kann der innere Hebelarm am Anschnitt der Nase optimal genutzt werden. Mit schlaufenförmiger Bewehrung aus dünneren Stäben muss eine kurze Verankerungslänge sichergestellt werden.

≥ Verankerungslänge der Schrägschlaufen mit $d_{br} = 15 \cdot d_s$

$2/3 \cdot 0{,}5 \cdot 43 = \underline{14{,}3} \geq 8{,}5 \cdot d_s = 13{,}6$



Entsprechend dem Traglastgedanken kann die aufnehmbare Kraft z.B. in einer vorgewählten Schrägbewehrung ermittelt werden.

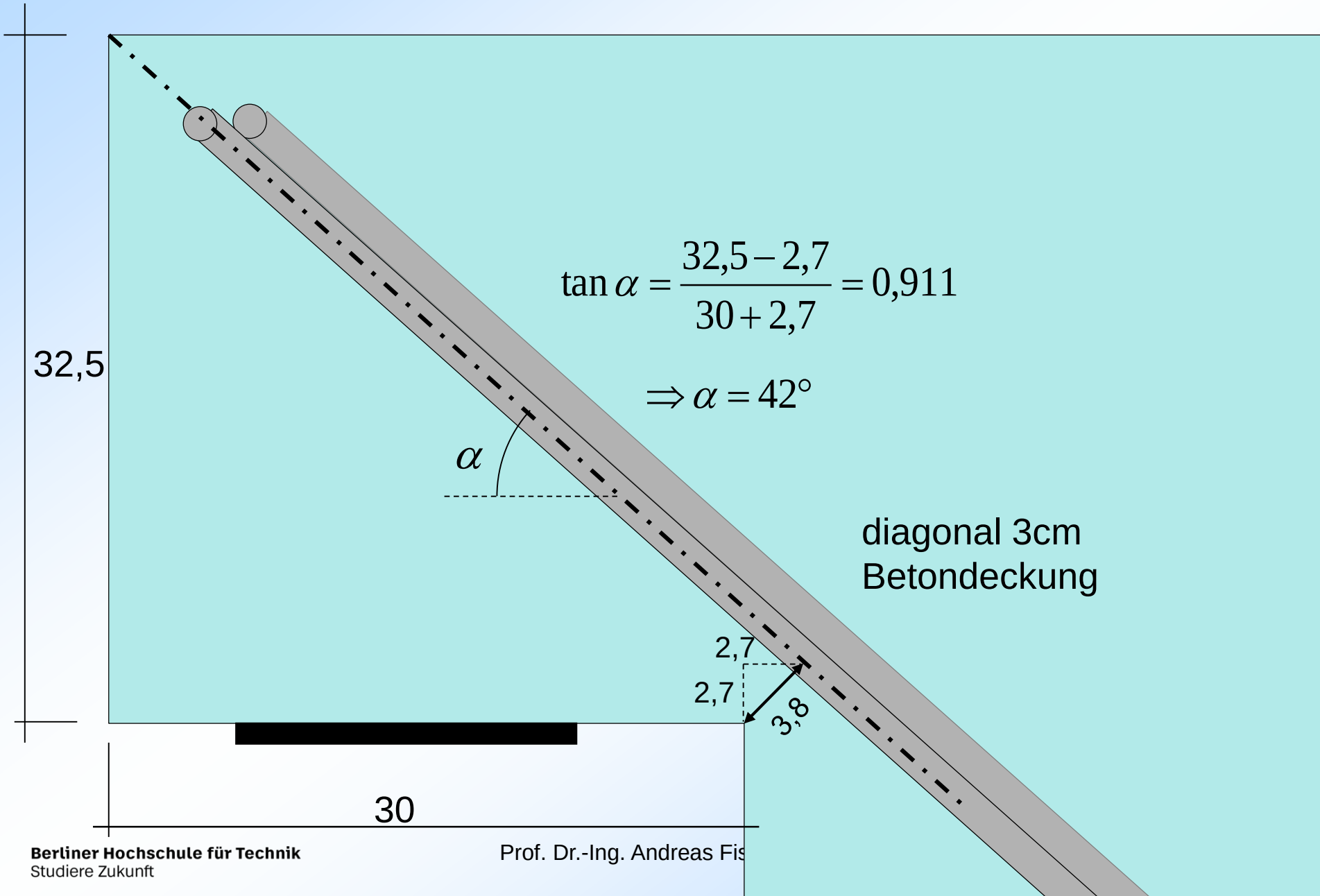
gew.: 2 Schlaufen ∅16 ≙ 8,04 cm²

$F_{sd} = 8{,}04 \cdot 43{,}5 =$

Lagerpressung:

$$\sigma_{cd} = \frac{0{,}510}{0{,}12 \cdot 0{,}26} = 16{,}3 MN/m^2$$

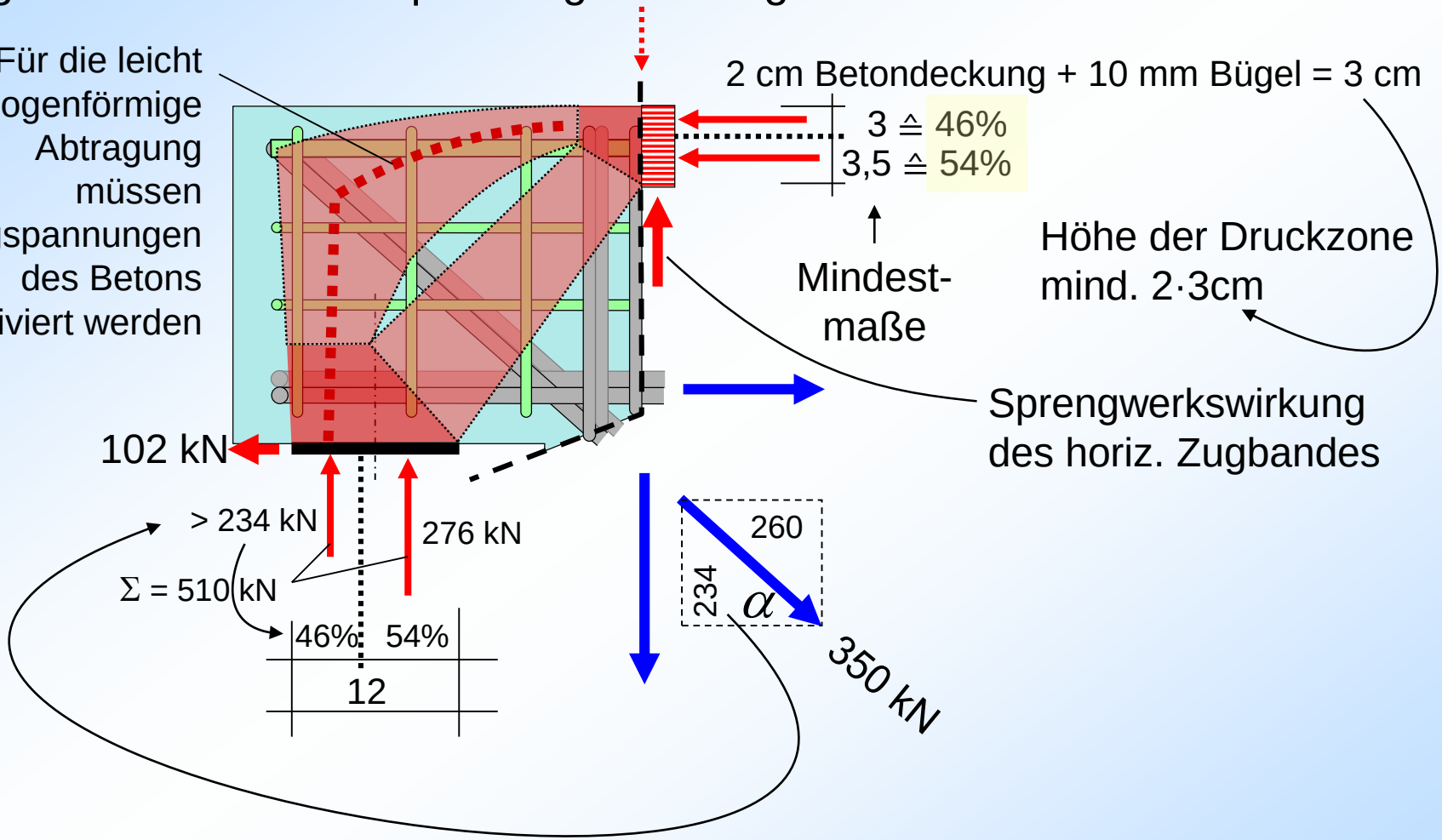
$$\leq 0{,}75 \cdot 1{,}0 \cdot 25{,}5 = 19{,}1$$



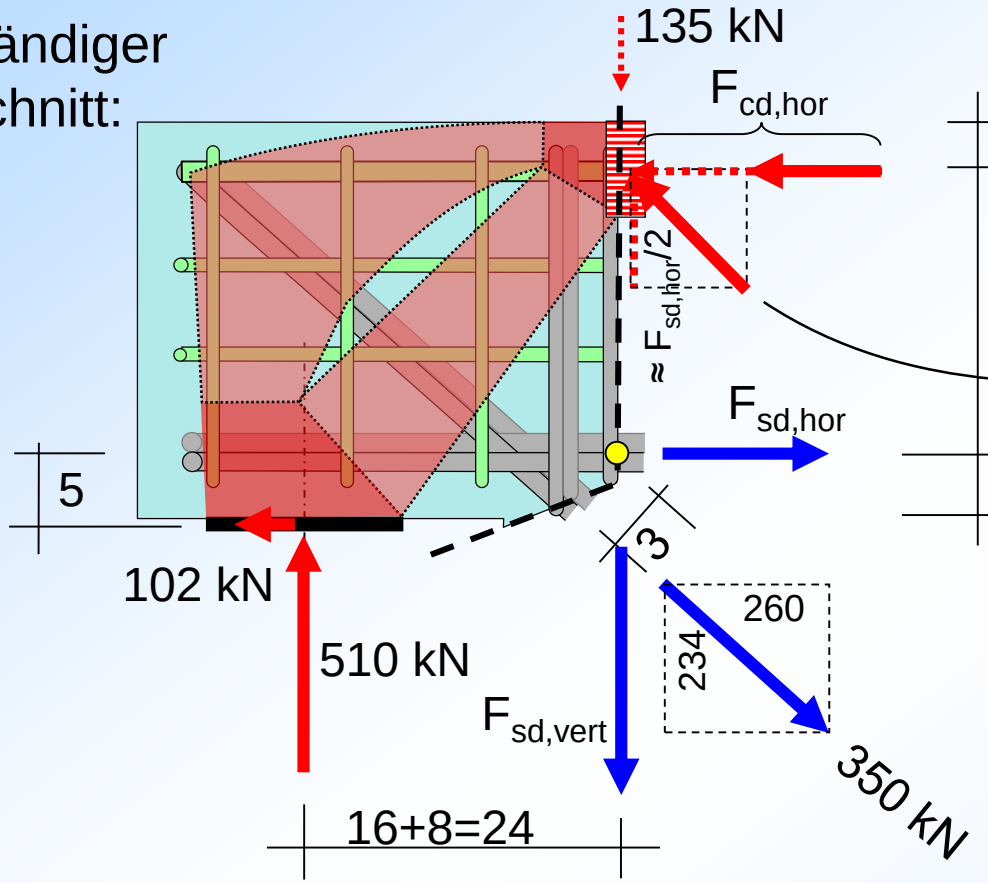
$$\tan\alpha = \frac{32{,}5 - 2{,}7}{30 + 2{,}7} = 0{,}911$$

$$\Rightarrow \alpha = 42°$$

Nur die H-Komponente der Schrägbewehrung kann oberhalb der Bügelinnenseite Druckspannungen erzeugen:



Vollständiger Freischnitt:



0,5·6,5 alternativ wählbar größere Knotenhöhe

24,7

Sprengwerkswirkung des horiz. Zugbandes

4,5

Höhe der Druckzone mind. 2·3cm

$$\sigma_{cd} = \frac{0{,}474}{0{,}065 \cdot 0{,}40} = 18{,}2\, MN/m^2$$

$$\leq 0{,}75 \cdot 1{,}0 \cdot 25{,}5 = 19{,}1$$

$\Sigma M_{\bigcirc} = 0 = 510 \cdot 0{,}24 + 102 \cdot 0{,}05 - 350 \cdot 0{,}03 - F_{cd,hor} \cdot 0{,}247$ $\Rightarrow F_{cd,hor}$ = **474 kN**

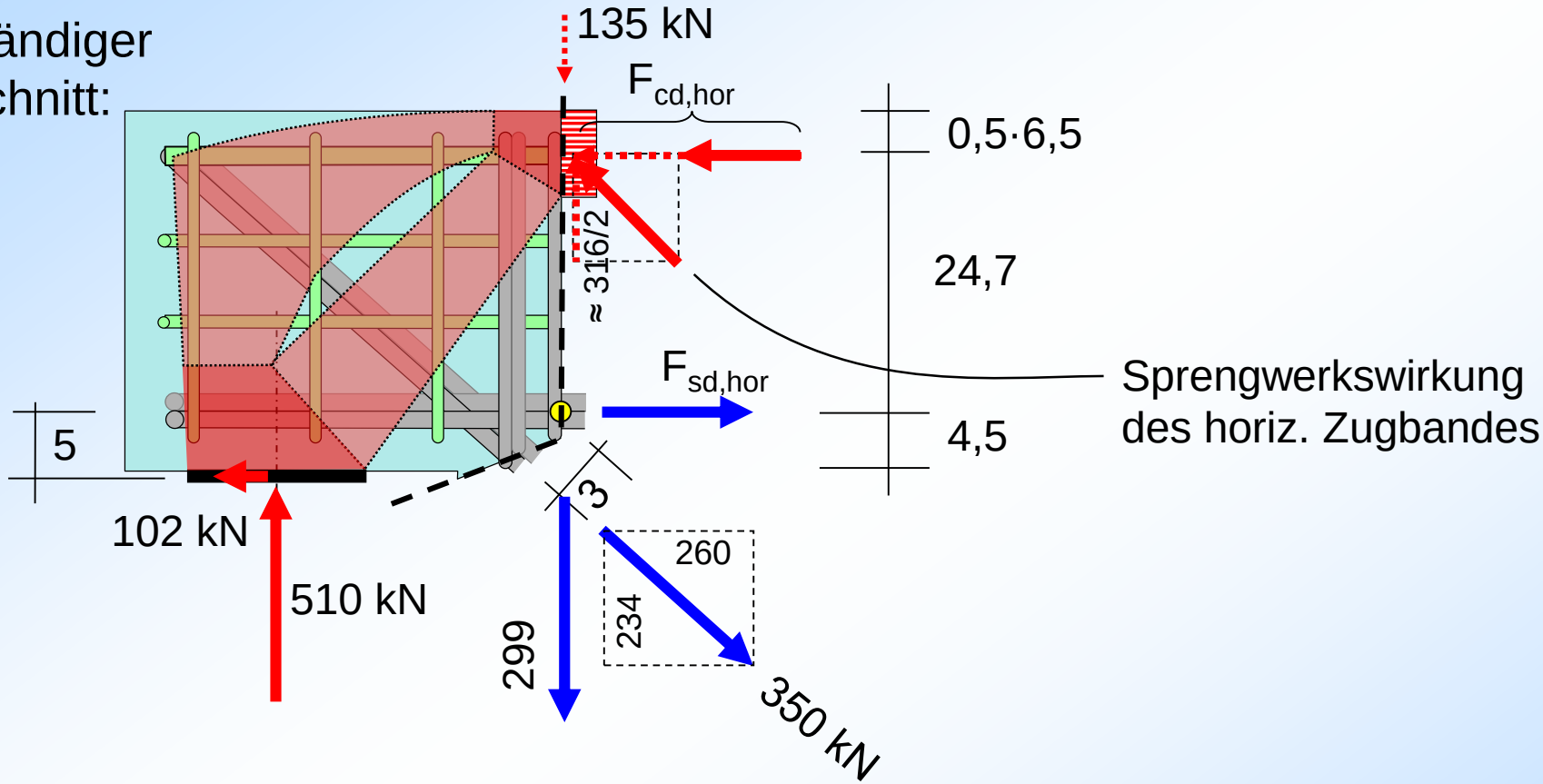
$\Rightarrow F_{sd,hor} = 474 + 102 - 260 =$ **316 kN**

$\Rightarrow F_{sd,vert} = 510 - 135 - 234 + 316/2 =$ **299 kN**

gew.: 2 Schlaufen Ø16 ≙ 8,04 cm²

gew.: 3 Bügel Ø10 vierschnittig, e = 4 cm ≙ 9,42 cm²

Vollständiger Freischnitt:



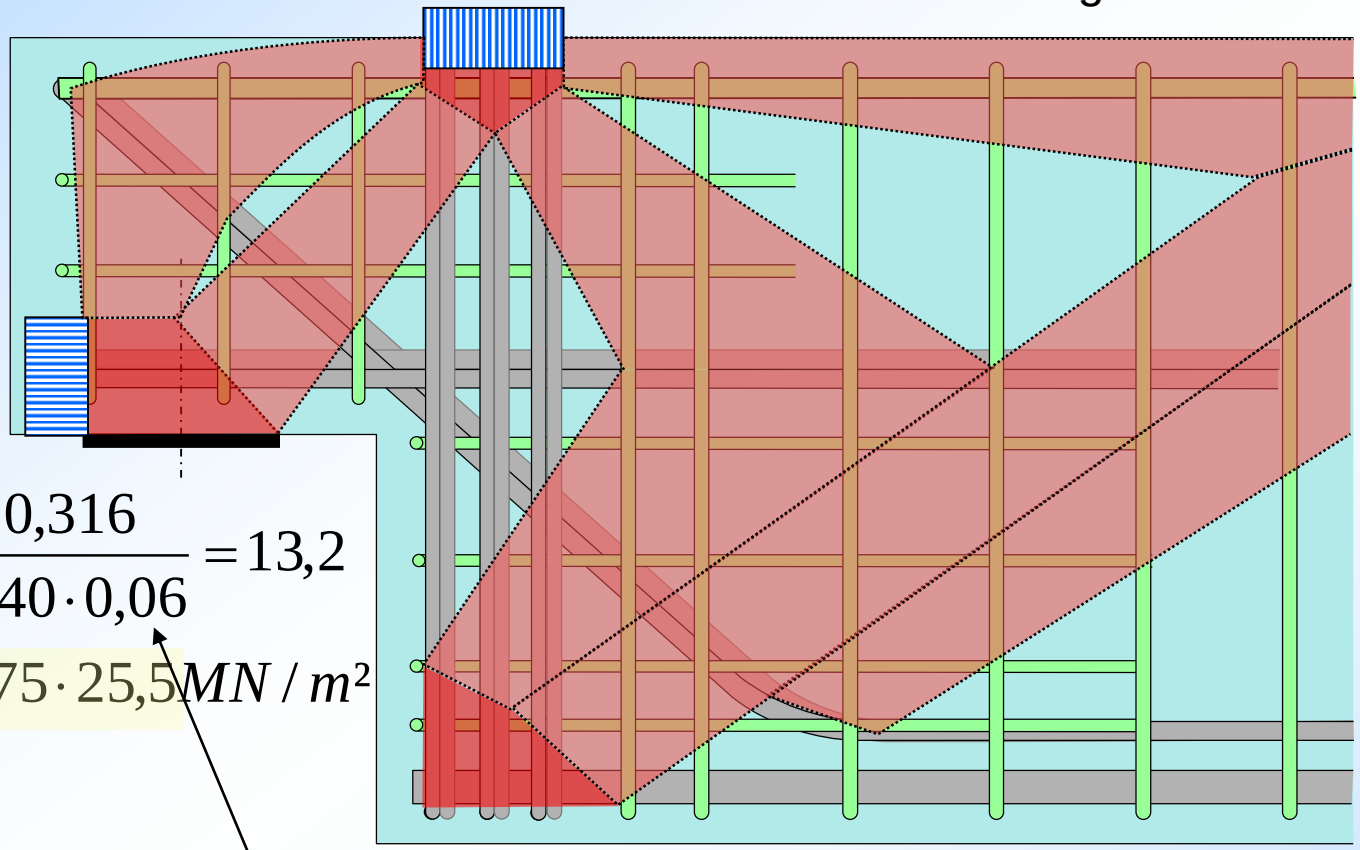
Summe der Vertikalkraftanteile in der „Aufhängebewehrung“:

299 + 234 = **533 kN** > 510 – 135 = **375 kN**

Nachweise an den fiktiven Lastplatten:

$$\sigma_{cd} = \frac{0{,}299}{0{,}40 \cdot 0{,}10} = 7{,}5 \leq 0{,}75 \cdot 25{,}5 MN/m^2$$

unbedingt mehrschnittige Bügel!



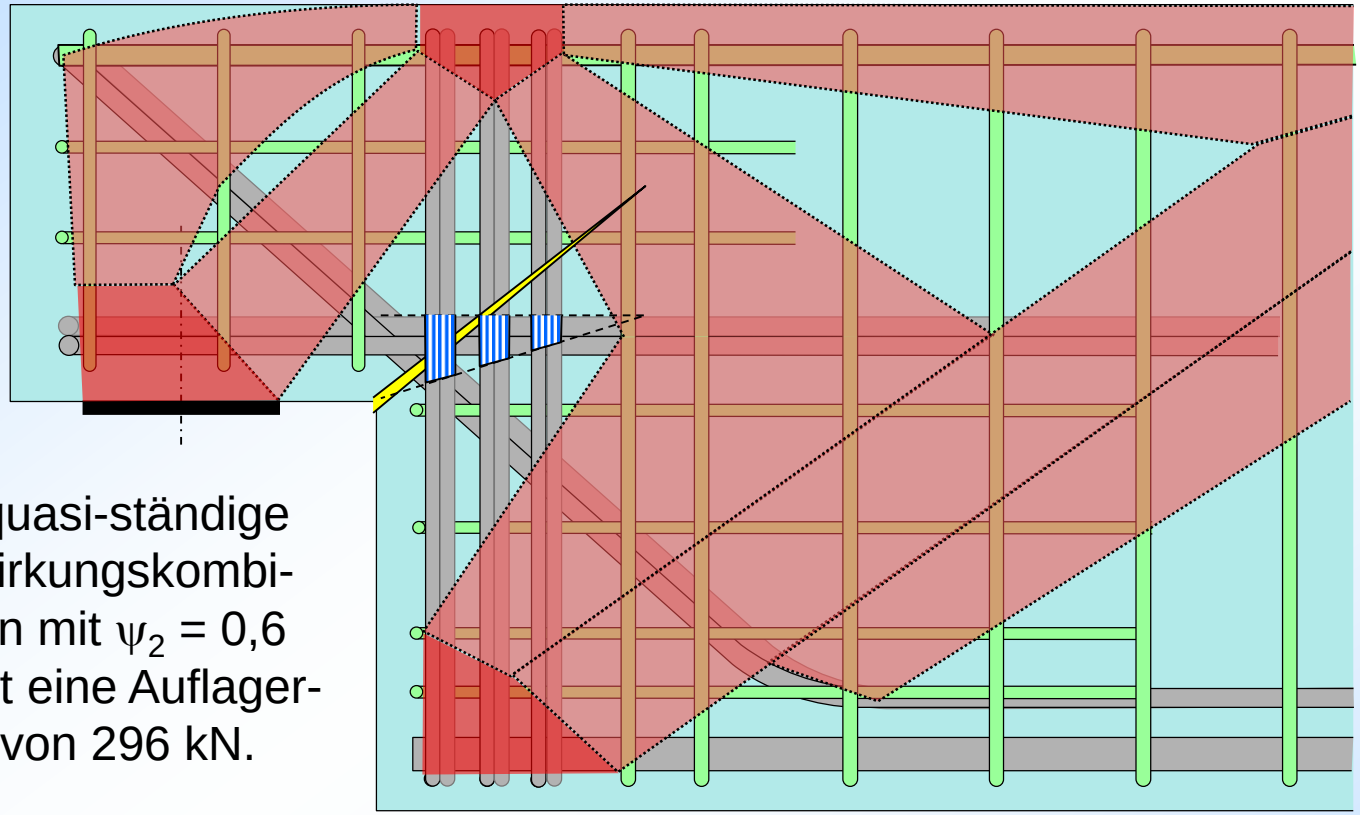
$$\sigma_{cd} = \frac{0{,}316}{0{,}40 \cdot 0{,}06} = 13{,}2$$

$$\leq 0{,}75 \cdot 25{,}5 MN/m^2$$

Längsüberstand der Bewehrung über die Lagerkante = 8 - 2 = 6 cm

➔ red u = 2·6/2 = 6 cm

Entsprechend der Rissgeometrie erhält der äußere Bügel hier eine um etwa 30% vergrößerte Stahlspannung gegenüber dem Mittelwert



Die quasi-ständige Einwirkungskombination mit $\psi_2 = 0{,}6$ ergibt eine Auflagerkraft von 296 kN.

Bei etwa gleichen Hebelarmen im GZG erhält man für den äußeren Bügel als Stahlspannung:

$$\sigma_{s,Bü} = 1{,}3 \cdot \frac{296}{510} \cdot \frac{299kN}{9{,}42cm^2} \cdot [10] = 239MN/m^2$$

Als maximalen Rissabstand erhält man:

$$s_{r,max} = \frac{F_{s,cr} \cdot d_s}{3{,}6 \cdot f_{cteff} \cdot A_s} = \frac{\overbrace{0{,}05m \cdot 0{,}40m \cdot 3{,}8MN/m^2}^{F_{s,cr} = 0{,}076MN} \cdot 10mm}{3{,}6 \cdot 3{,}8MN/m^2 \cdot 4 \cdot 0{,}0000785m^2} = 177mm$$

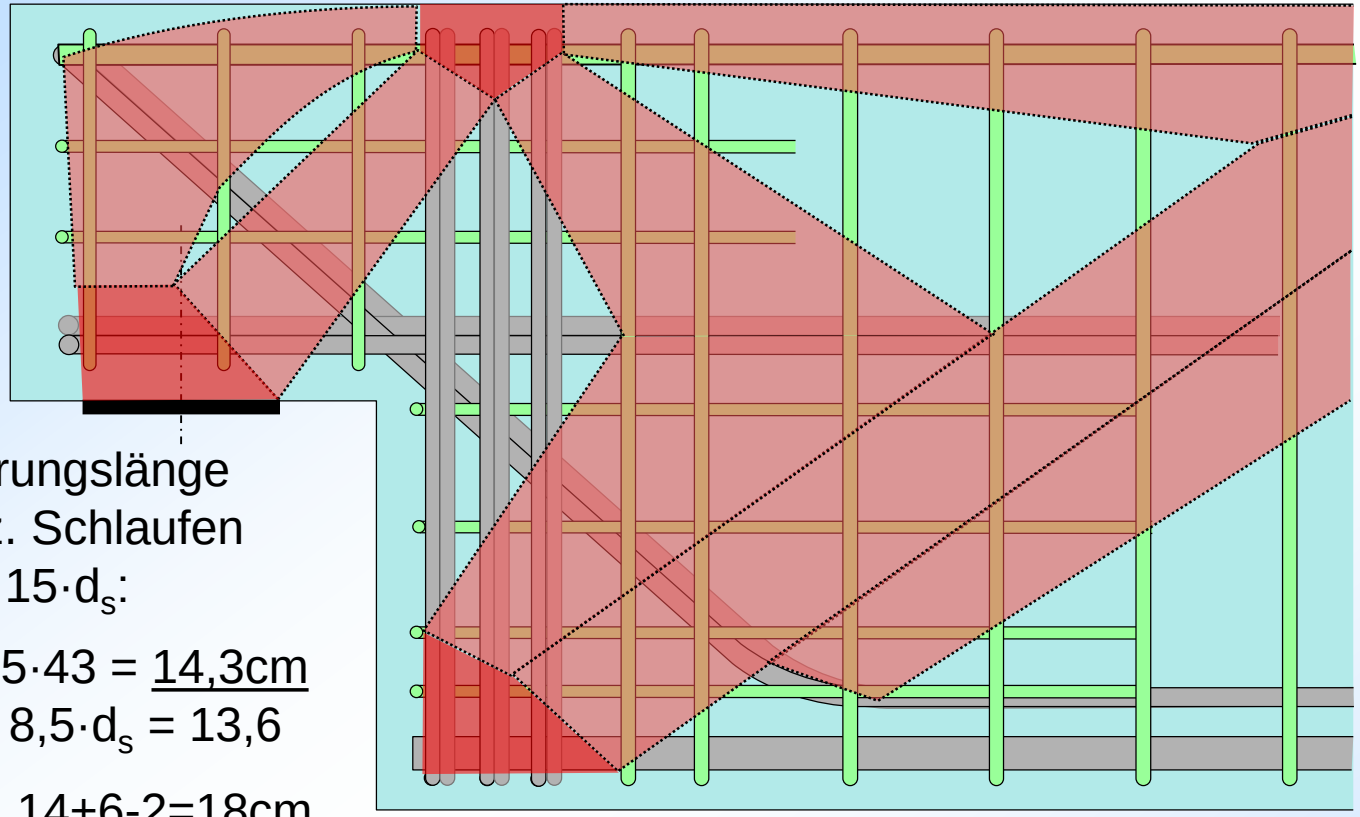
Stahlkraft im Riss:

$$F_s = 4 \cdot 0{,}0000785\ m^2 \cdot 239\,MN/m^2 = 0{,}075\,MN$$

Rissbreite grob überschläglich:

$$w_k = s_{r,\max} \cdot \frac{F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr}}{E_s \cdot A_s} = 177mm \cdot \frac{0{,}075MN - 0{,}4 \cdot 0{,}075MN}{200000MN/m^2 \cdot 4 \cdot 0{,}0000785m^2} = 0{,}13mm$$

Die tätsächliche Rissbreite des schrägen Risses bleibt noch unterhalb des berechneten Wertes:



Verankerungslänge der horiz. Schlaufen mit $d_{br} = 15 \cdot d_s$:

$2/3 \cdot 0{,}5 \cdot 43 = \underline{14{,}3\text{cm}}$

mind. $8{,}5 \cdot d_s = 13{,}6$

Vorh.: 14+6-2=18cm

Für den unteren Knoten 5 ist die vorhandene Verankerungslänge der unteren Feldbewehrung meistens zu kurz, es sollte aber auf keinen Fall ein größerer Abstand der Aufhängebügel gewählt werden.

Um die horizontale Verankerungskraft am Knoten 5 klein zu halten, sollte bei der Querkraftbemessung ein steilerer Druckstrebenwinkel gewählt werden, rechnerisch jedoch nicht steiler als 40° (cotθ = 1,2 bzw. tanθ = 0,84).

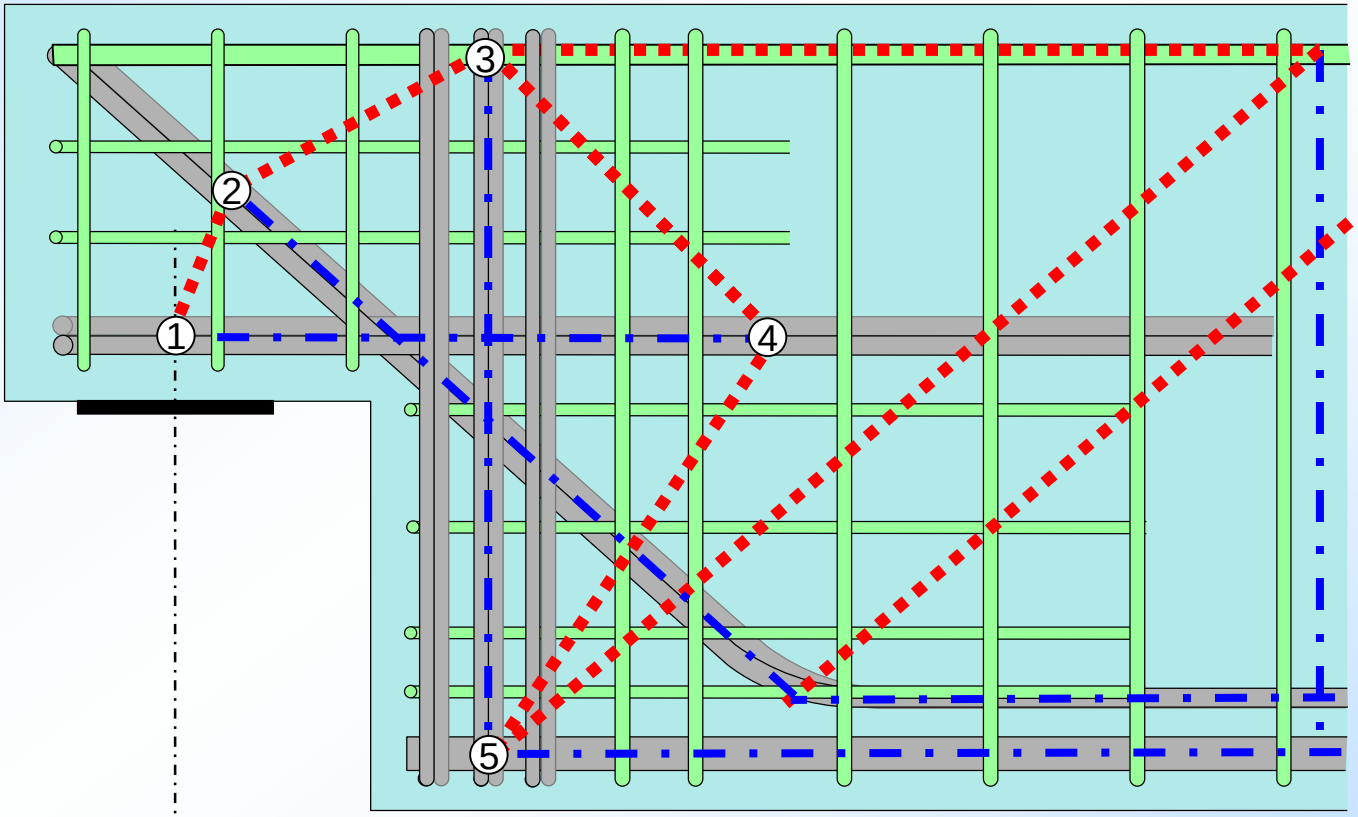
Damit ergibt sich hier für eine Querkraft von 510 – 135 = 375 kN

$$erfa_{s,w} = \frac{375kN}{43{,}5kN/cm^2 \cdot (0{,}9 \cdot 0{,}6m) \cdot 1{,}2} = 13{,}3cm^2/m$$

gew.: Bügel ∅10/10 ≙ 15,7 cm²/m

Verankerung am unteren Knoten 5:

Ein Teil der Querkraft wird bereits durch die Schrägschlaufen (234 kN) aufgenommen, damit verbleibt als Horizontalkomponente aus Querkraft (375 – 234) · 1,2 = 169 kN; H-Komp. aus dem Konsolband über Knoten 4: 316·24,7 / 57,7 = 135 kN, insgesamt zu verankern: 169 + 135 = 304 kN



10

$$erfA_s = \frac{304kN}{43{,}5kN/cm^2} = 7{,}0cm^2$$

$$vorhA_s = 37{,}0cm^2$$ (6 ∅ 28)

Verankerungslänge:

$$= 1{,}0 \cdot \frac{7}{37{,}0} \cdot 76cm = 14{,}4cm$$

$$\text{mind } 0{,}3 \cdot 76cm = 23cm$$

$$\text{mind } 10 \cdot 2{,}8cm = 28cm$$

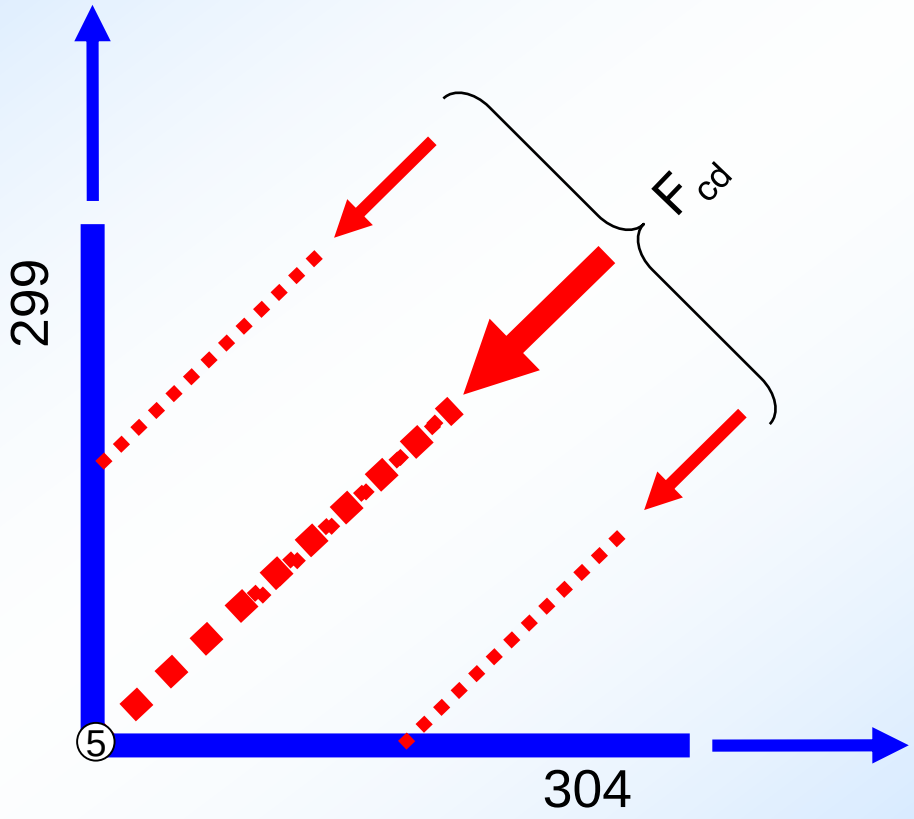
Die Forderungen nach einer Mindest-verankerungslänge können nach Auffassung des Verfassers **hier** ignoriert werden, da eine sorgfältige Nachverfolgung der Kräfte vorgenommen wird.

$$vorh\ l_{b,net} = 10cm$$

ist trotzdem nicht ausreichend, da nur eine Kraft von 304·10/14,4 = 211 kN übertragen werden kann. Es fehlen 304 – 211 = 93 kN.

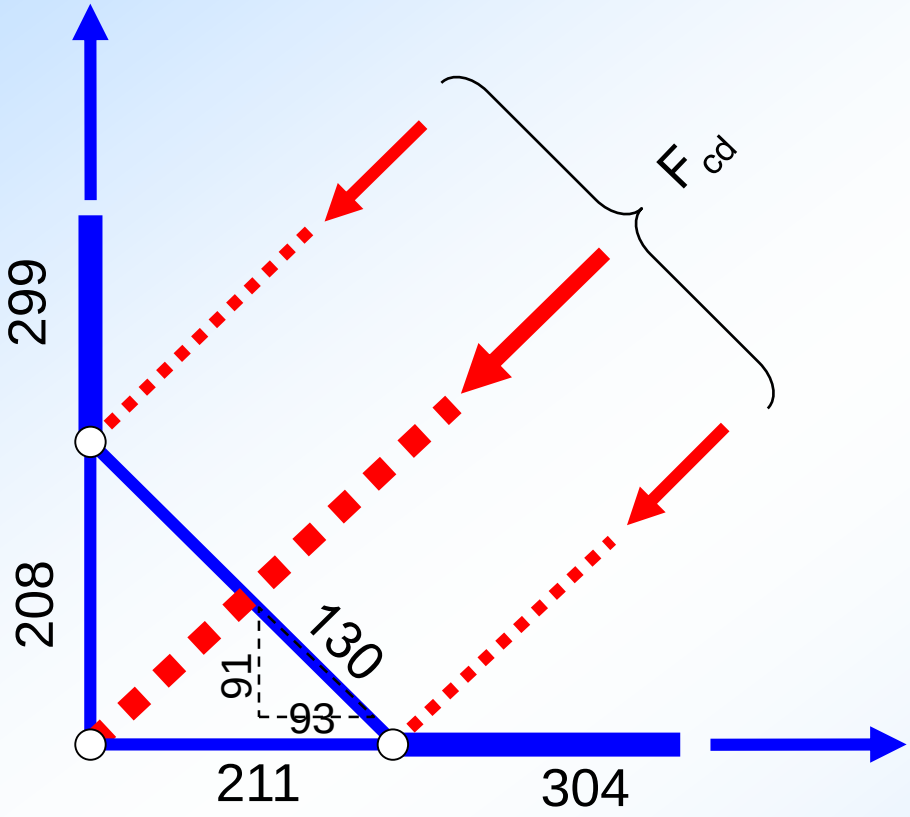
Der untere Knoten muss sich nicht auf den Bereich der Aufhängebewehrung beschränken, ähnlich wie bei indirekt gelagerten Wandscheiben oder Trägern kann der Knoten durch Zulagebewehrung vertikal und horizontal vergrößert bzw. die aufnehmbare Kraft gesteigert werden:

Die einzelne Druckstrebe muss nun aufgeweitet werden, um den Knoten 5 zu entlasten

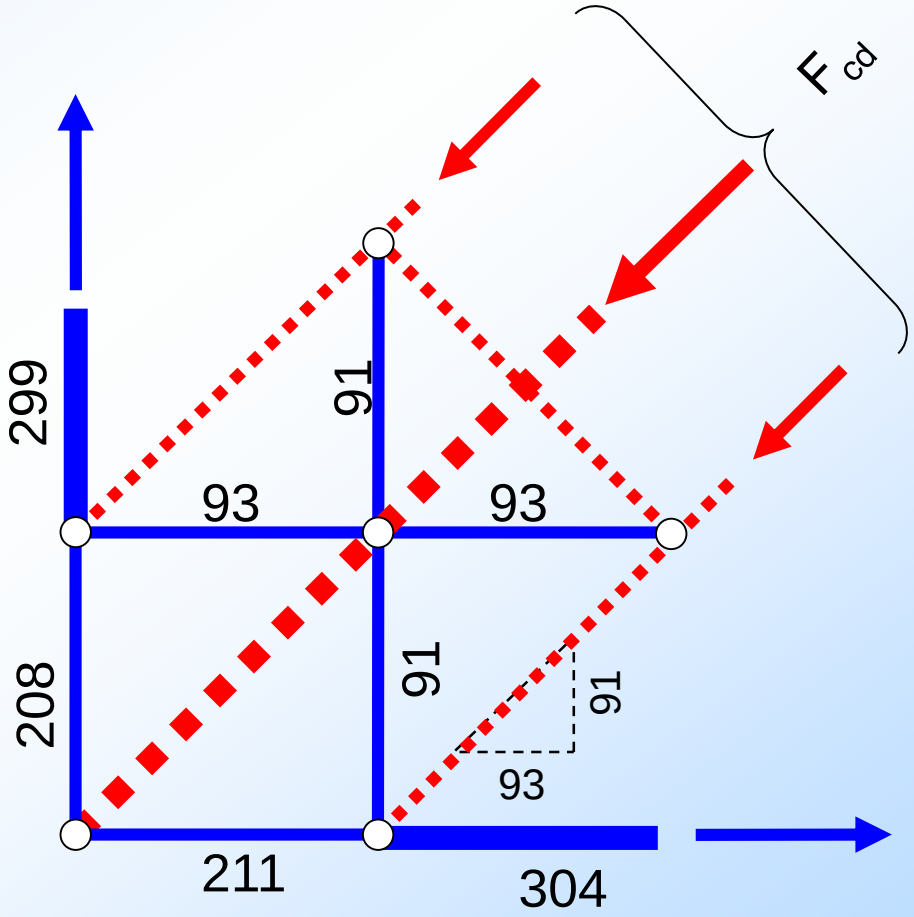


Hierfür muss zusätzlich eine schräge oder eine orthogonale Bewehrung ergänzt werden

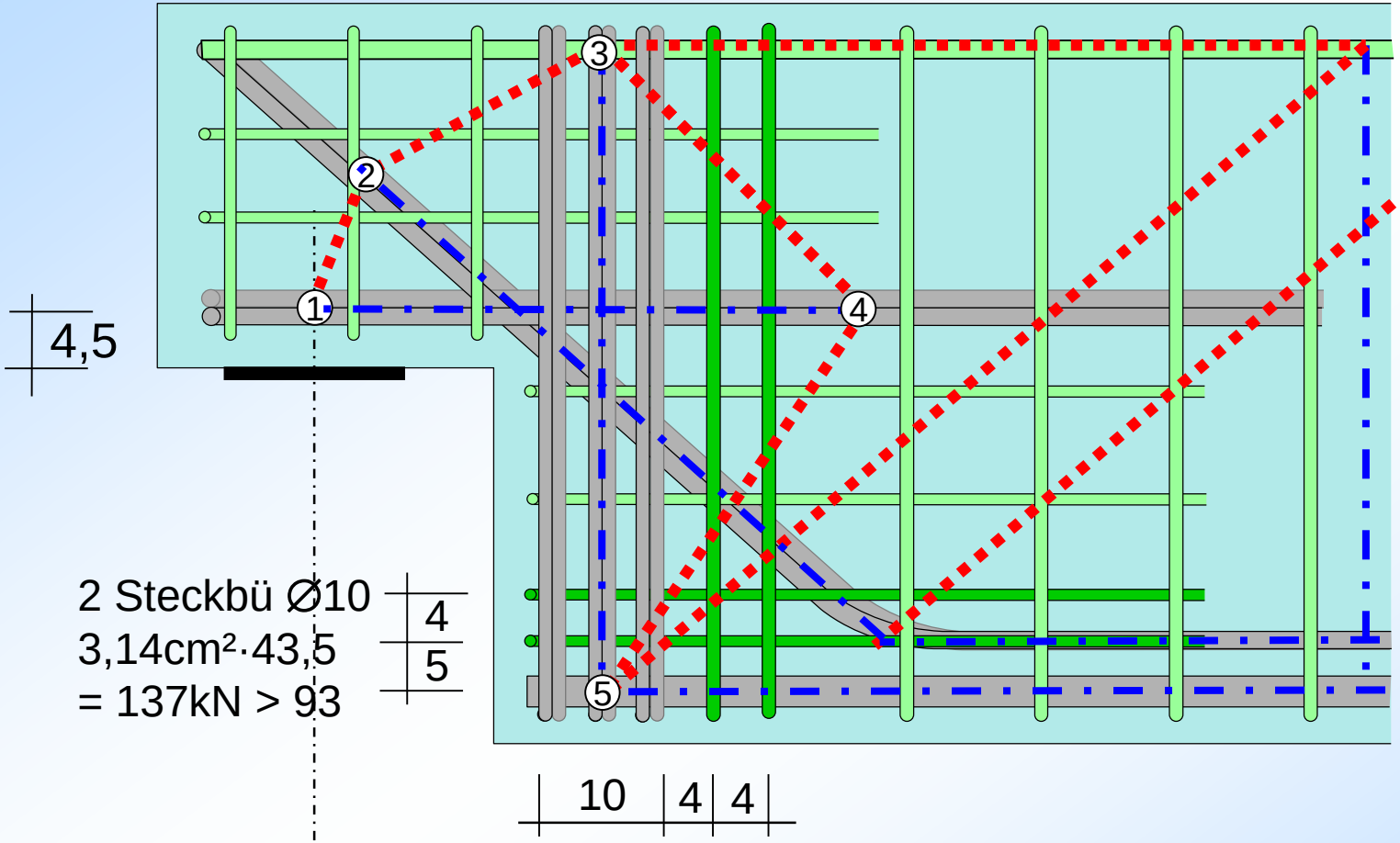
Idealerweise wird ein Umlenkknoten oder eine Schrägbewehrung (hier ca. 45°) ausgebildet.



Alternativ bei zusätzlicher orthogonaler Bewehrung:

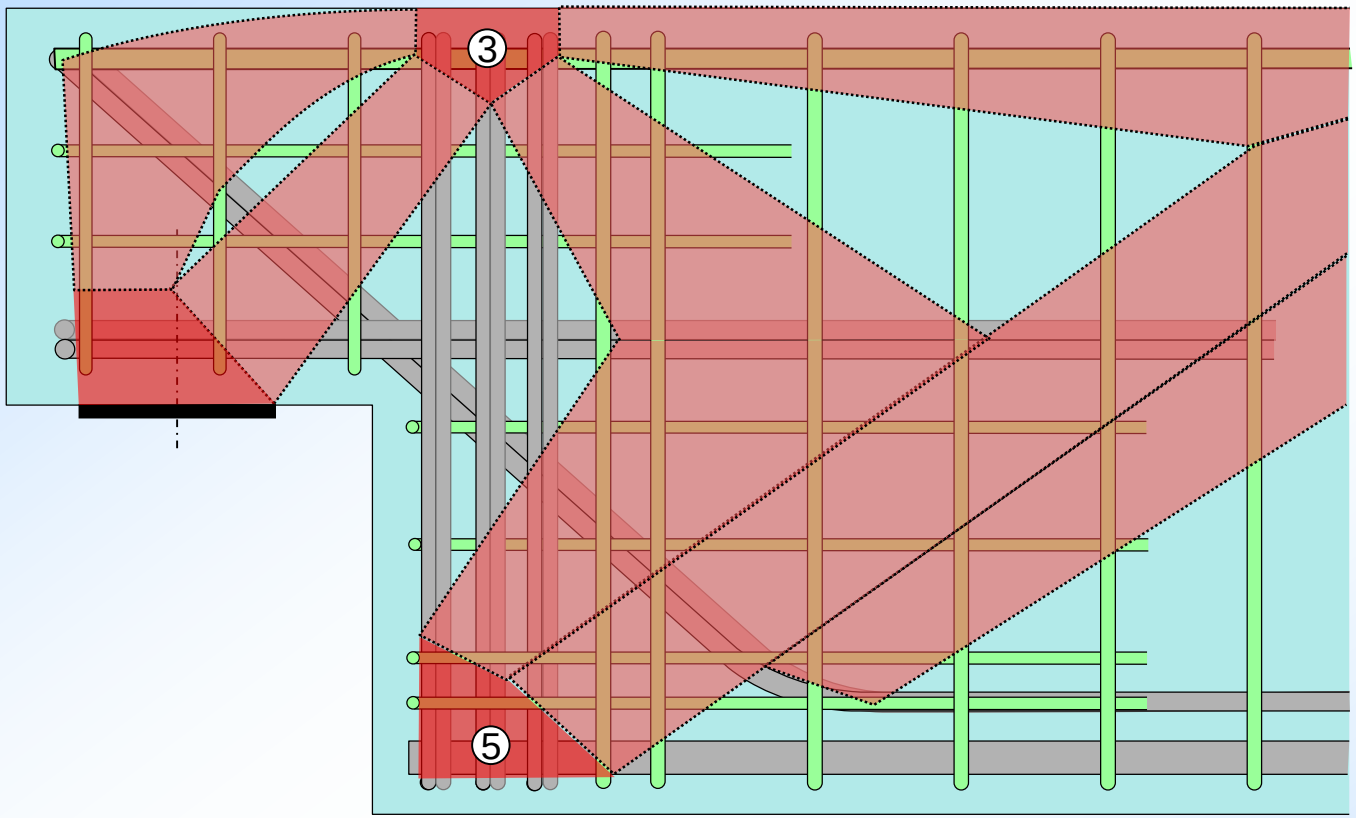


der Knoten 5 ist nun durch zusätzliche Bügel und Steckbügel entlastet

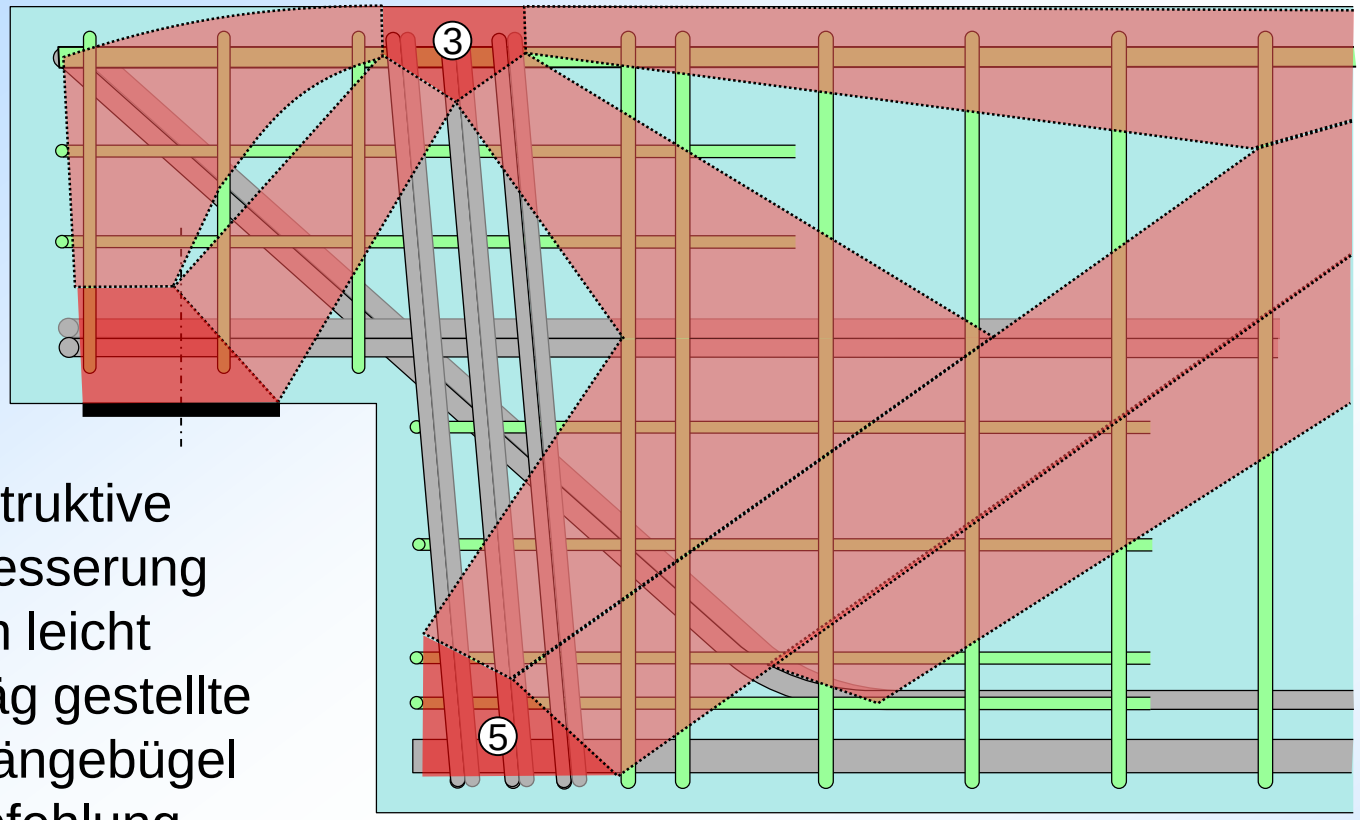


2 Bü ∅10 konstruktiv
e = 4 cm: 3,14cm²·43,5 = 137kN > 91

Im Bereich der zusätzlich eingelegten Bügel kann die fehlende Verbundkraft von 93 kN zwischen Längsbewehrung und Beton hier o. w. N. übertragen werden.



Die fiktive **vertikale** Lagerpressung am Knoten 5 ist nun kleiner als am Knoten 3, damit kann der Nachweis hier entfallen



Konstruktive Verbesserung durch leicht schräg gestellte Aufhängebügel (Empfehlung Steinle):

⇒ steilere Druckstrebe zum oberen Knoten 3 ,geringere Kraft in Konsolbew., Entlastung des oberen Knotens, Entlastung der „Aufhängebügel“, vergrößerte Verankerungslänge am unteren Knoten 5

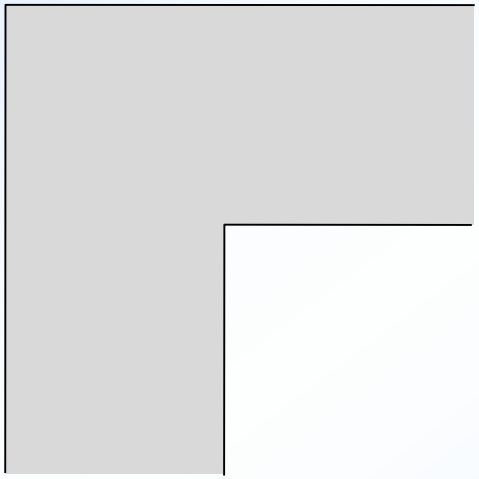
Zusammenfassung:

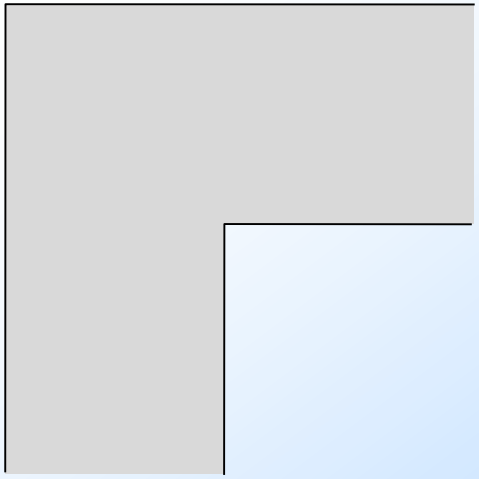
- Das Modell mit ausschließlich vertikaler Bewehrung nutzt die Betondruckzone nicht aus und führt zum frühzeitigen Abplatzen der Betondeckung.
- Daher ist eine Bewehrung aus schrägen Schlaufen so zu dimensionieren, dass eine ausreichende Druckkraft in die Betondeckung geleitet werden kann.
- Verankerung der Konsolbewehrung sinnvollerweise über ein „Sprengwerk“, um Verformungen und Rissbreiten im Gebrauchszustand klein zu halten.
- Infolge der Sprengwerkwirkung ist die „Aufhängebewehrung“ für die Zusatzbeanspruchung zu bemessen.

4 Rahmenecken

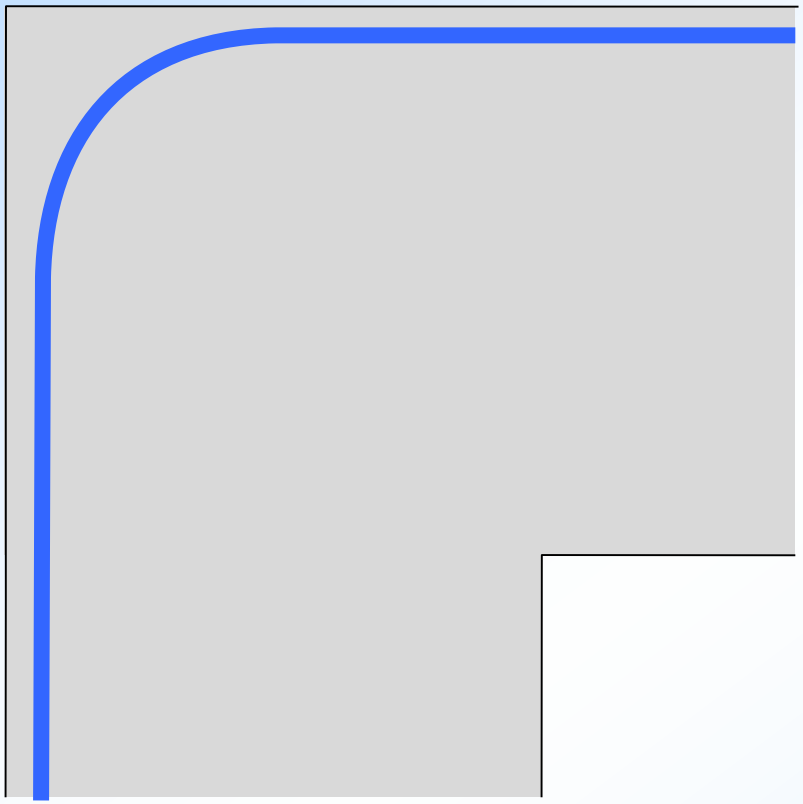
- Rahmenecken mit sich schließendem Moment
- Rahmenecken mit sich öffnendem Moment

4.1 Rahmenecken mit sich schließendem Moment

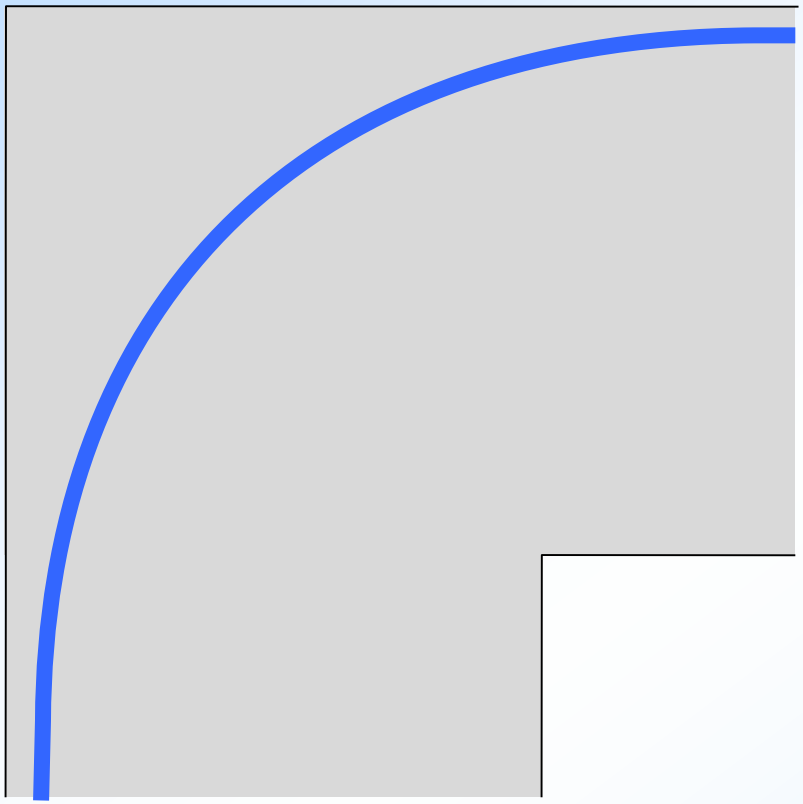


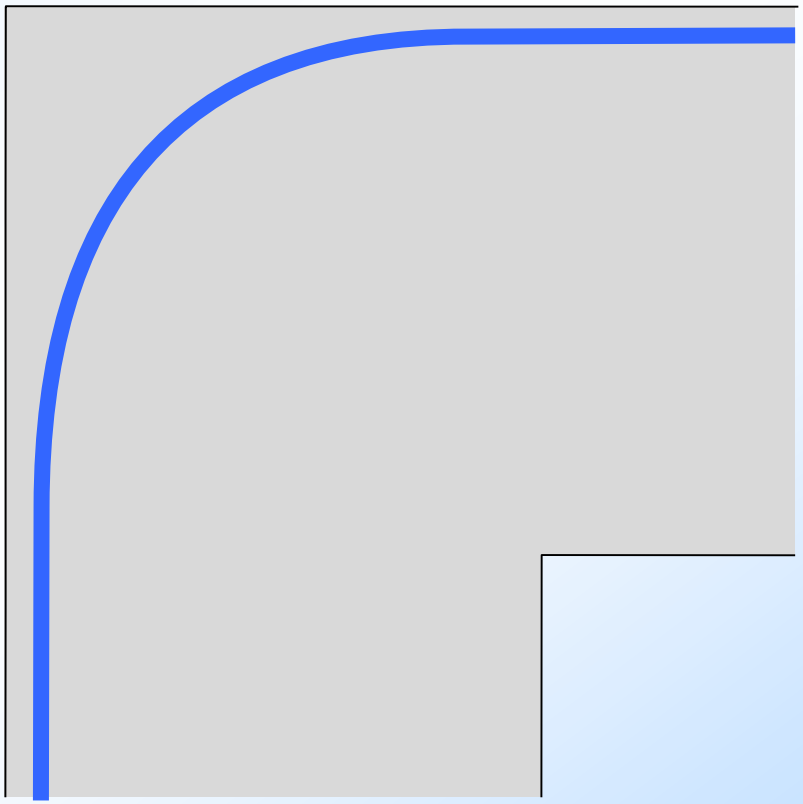


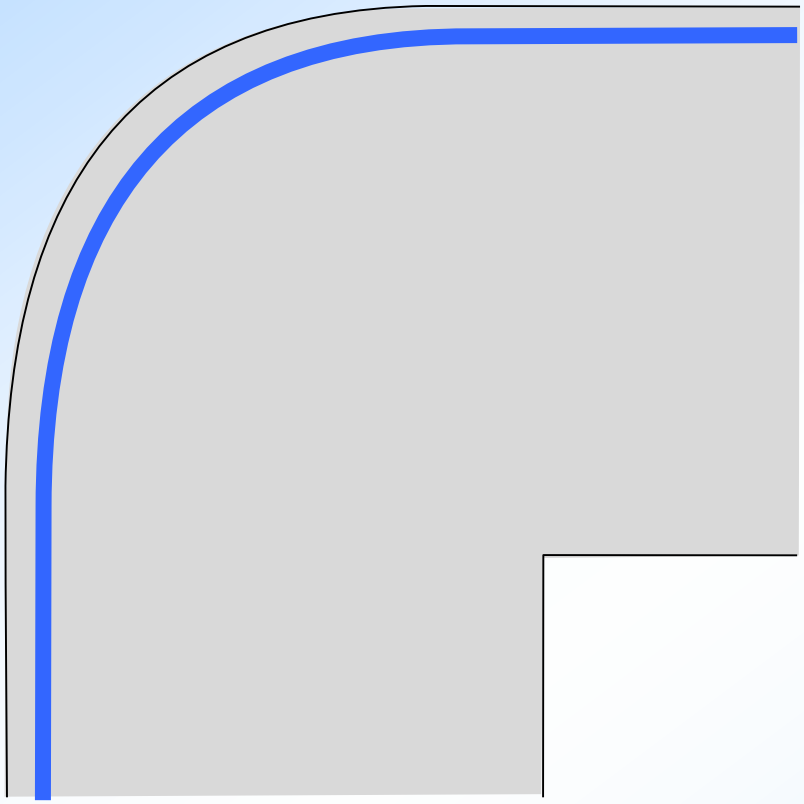
Hydrostat. Knoten auf der Innenseite

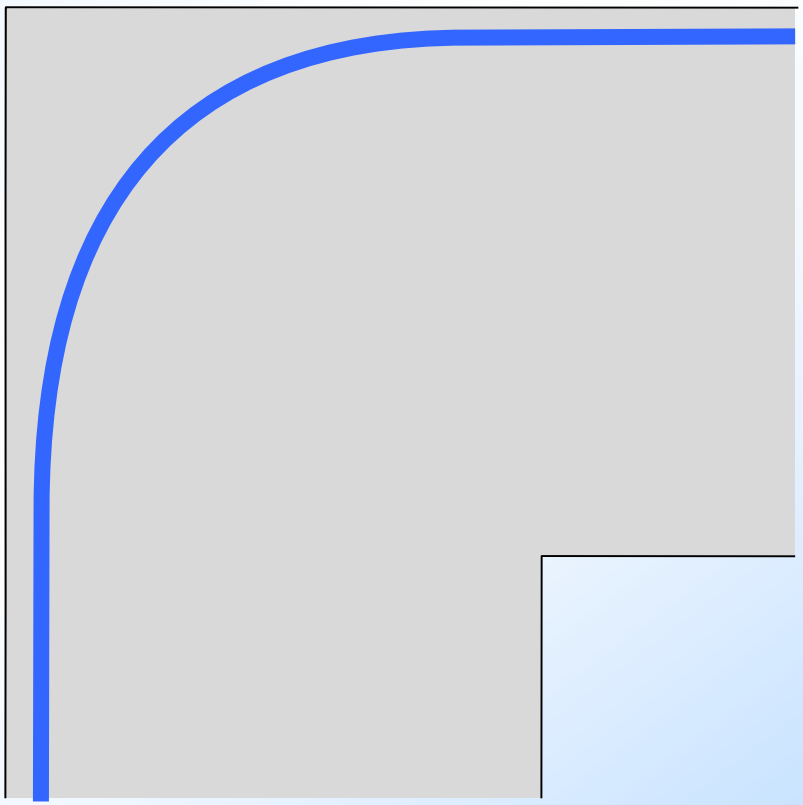


Der Biegerollendurchmesser sollte groß sein, aber nicht zu groß!

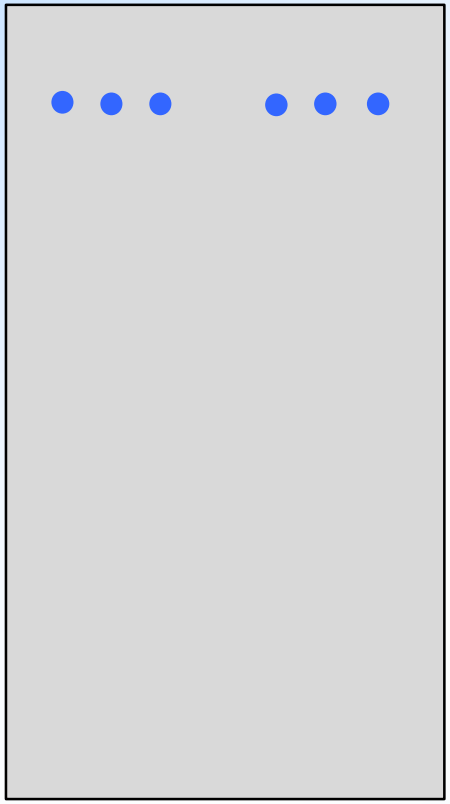


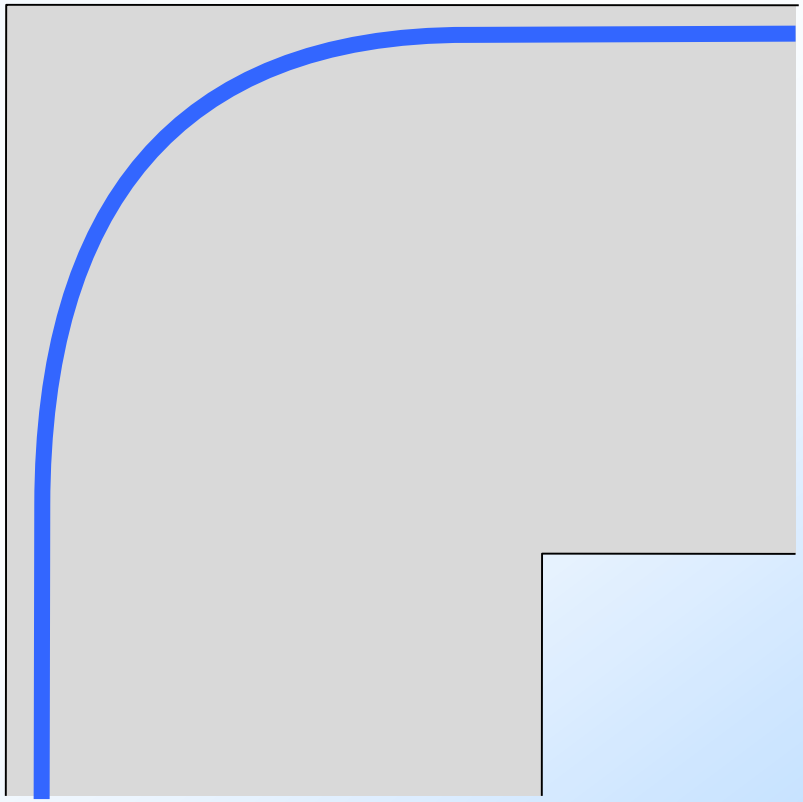






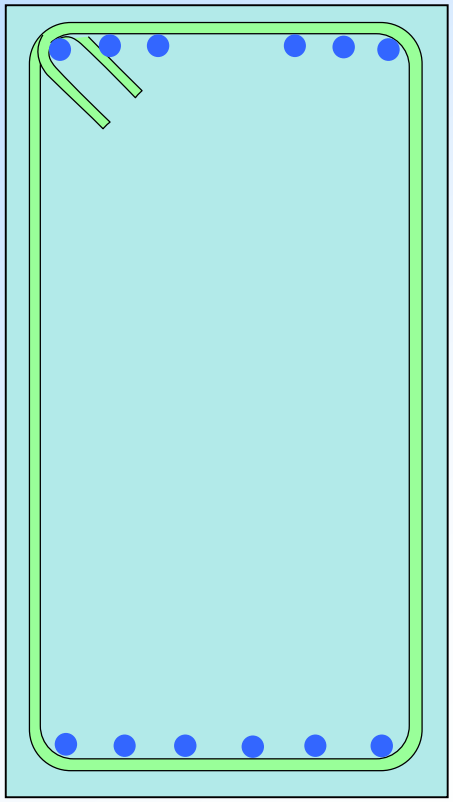
Spannungen in Querrichtung





Beispiel

Bewehrungsskizze (sich schließende) Rahmenecke:



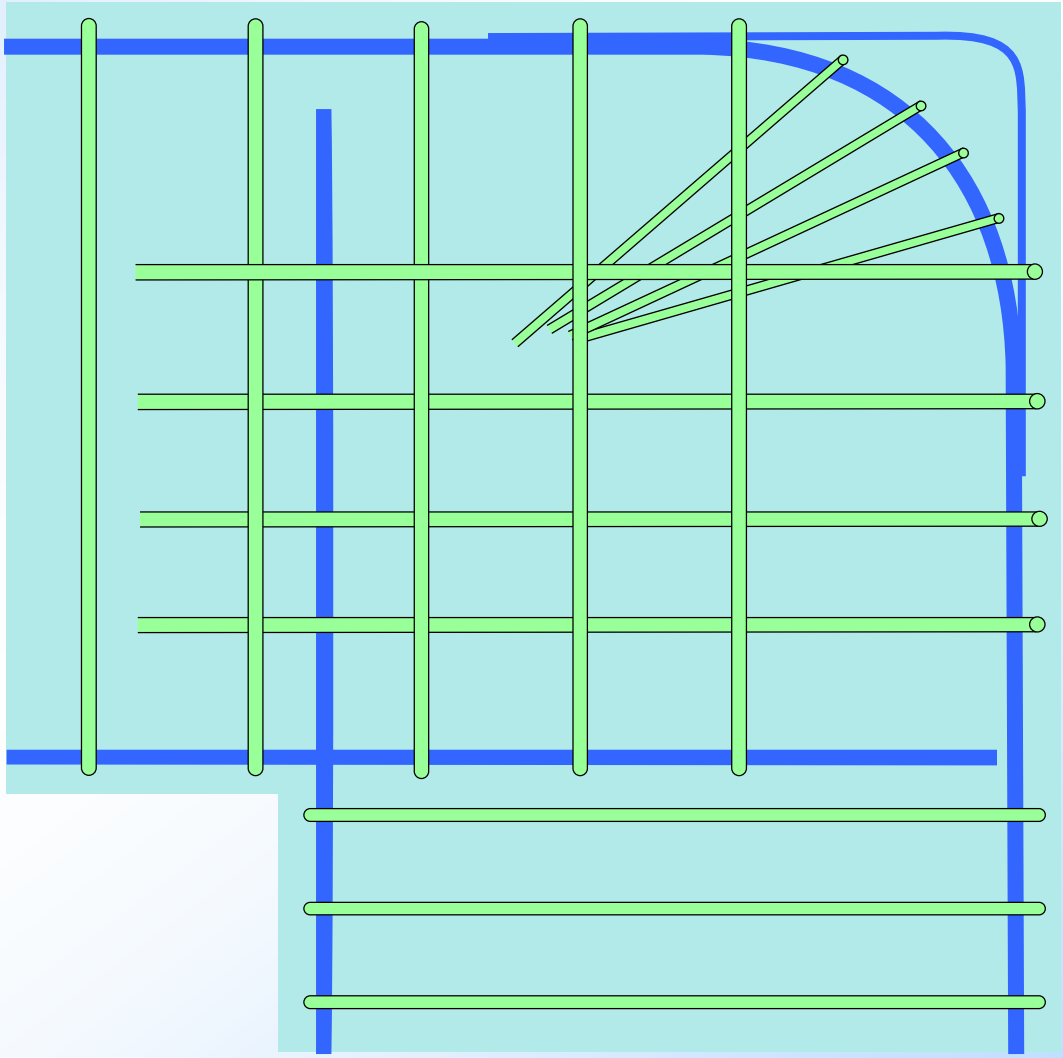


Tabelle NA.8.1 — Mindest-Biegerollendurchmesser D_{min}

a) für Stäbe

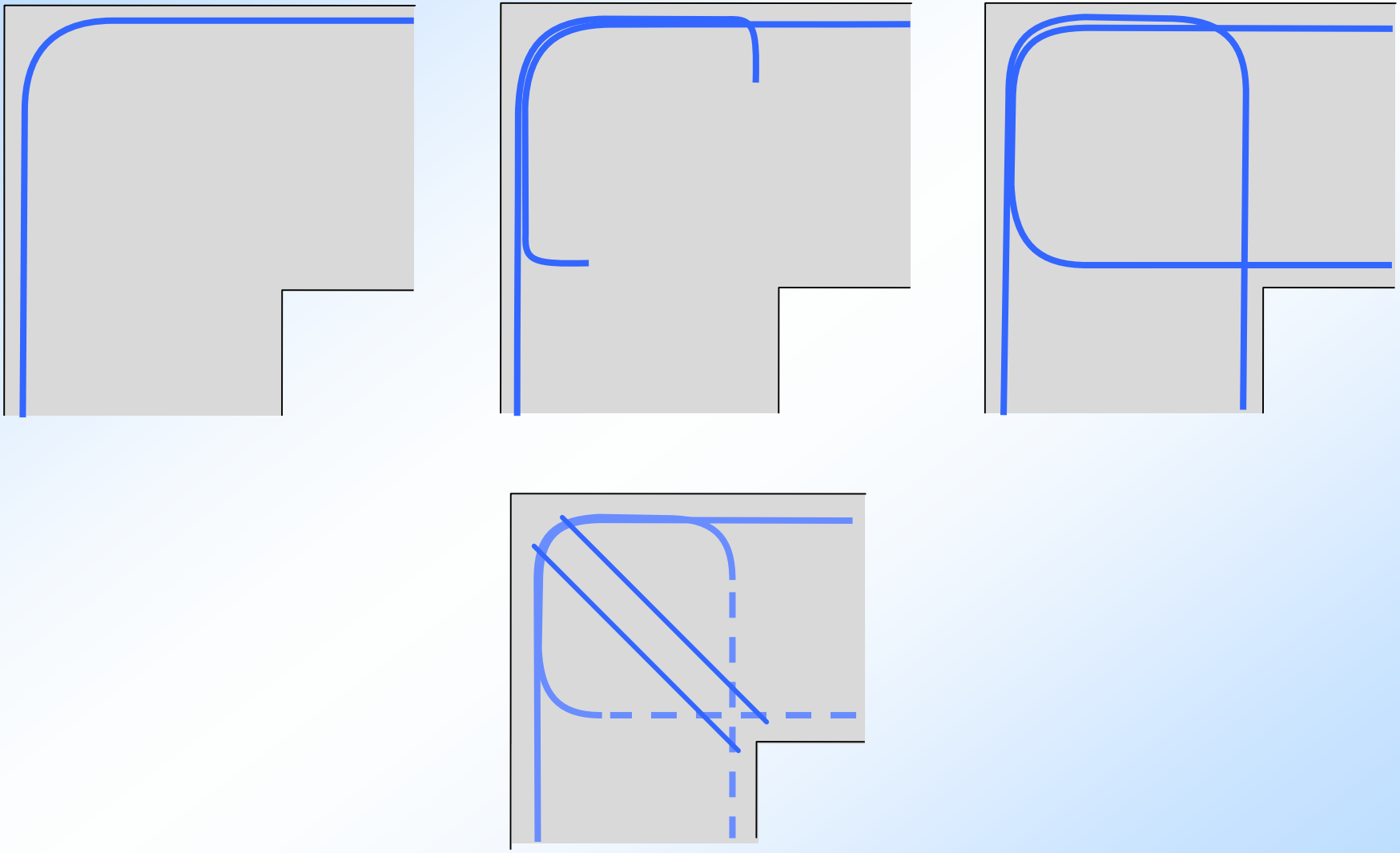
Mindestwerte der Biegerollendurchmesser für Haken, Winkelhaken, Schlaufen, Bügel		Mindestwerte der Biegerollendurchmesser für Schrägstäbe oder andere gebogene Stäbe		
Stabdurchmesser mm		Mindestwerte der Betondeckung rechtwinklig zur Biegeebene		
$\phi < 20$	$\phi \geq 20$	> 100 mm und > 7ϕ	> 50 mm und > 3ϕ	$\leq$ 50 mm oder $\leq 3\phi$
4ϕ	7ϕ	10ϕ	15ϕ	20ϕ

b) für nach dem Schweißen gebogene Bewehrung (Stäbe und Matten)

Quelle:

DIN EN 1992-1-1/NA:2011-01

Bewehrungsführung für Rahmenecken plattenförmiger Bauteile



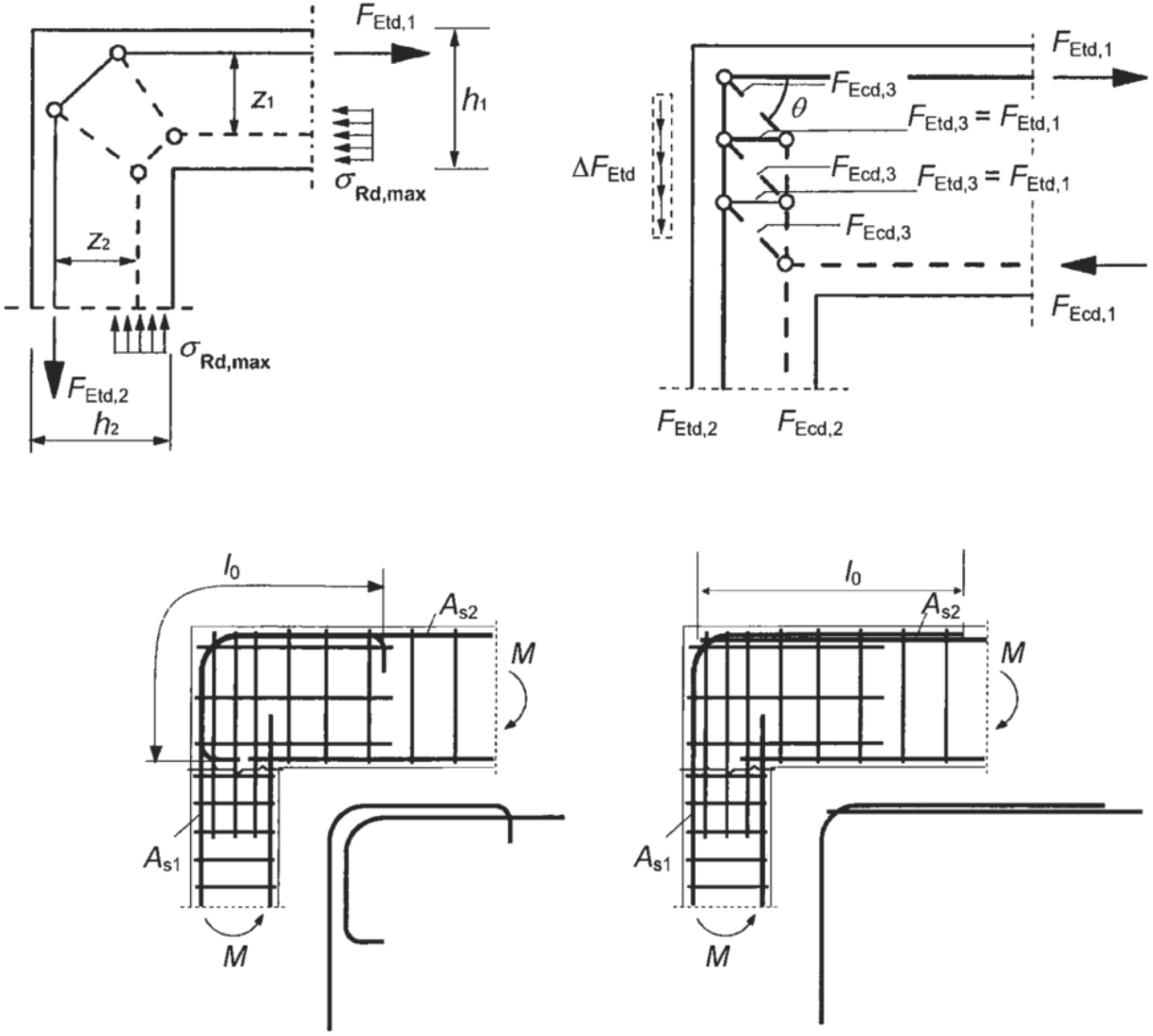


Bild HJ-1 – Rahmenecken bei negativer Momentenbeanspruchung
oben: Stabwerkmodelle für Rahmenecke mit $h_1/h_2 < 1{,}5$ (links) und $h_1/h_2 > 1{,}5$ (rechts)
unten: Bewehrungsführung

Quelle:
DAfStb Heft 600

Hinweis: Anhang J.2 und J.3 von EC2 sind in Deutschland nicht zugelassen

4.2 Rahmenecken mit sich öffnendem Moment

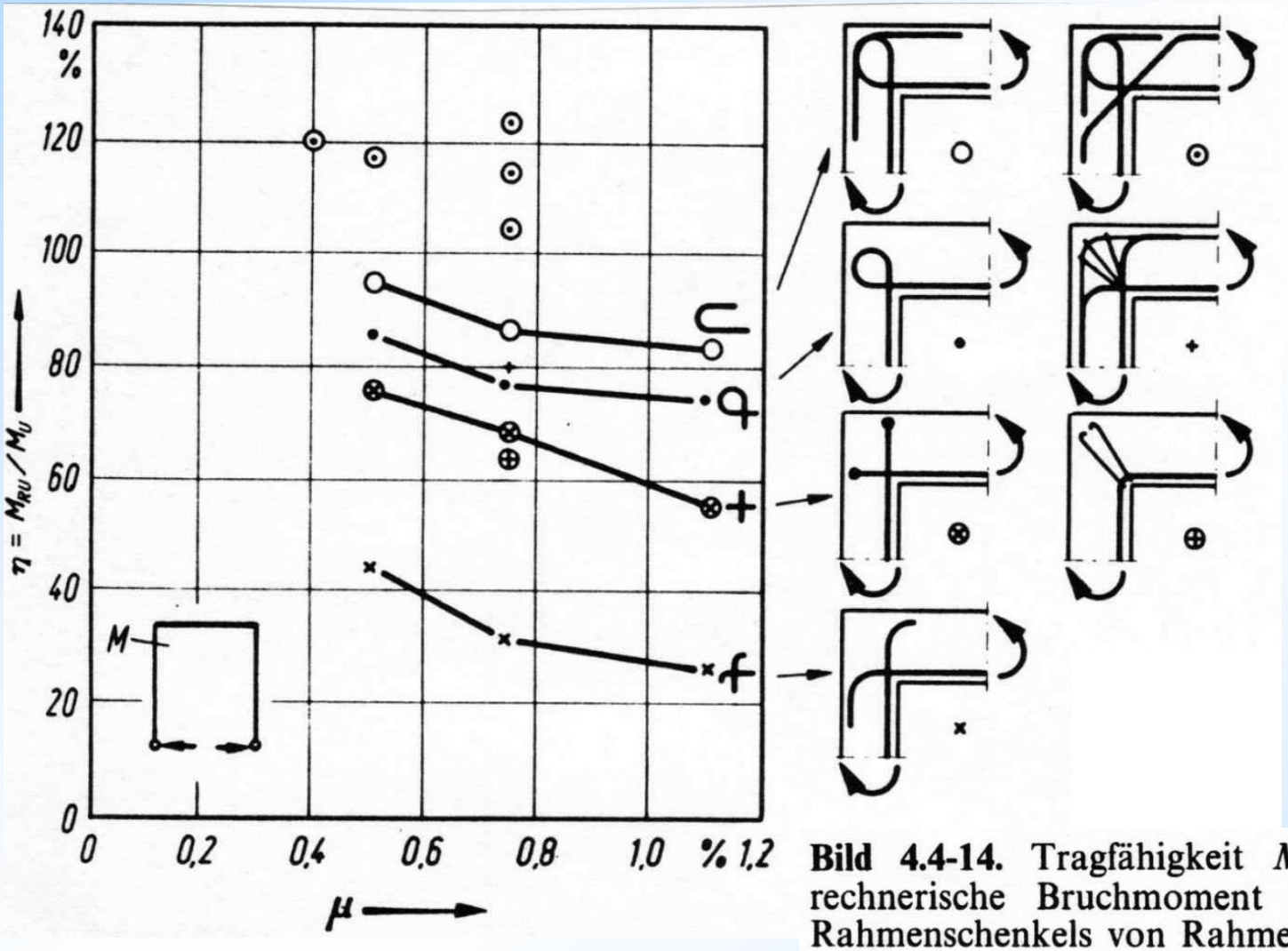
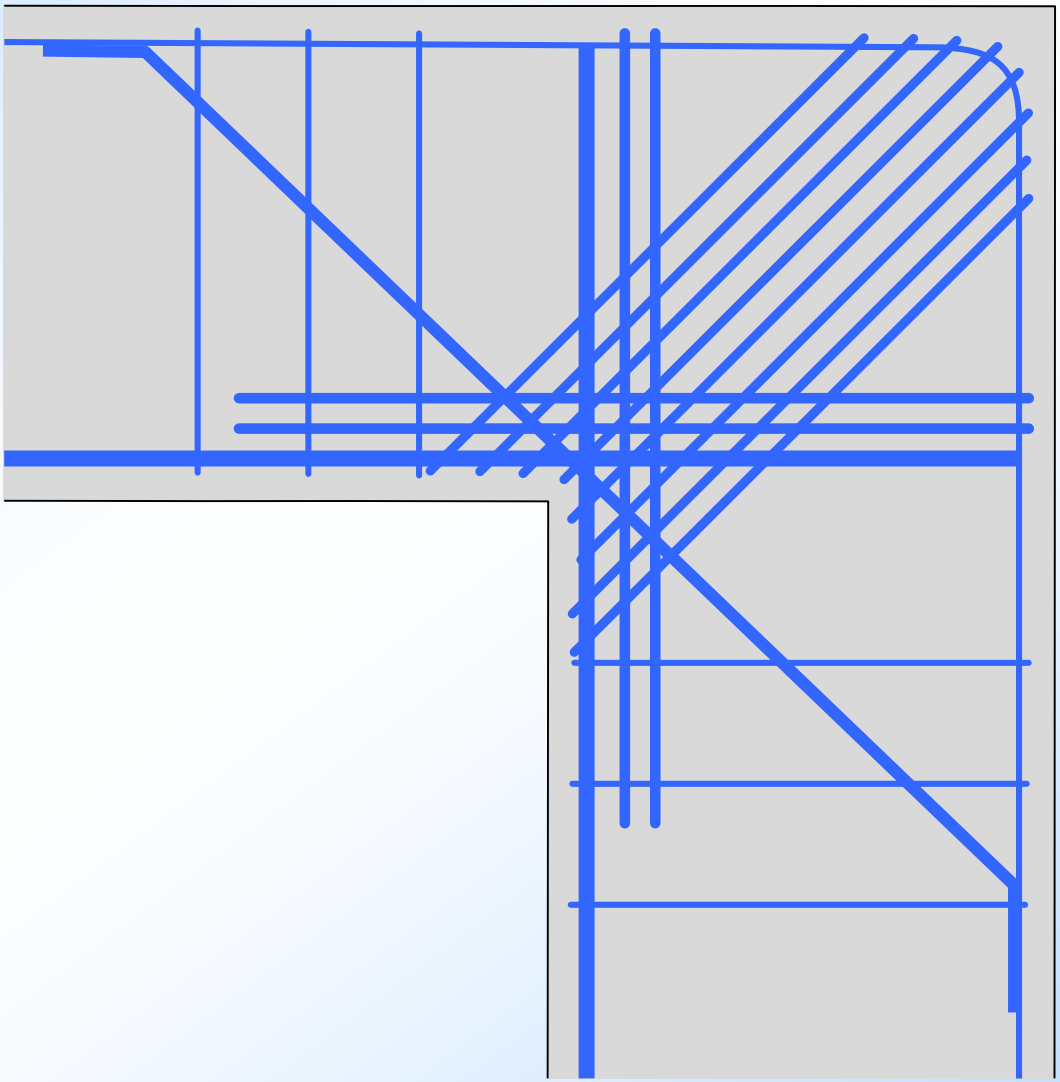


Bild 4.4-14. Tragfähigkeit M_{RU} bezogen auf das rechnerische Bruchmoment M_U des schwächeren Rahmenschenkels von Rahmenecken mit verschiedenen Bewehrungsarten bei positivem Moment, abhängig vom Bewehrungsprozentsatz bei BSt 420 S und B 25 [4.18]

Versuche von Ingvar H. E. Nilsson

Schlaich,J.; Schäfer, K.: Konstruieren im Stahlbetonbau in : Betonkalender 1993, Teil II, Ernst und Sohn

Bewehrungsführung für sich öffnende Rahmenecken



Stabwerkmodell

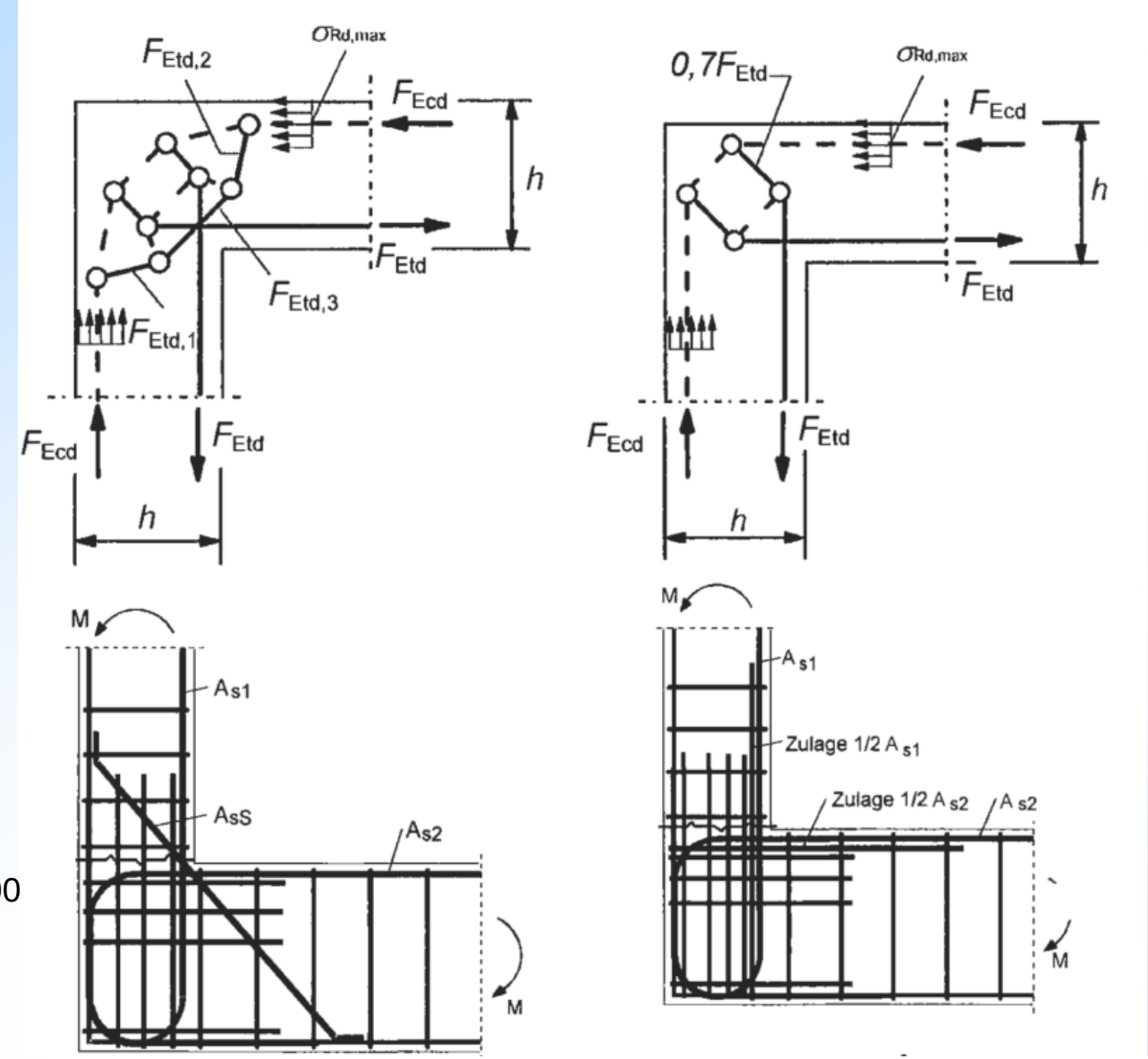


Bild HJ-3 – hochbeanspruchte Rahmenecken bei positiver Momentenbeanspruchung: oben: Stabwerkmodell mit Schrägbewehrung (links) und orthogonalem Bewehrungsnetz (rechts); unten: Bewehrungsführung mit Schrägbewehrung (links) und mit erhöhter Zugbewehrung (rechts)

Quelle:
DAfStb Heft 600

Quelle:
DAfStb Heft 600

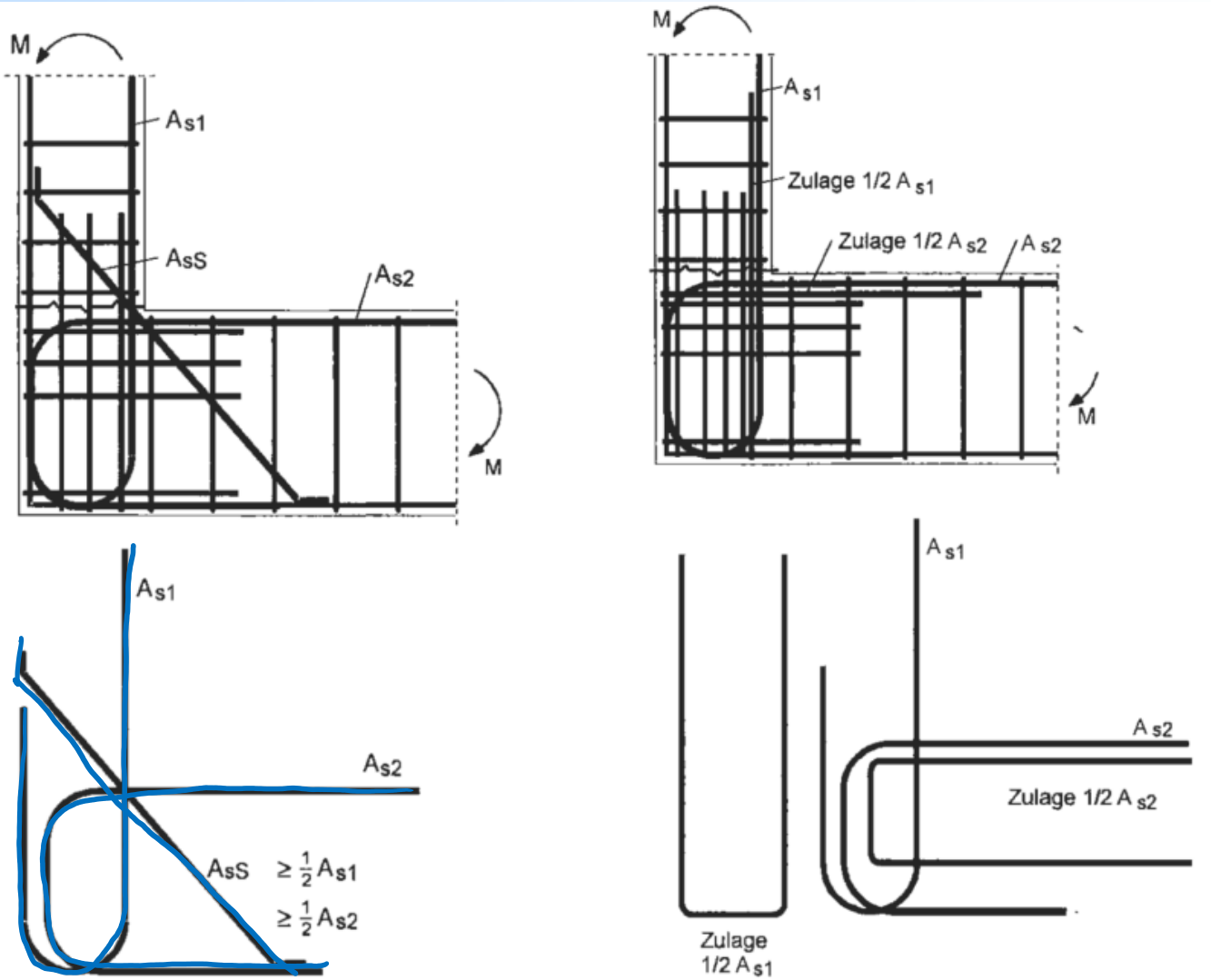


Bild HJ-3 – hochbeanspruchte Rahmenecken bei positiver Momentenbeanspruchung: oben: Stabwerkmodell mit Schrägbewehrung (links) und orthogonalem Bewehrungsnetz (rechts); unten: Bewehrungsführung mit Schrägbewehrung (links) und mit erhöhter Zugbewehrung (rechts)

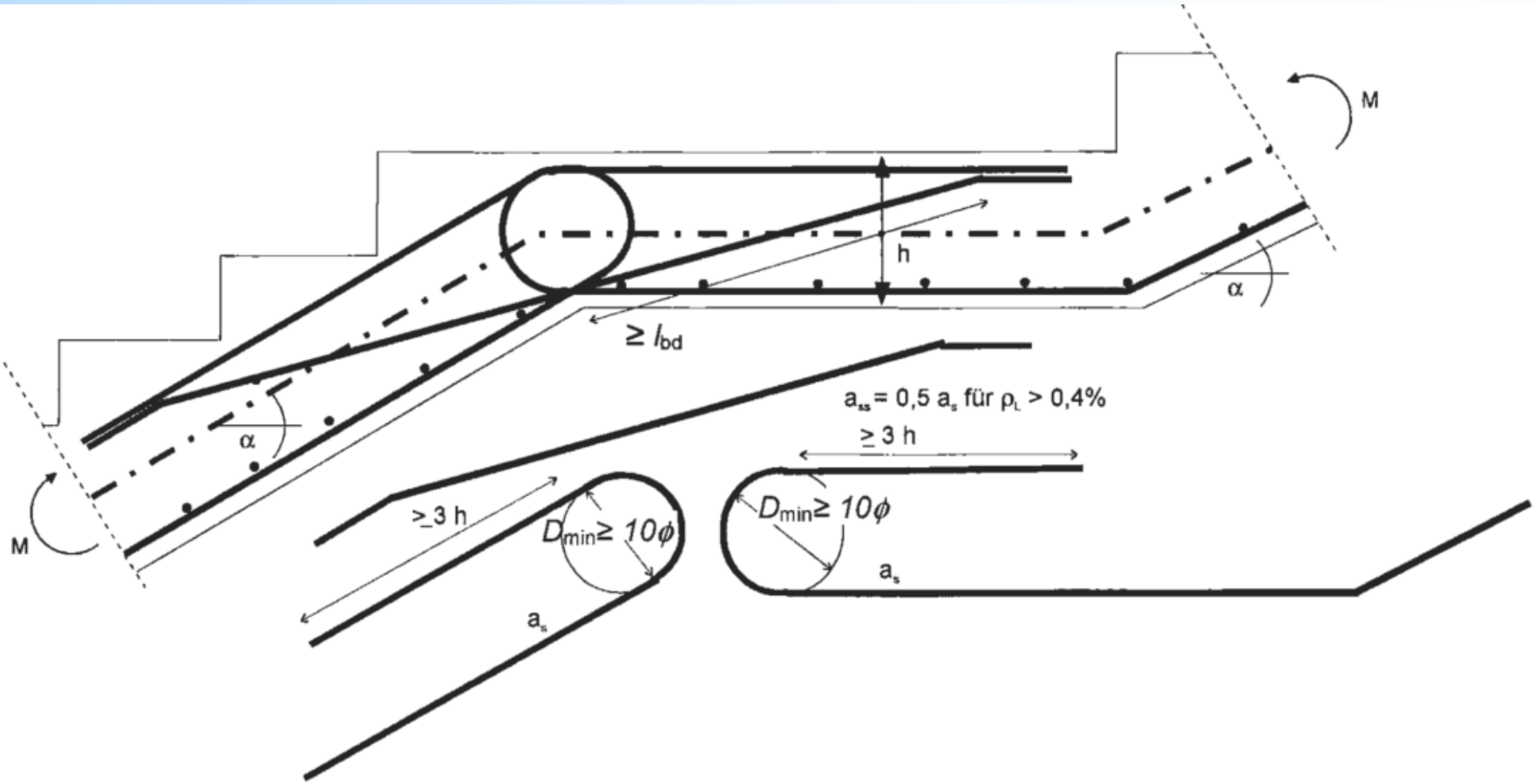
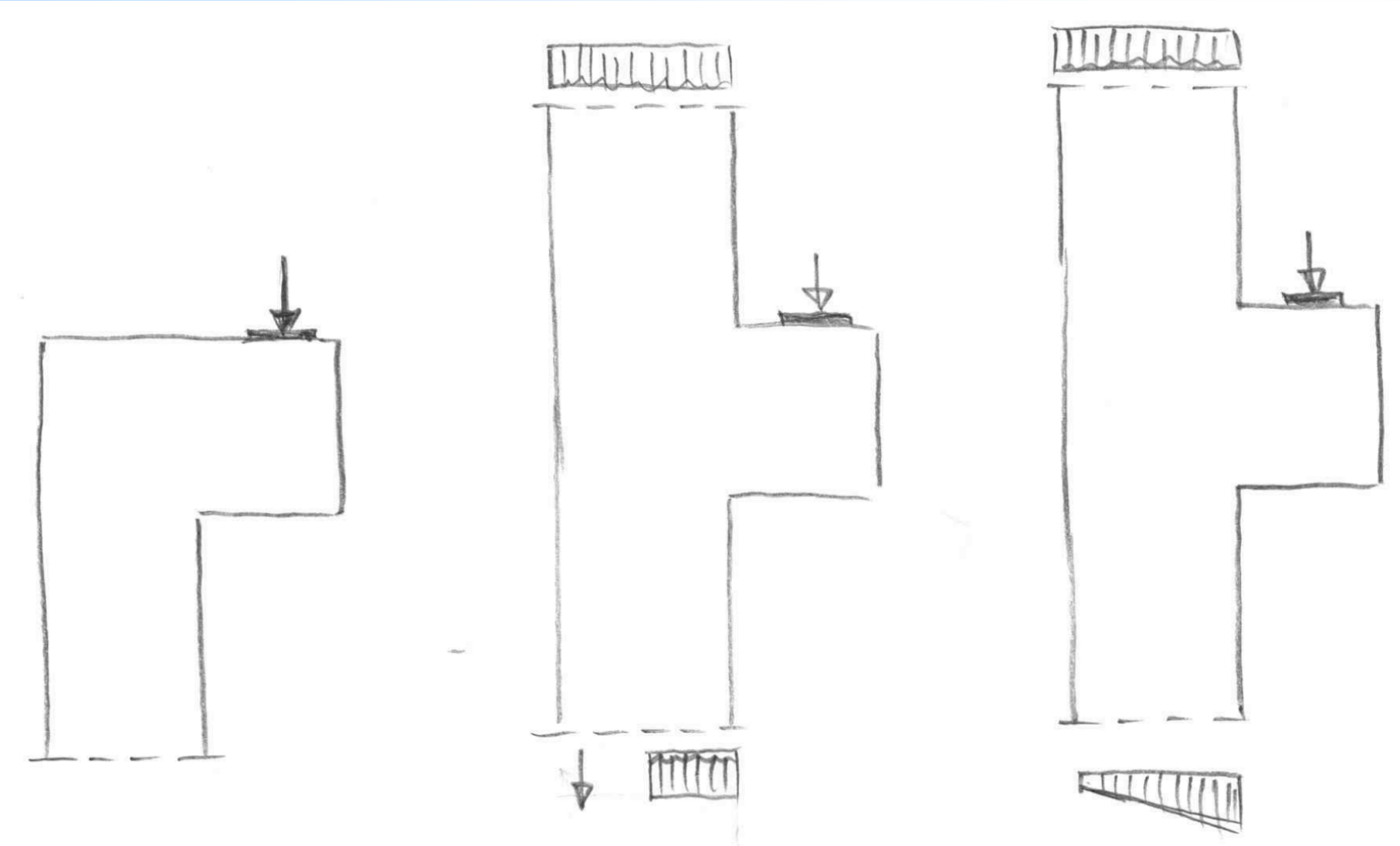
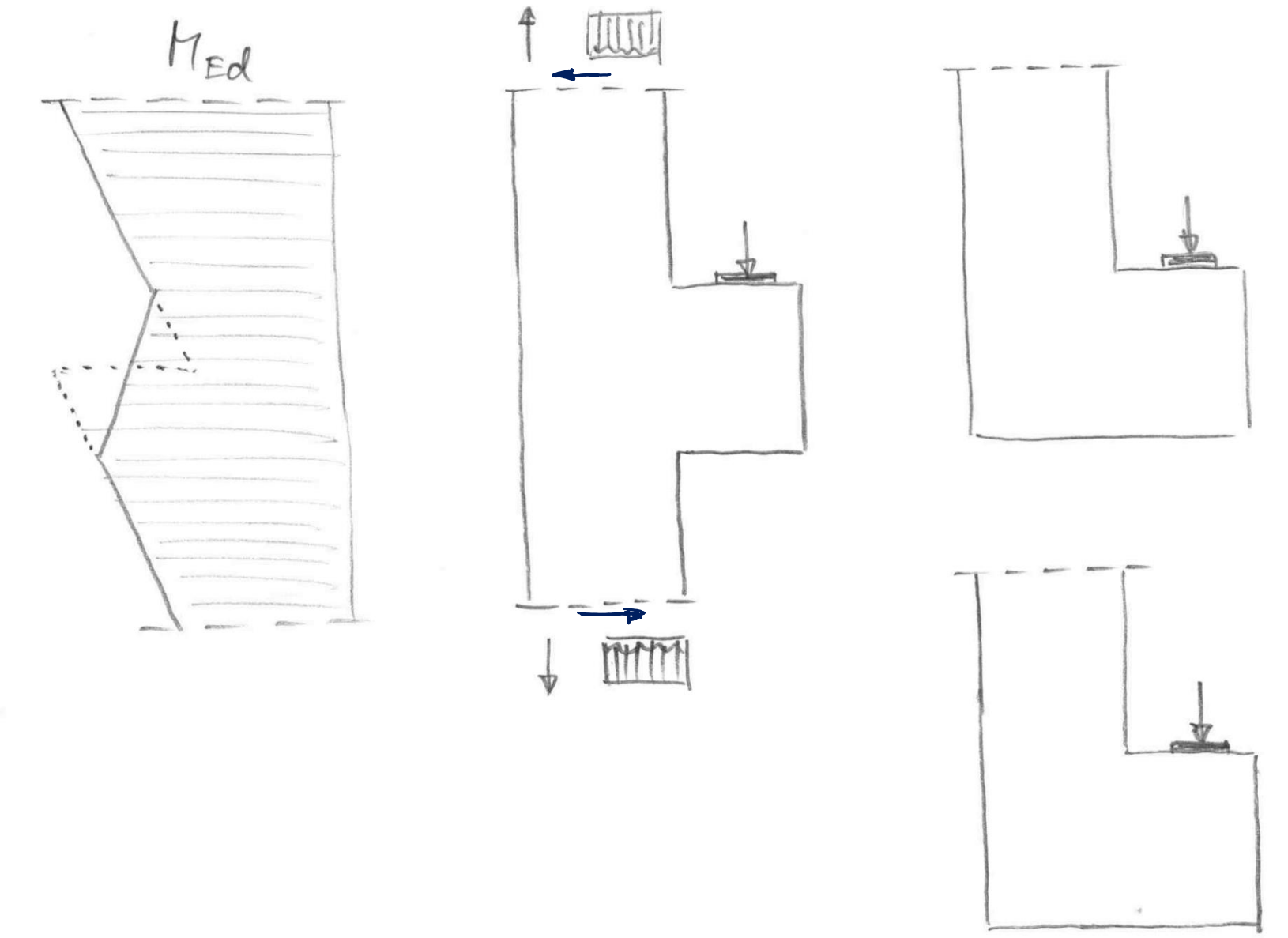


Bild HJ-4 – Beispiel für die Bewehrungsführung eines Treppenzwischenpodestes

Quelle:
DAfStb Heft 600

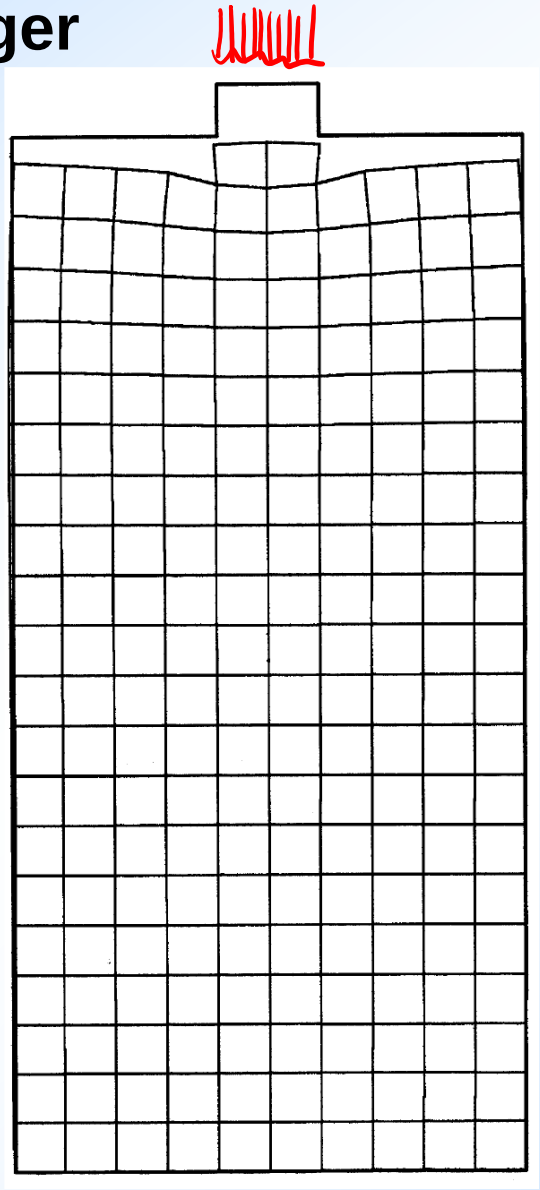
Stabwerkmodelle



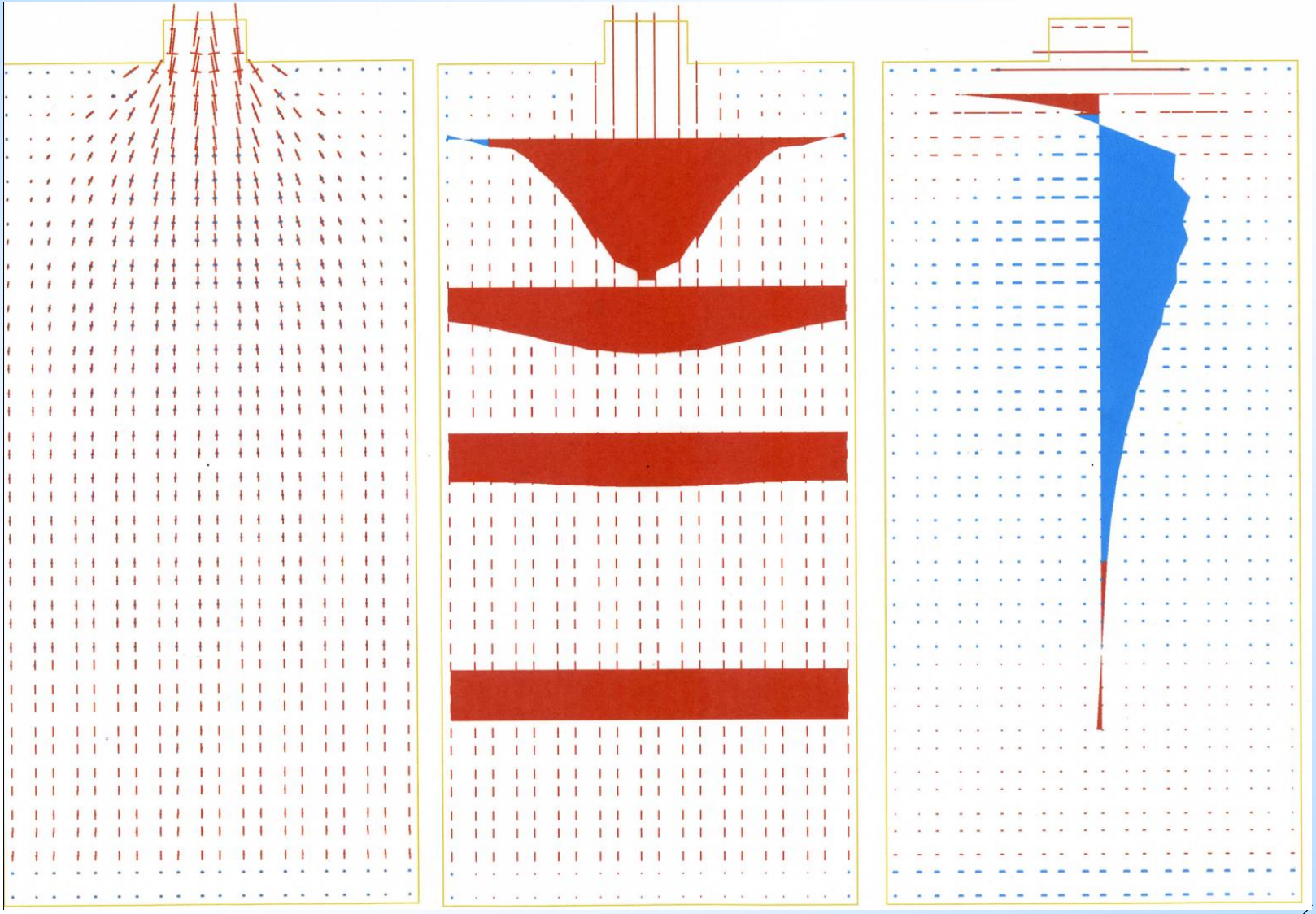


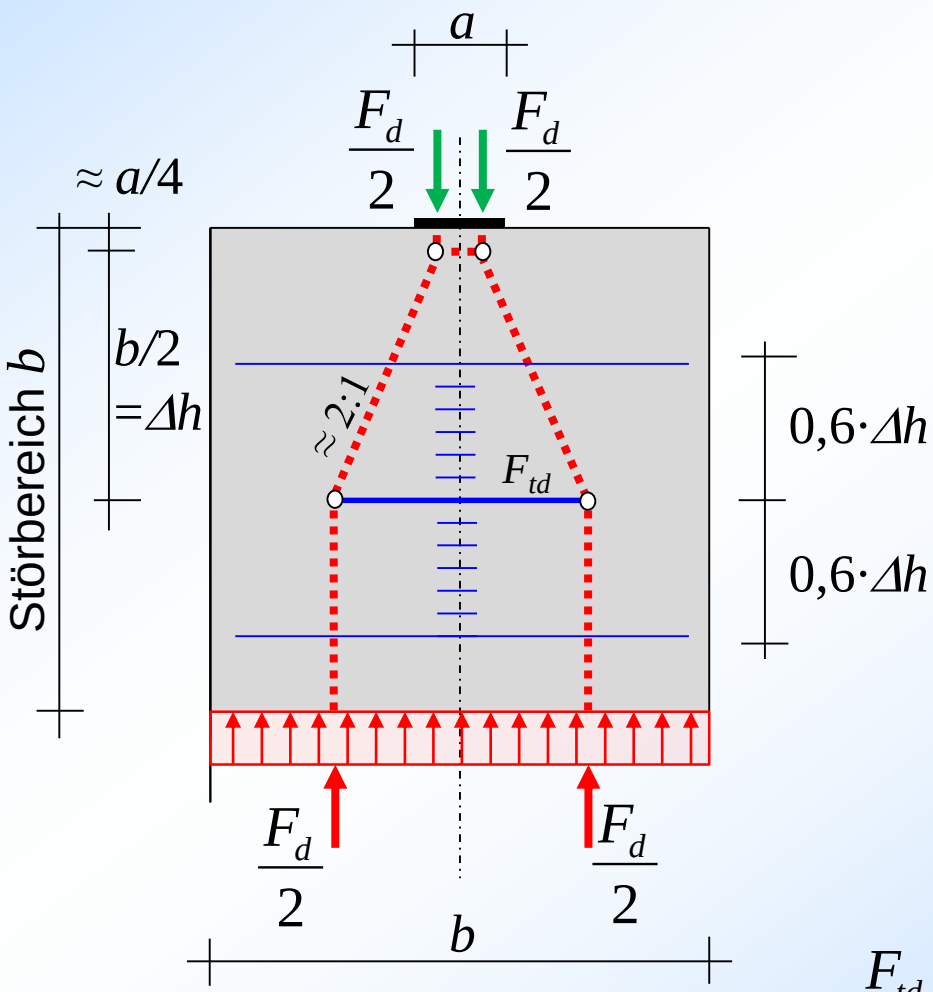
Lös.

5 Stabwerkmodelle für die Einleitung von Einzellasten und für wandartige Träger



Stabwerkmodelle

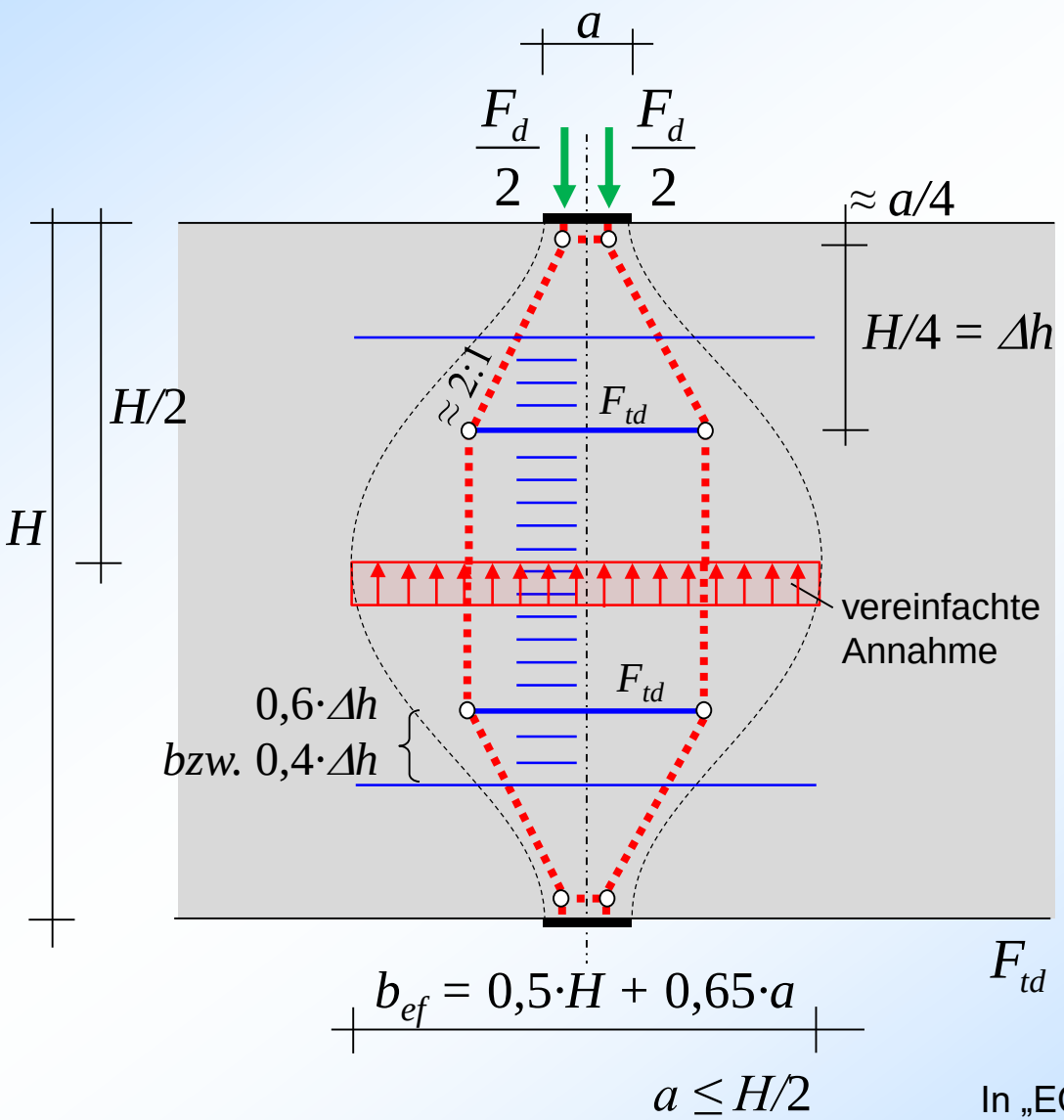




Nach Meinung des Verfassers kann eine ggf. flächig vorhandene Bewehrung auf je $0{,}6 \cdot \Delta h$ angerechnet werden. Eine Zulagebew. sollte sich auf je $0{,}4 \cdot \Delta h$ konzentrieren.

$$F_{td} = \frac{F_d}{4} \cdot \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

vgl. EC2, Glg. 6.58

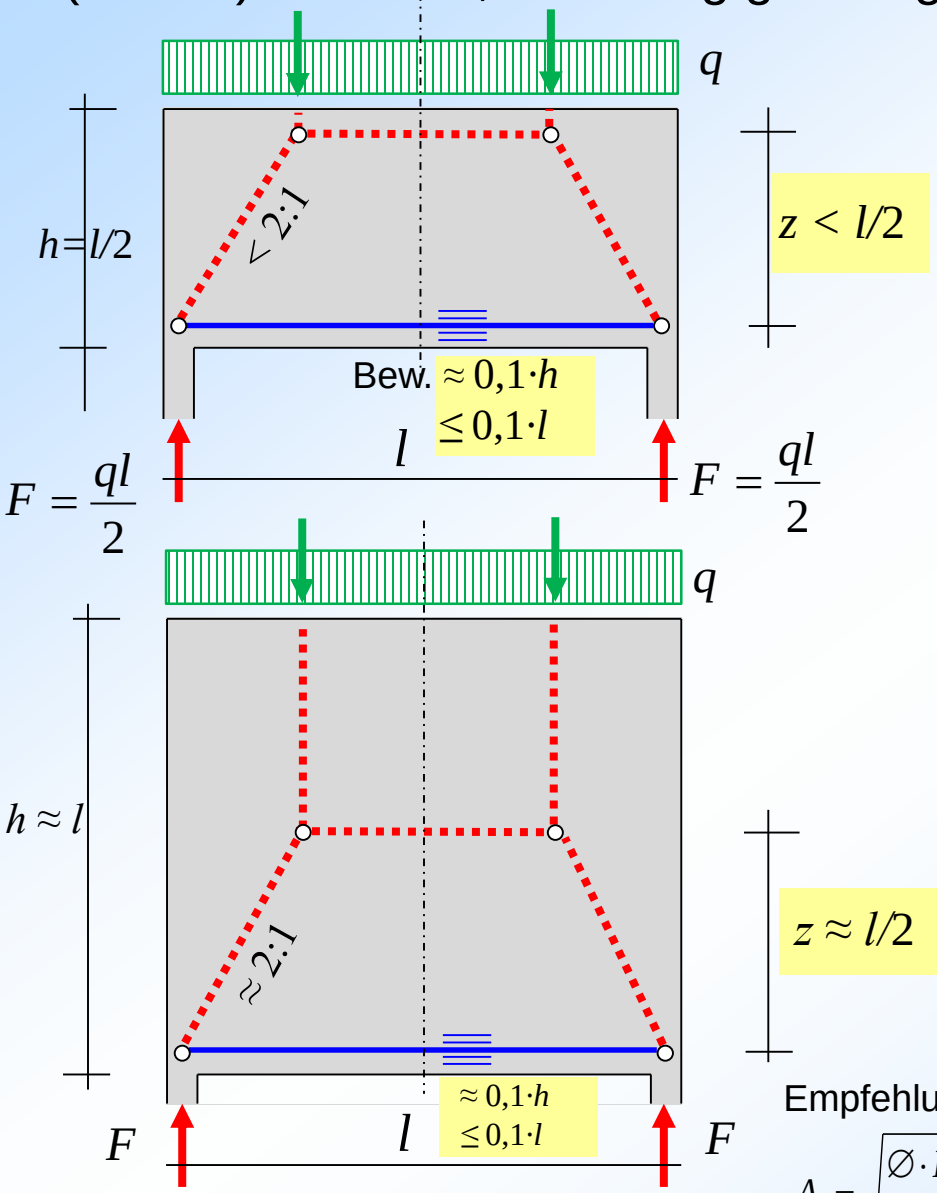


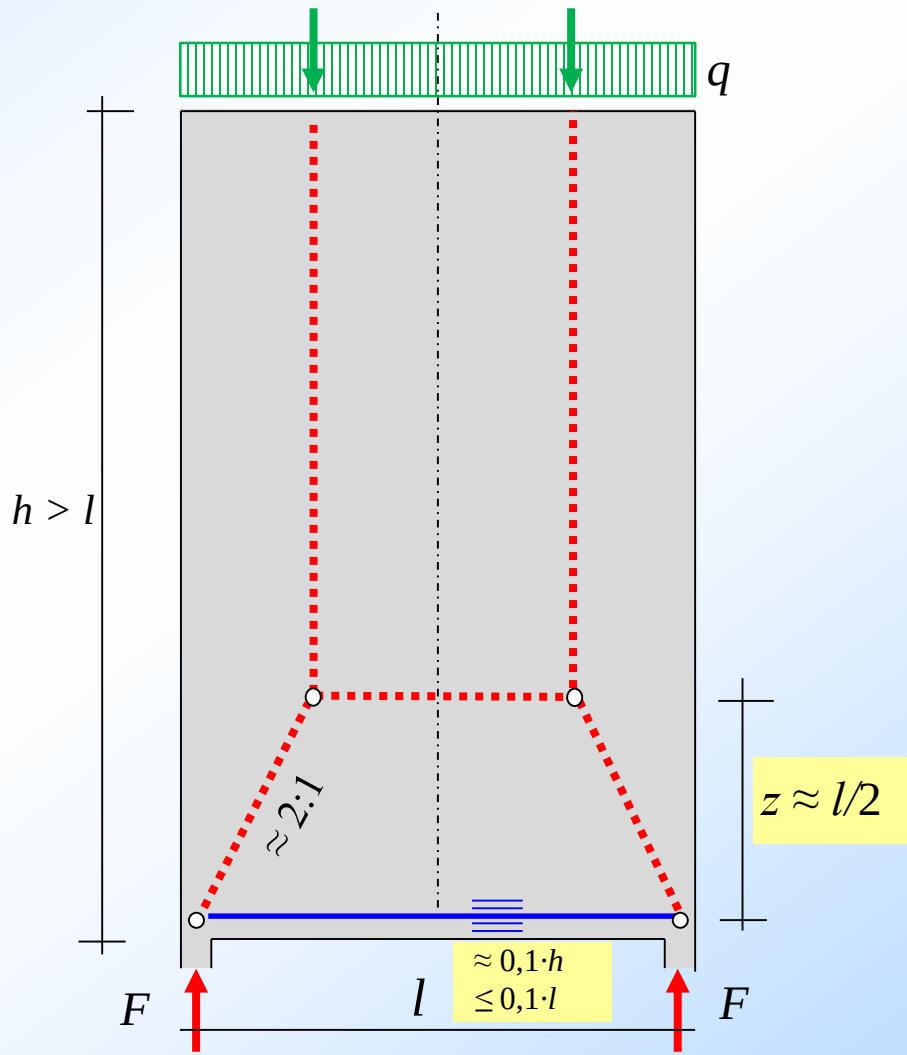
vgl. EC2, Glg. 6.59

$$F_{td} = \frac{F_d}{4} \cdot \left(1 - 0{,}7 \cdot \frac{a}{H}\right)$$

In „EC2 digital“ ist das kleine h ein Druckfehler!

(Wand-)Scheiben, beidseitig gelenkig



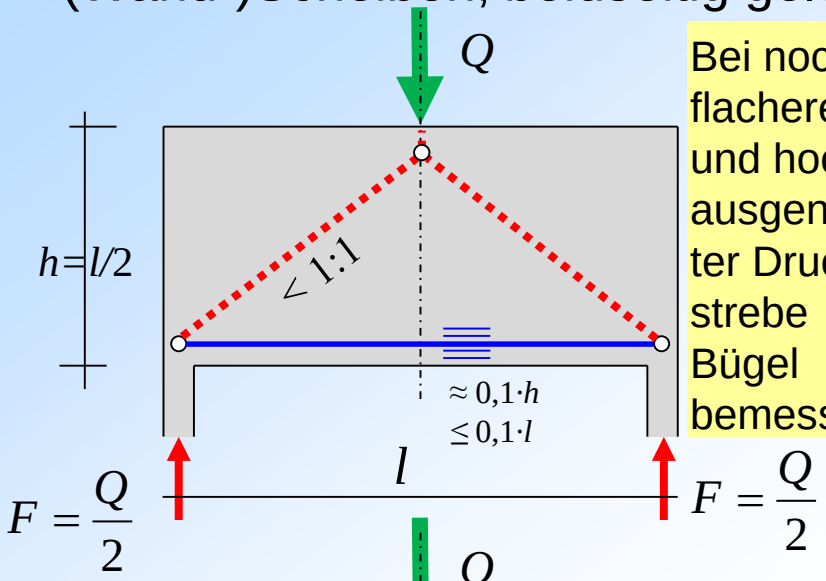


Empfehlung: auf $0{,}2 \cdot h \leq 0{,}2 \cdot l$ mind. Risskraft abdecken mit

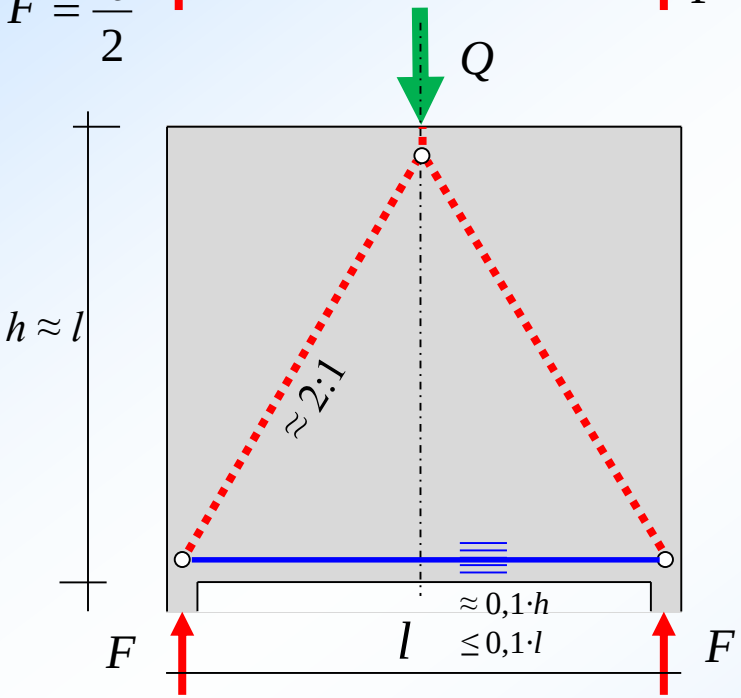
$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr})}{3{,}6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

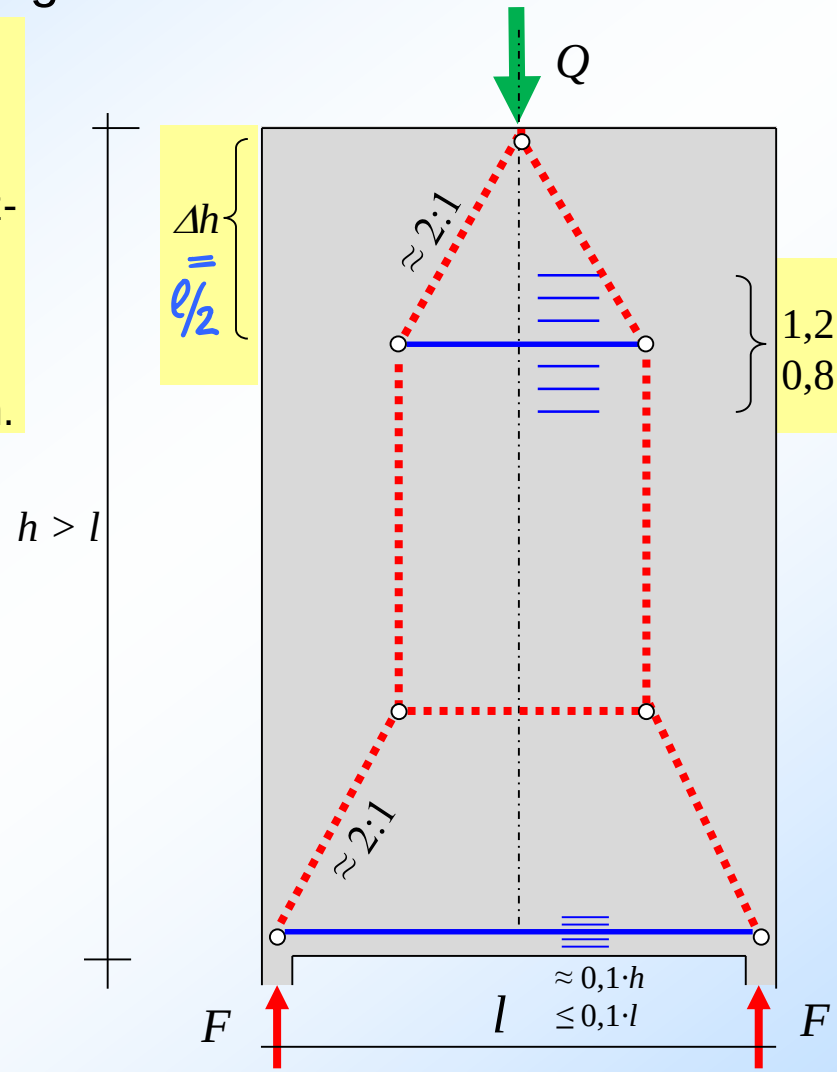
für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.

(Wand-)Scheiben, beidseitig gelenkig



Bei noch flacherer und hoch ausgenutzter Druckstrebe Bügel bemessen.



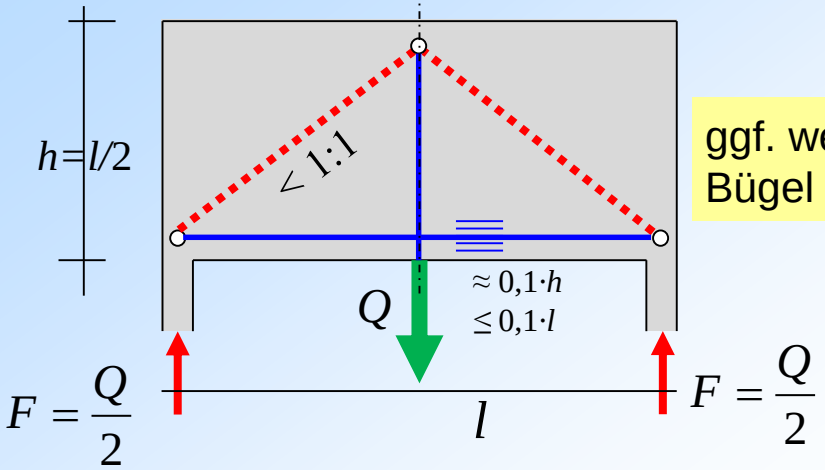


Empfehlung: auf $0{,}2 \cdot h \leq 0{,}2 \cdot l$ mind. Risskraft abdecken mit

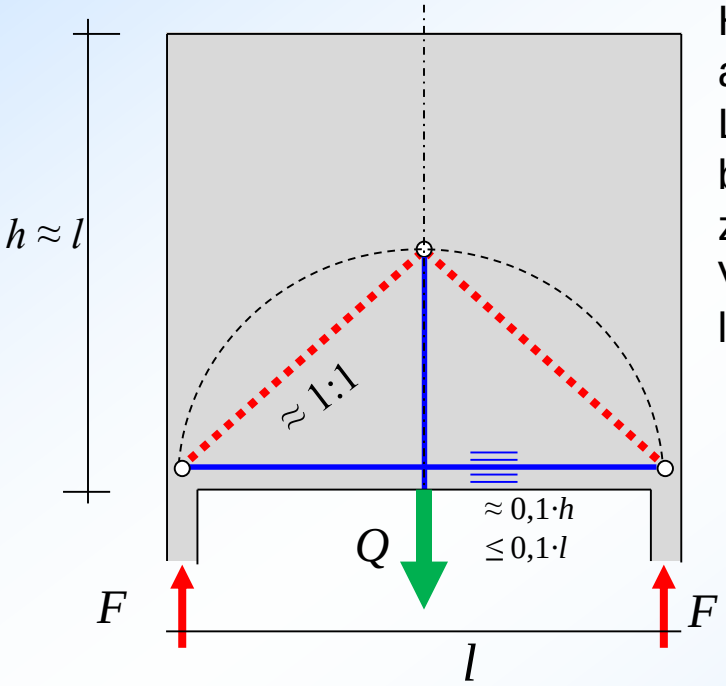
$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr})}{3{,}6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.

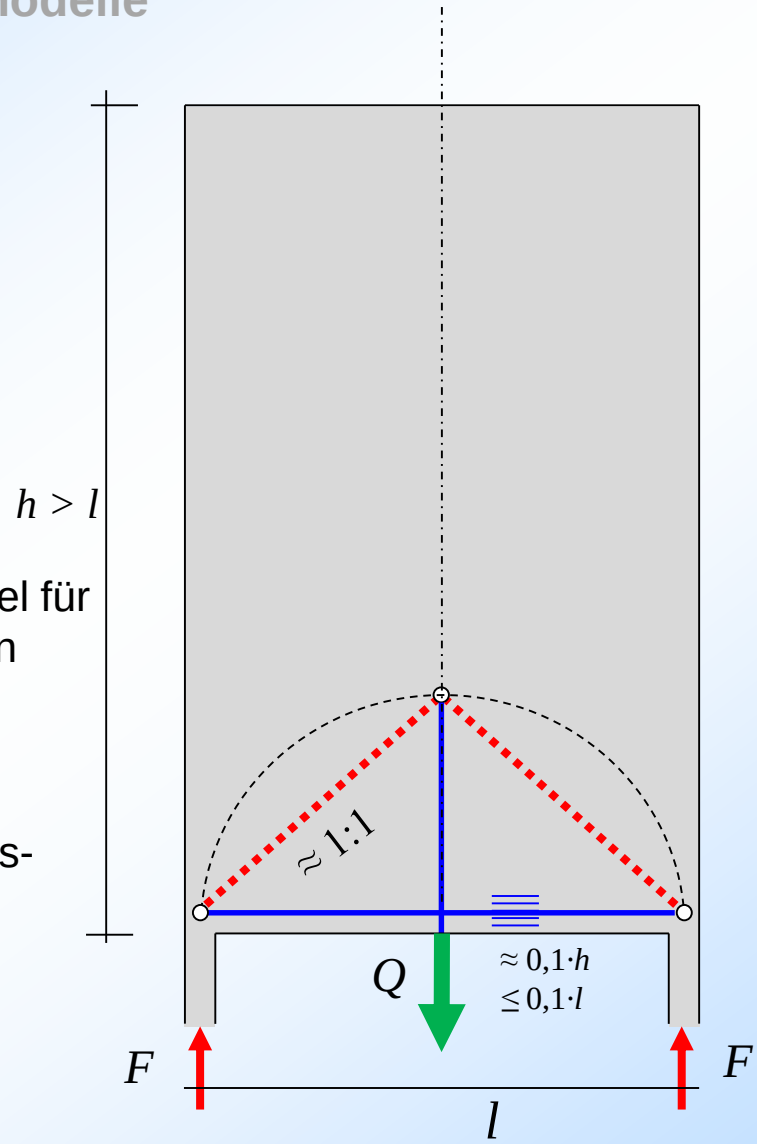
(Wand-)Scheiben, beidseitig gelenkig



ggf. weitere Bügel (s.o.)



Halbkreisregel für außermittigen Lastangriff beachten, zusätzlich Verankerungslänge

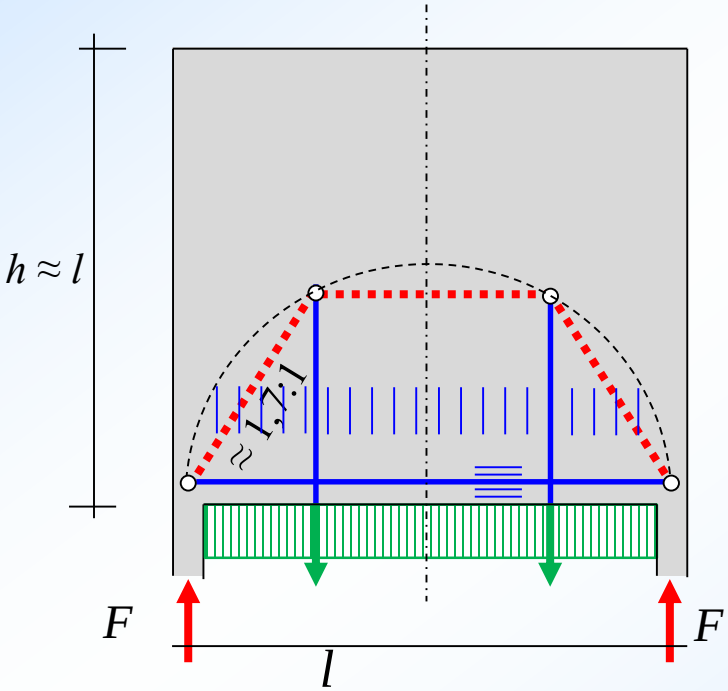


Empfehlung: auf $0{,}2 \cdot h \leq 0{,}2 \cdot l$ mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr})}{3{,}6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.

(Wand-)Scheiben, beidseitig gelenkig



Empfehlung: auf $0{,}2 \cdot h \leq 0{,}2 \cdot l$ mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr})}{3{,}6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.

Halbkreisregel beachten, zusätzlich Verankerungslänge

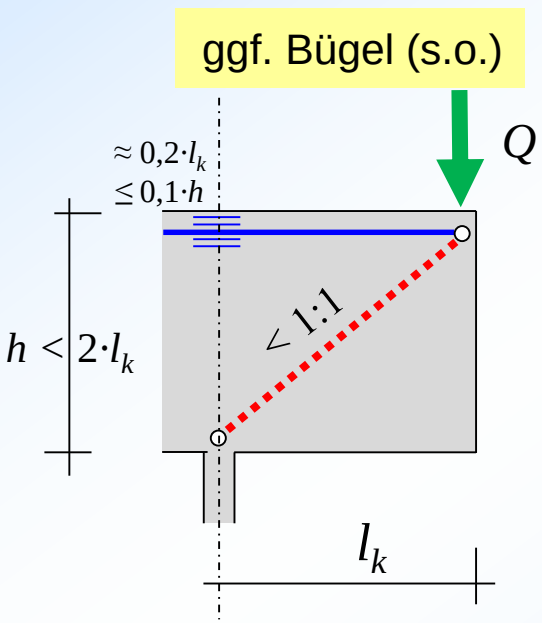
Auch im Halbkreis angeordnete Lasten müssen hochgehangen und oberhalb des Halbkreises verankert werden.

Auskragende (Wand-)Scheiben

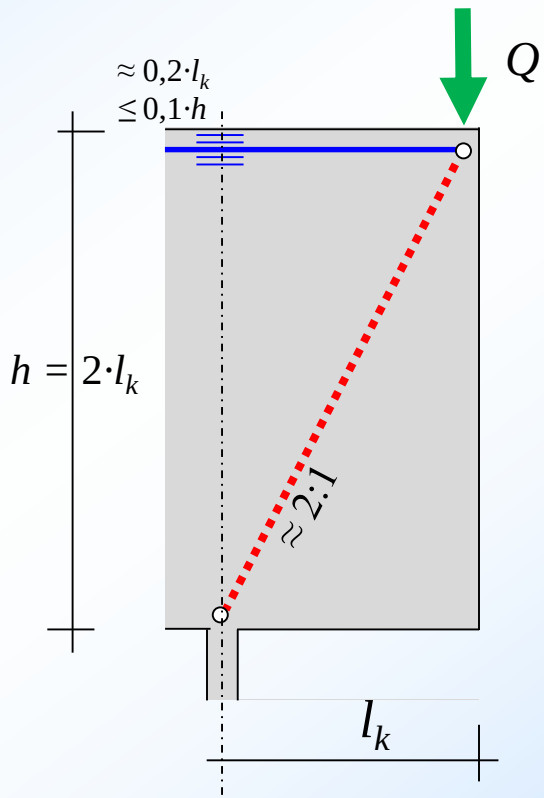
Empfehlung: auf $0{,}4 \cdot l_k \leq 0{,}2 \cdot h$ mind. Risskraft abdecken mit

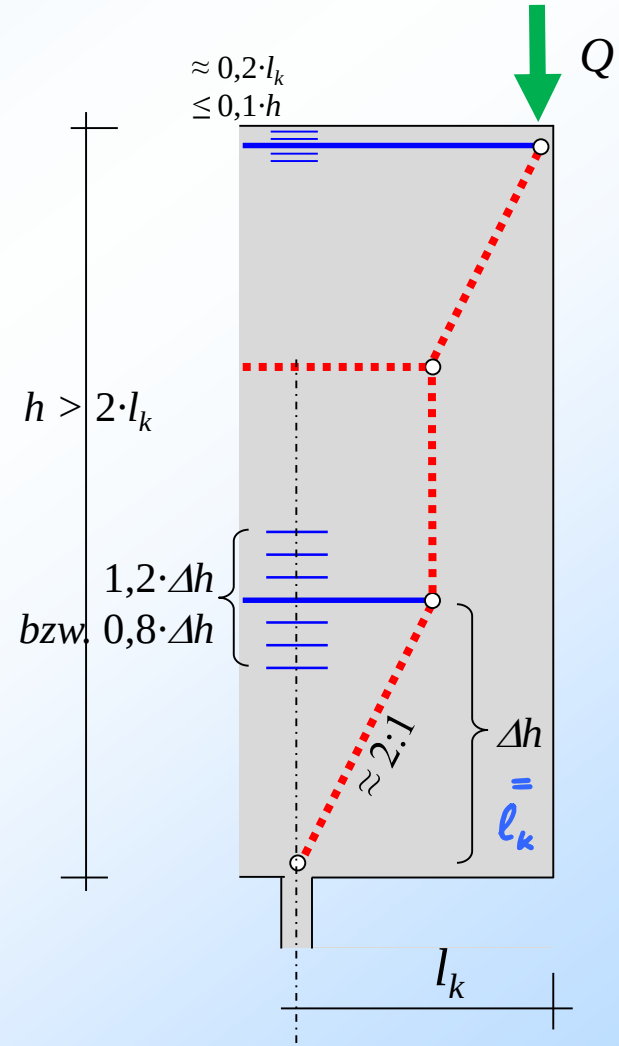
$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr})}{3{,}6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.



wie Konsole

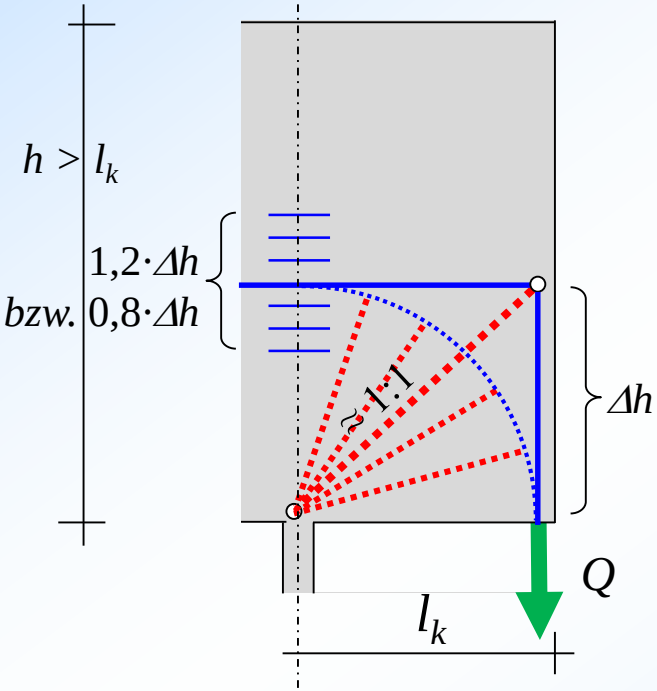




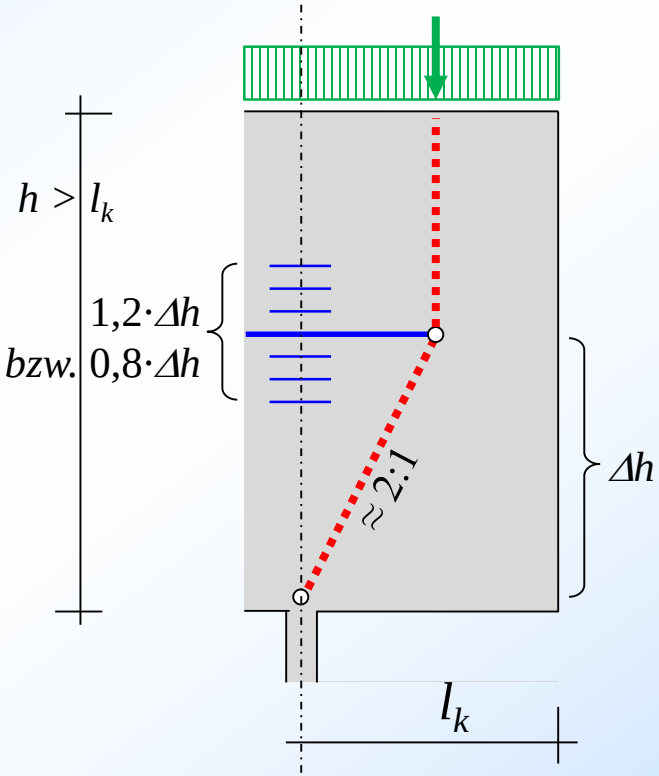
wie hohe Konsole

Auskragende (Wand-)Scheiben

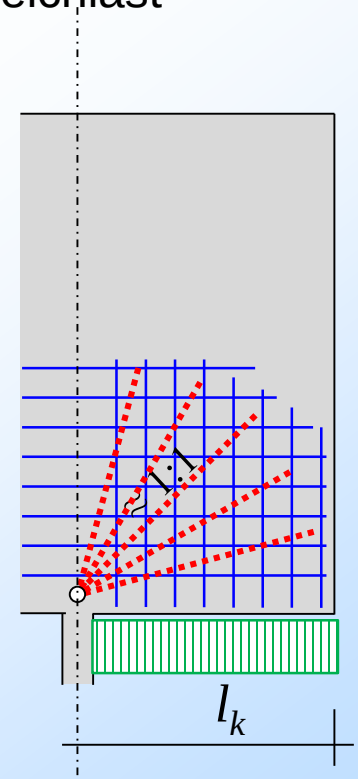
unten angehängte Einzellast



unter Gleichlast



unten angehängte Gleichlast



optimale Bew.führung: viele Viertelkreise

Bemessung und Konstruktion Wandartiger Träger (Scheiben), EC2, 9.7

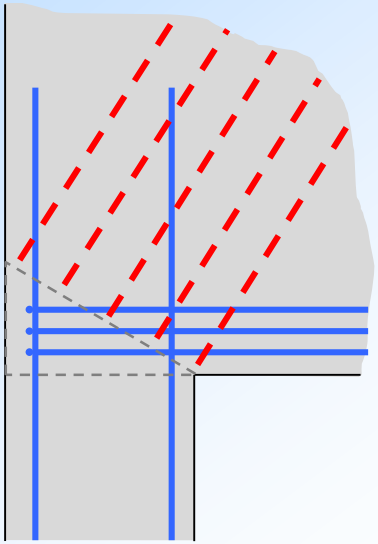
- Def. Wandartiger Träger, EC2, 5.3.1 (3): $l < 3 \cdot h$
- Mindestdicke nach Tab. NA 9.3: (durchlaufende Bauteile)
  12 cm für stat. best. Systeme, ~~12~~ 10 cm für stat. unbest. Systeme
- Mindestbew.: 0,075% von A_c je Richtung und Seite, mind. 1,5 cm²/m
- Stababstand < 2fache Wanddicke, höchstens 30 cm

Die Kippgefahr ist zu beachten, wenn Druckränder nicht durch z.B. Decken seitlich gehalten sind.

Nachweise: Knotennachweise an Auflagern oder an Einleitungsstellen konzentrierter Kräfte. Eine Bemessung für Querkräfte ist nicht erforderlich.

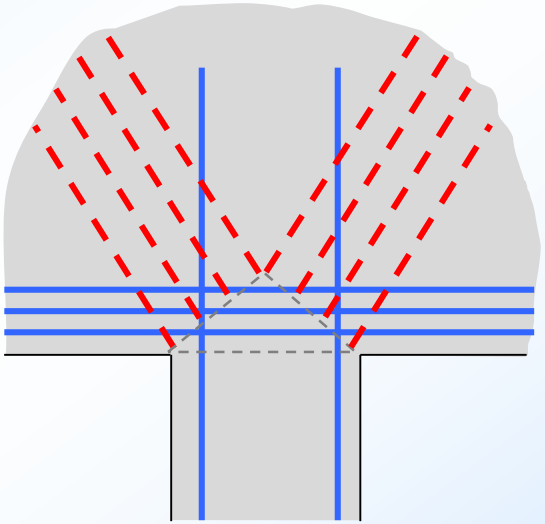
Auflagerknoten

Druck-Zug-Knoten ➔ $0{,}75 \cdot f_{cd}$



$$N_{Ed} \leq A_c \cdot 0{,}75 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}$$

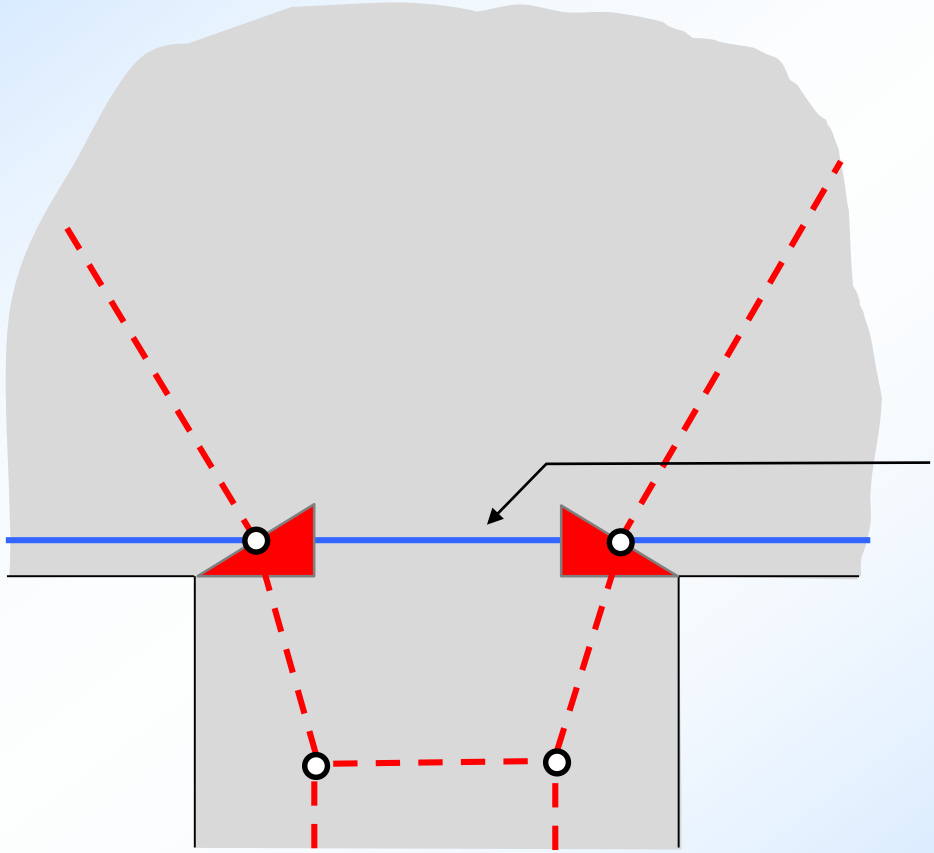
reiner Druckknoten ➔ $1{,}0 \cdot f_{cd}$



$$N_{Ed} = A_c \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}$$

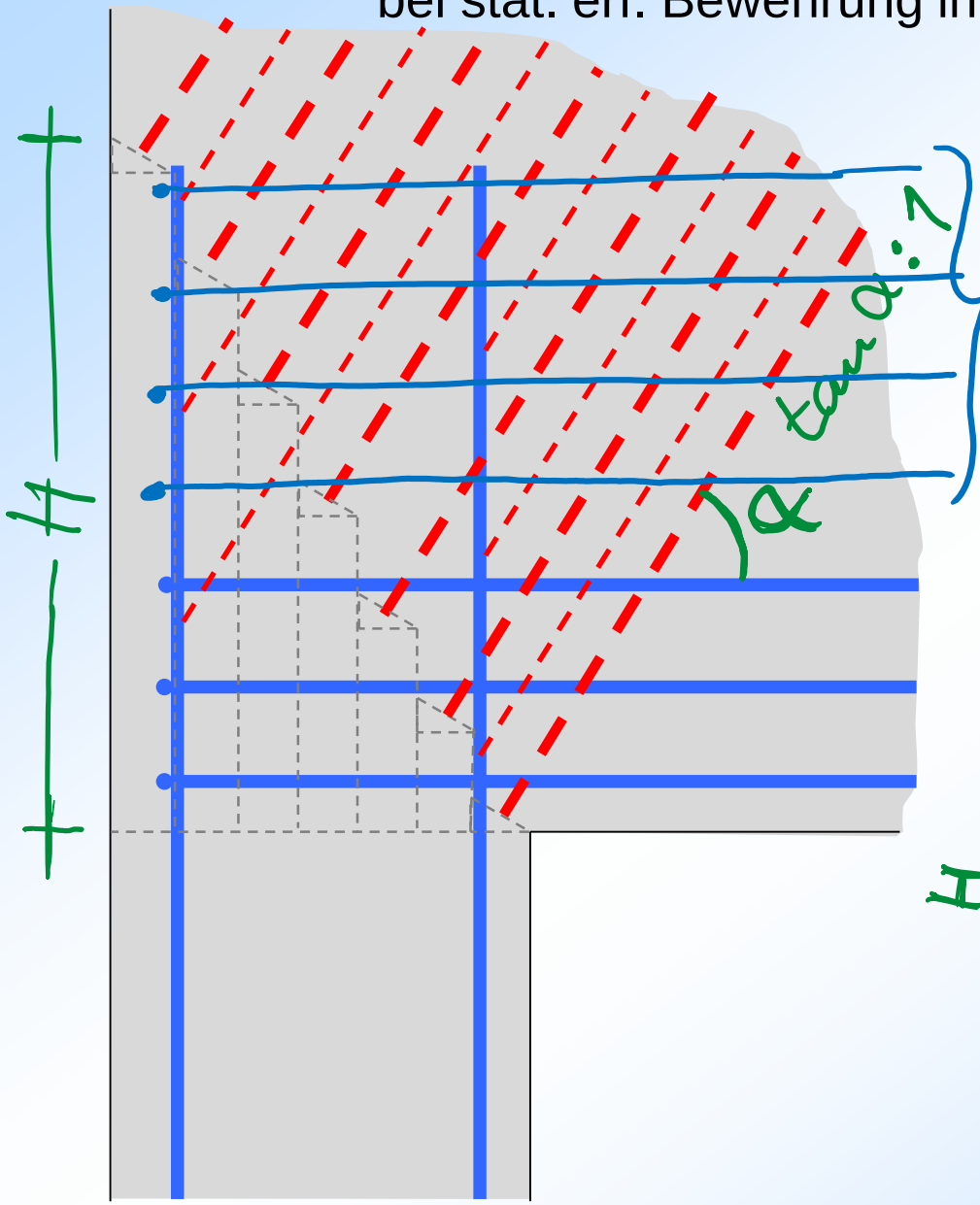
bei starker Bew. der Stütze
und/oder des horiz. Zugbandes
Abminderung auf $0{,}9 \cdot f_{cd}$ empfohlen

Bei breiten Auflagern ist eine Anpassung der Stabwerksgeometrie entsprechend der Kontenausbildung möglich



möglich ist auch ein Druckstab, Bew. auf jeden Fall durchlaufen lassen!

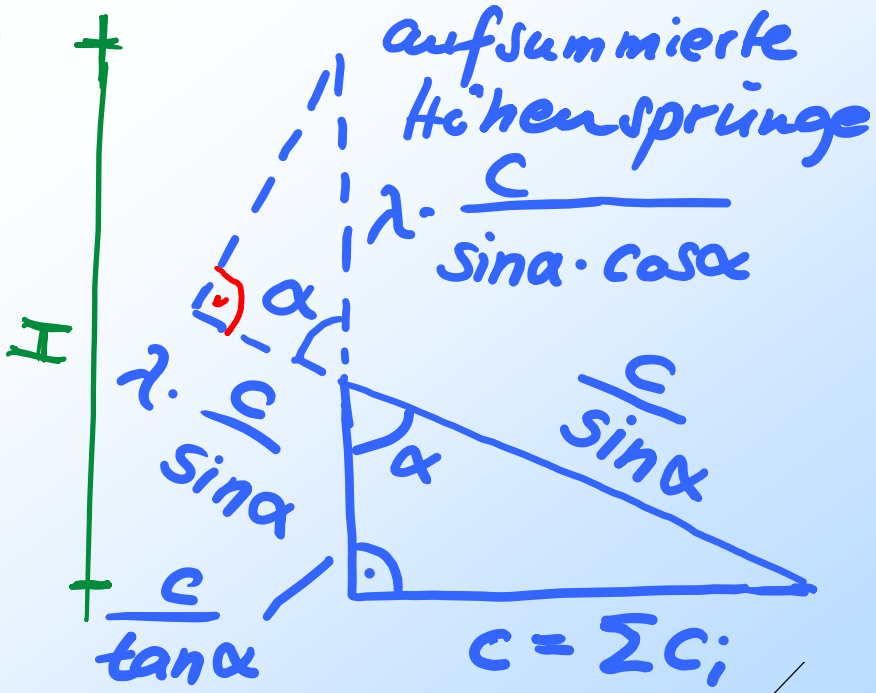
bei stat. erf. Bewehrung in der Stütze muss der Druckknoten differenzierter betrachtet werden.



horiz. Steckbügel zur Kraftumlenkung

Ein Teil der Druckkräfte muss auch in die Bew. eingeleitet werden, dadurch muss die Knotenhöhe etwa der Verankerungslänge (Krafteinl.länge) entsprechen.

Die horiz. Komponenten der Druckkräfte müssen aus Gleichgewichtsgründen in die Wandscheibe zurückgehangen werden.



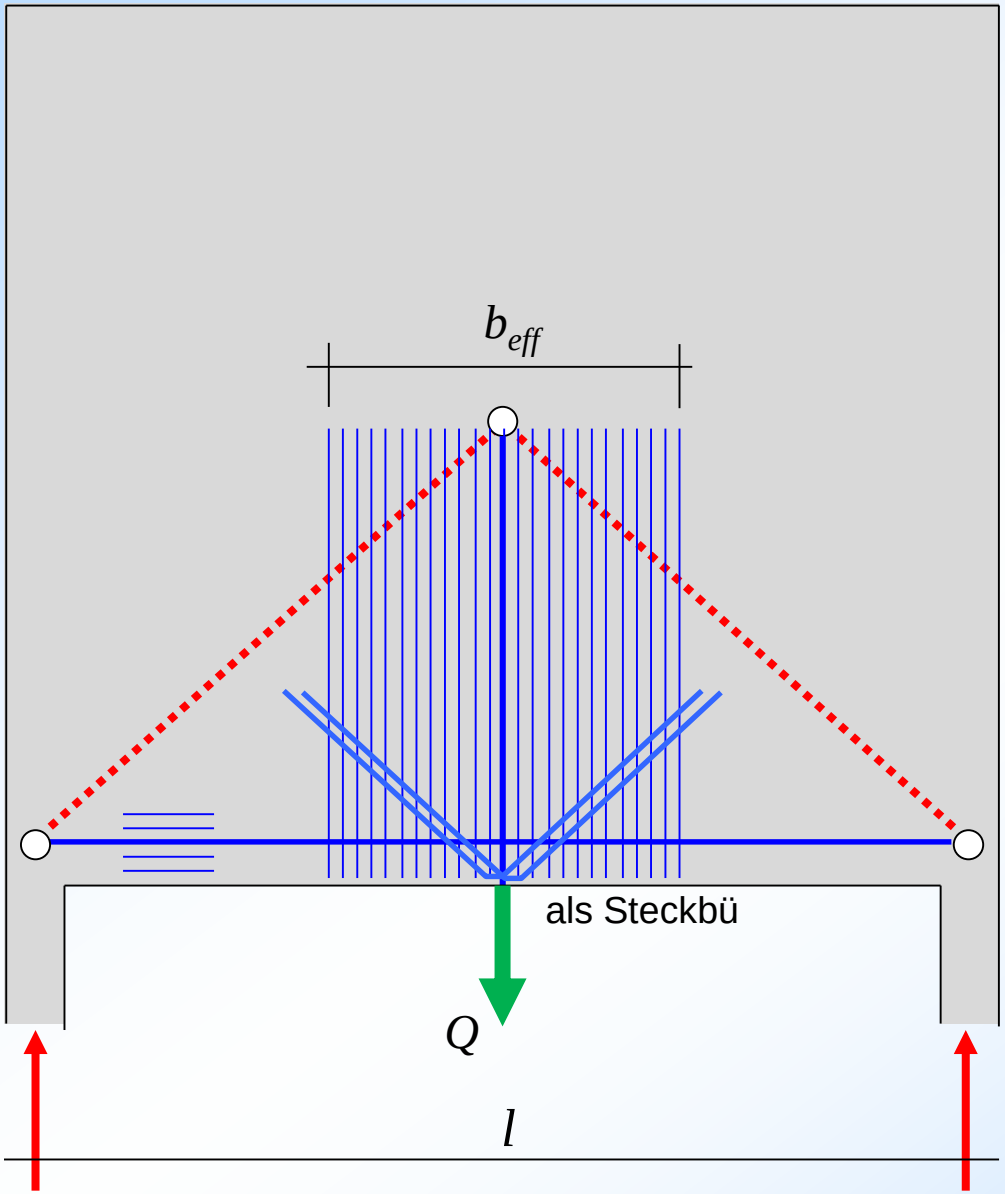
erf. Gesamthöhe $H = \frac{c}{\tan\alpha} + \frac{\lambda \cdot c}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

für 2:1 $H = \left(\frac{1}{2} + 2{,}5 \cdot \lambda\right) \cdot c$

für 1:1 $H = \left(\frac{1}{1} + 2{,}0 \cdot \lambda\right) \cdot c$

mind. jedoch $H = \frac{c}{\tan\alpha}$ + Verankerungslänge der vert. Bew.

λ: proz. Kraftanteil, der nicht über den Beton allein abgetragen werden kann. (der Anteil, der in Bew. eingeleitet werden muss)



Bei angehängten Einzellasten:

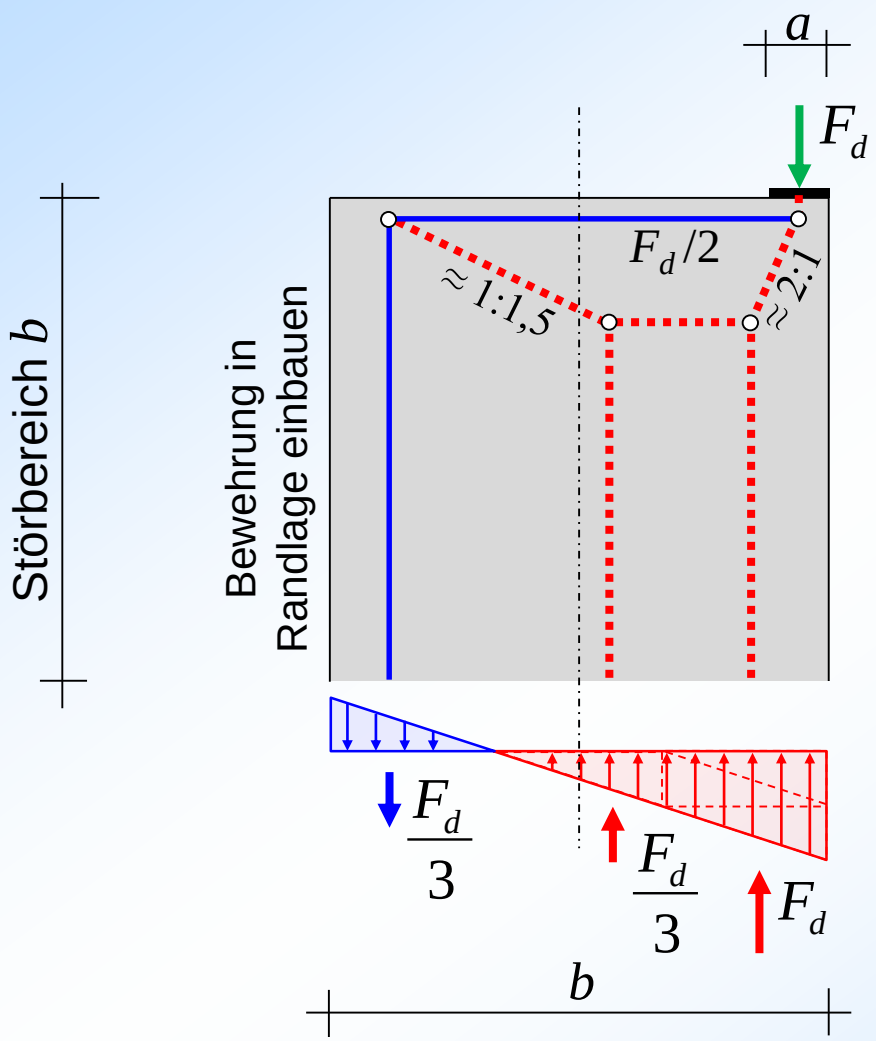
$$b_{eff} = \frac{Q_k}{f_{ctm} \cdot t}$$

t : Wanddicke

Zusätzlich sollte auf b_{eff} eine Bewehrung für die Abdeckung der Risskraft angeordnet werden.

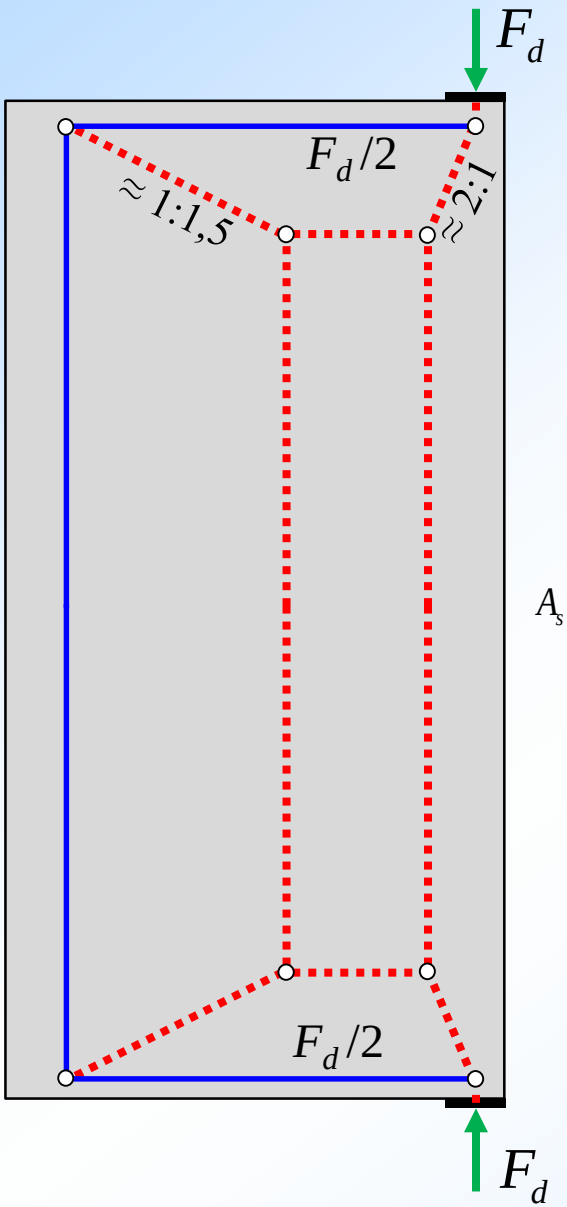
$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr})}{3{,}6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

Für $F_{s,cr}$ ist Q_k einzusetzen, ggf. Formel für dicke Bauteile verwenden. Auch Schrägstahl-zulagen sind zu empfehlen.



Bewehrung auf der sicheren Seite für Steigung von 2:1 auslegen (in der Lit. häufig mit 3:1 angegeben)

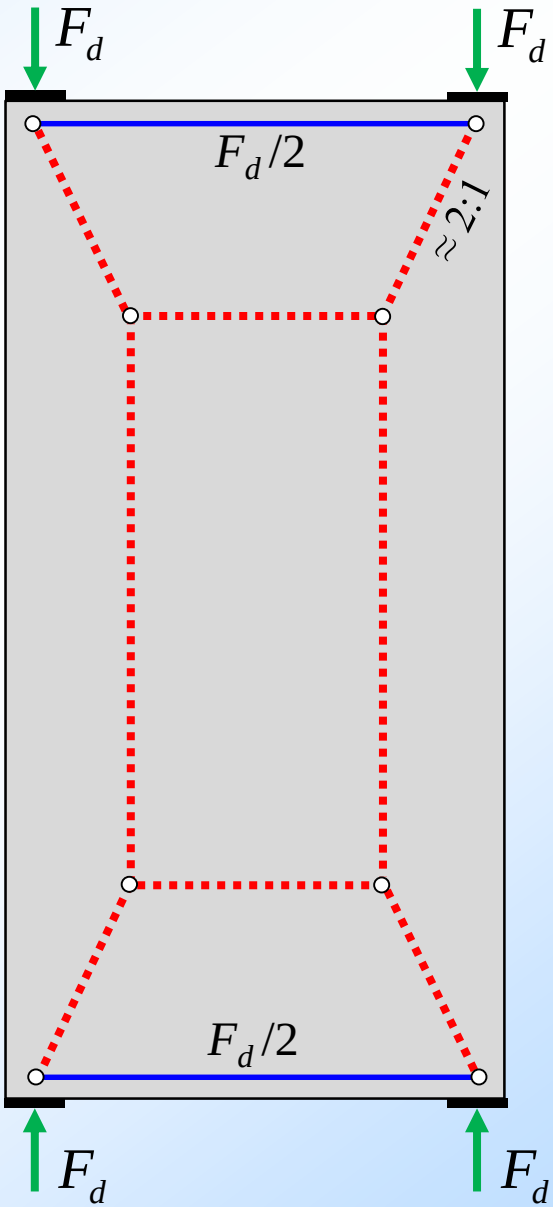
Kräfteangaben für $a = 0$

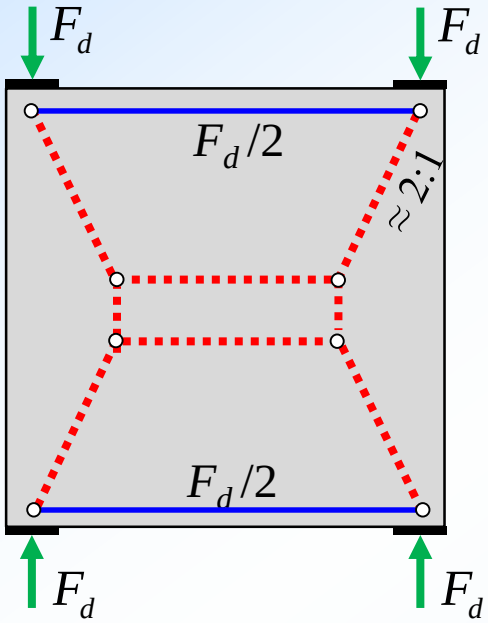


Empfehlung: auf $0{,}1 \cdot l \leq 0{,}1 \cdot h$ mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr})}{3{,}6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.

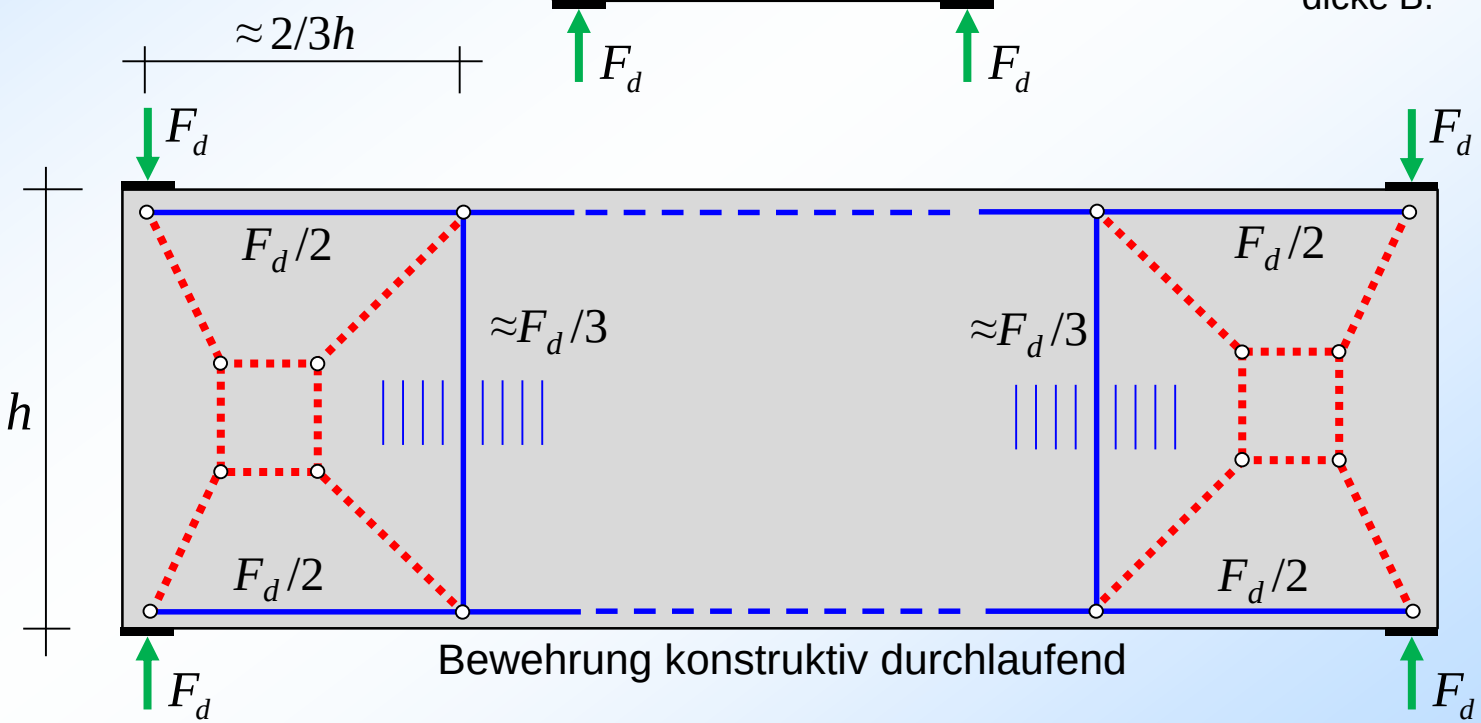




Empfehlung: auf $0{,}1 \cdot l \leq 0{,}1 \cdot h$ mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr})}{3{,}6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$

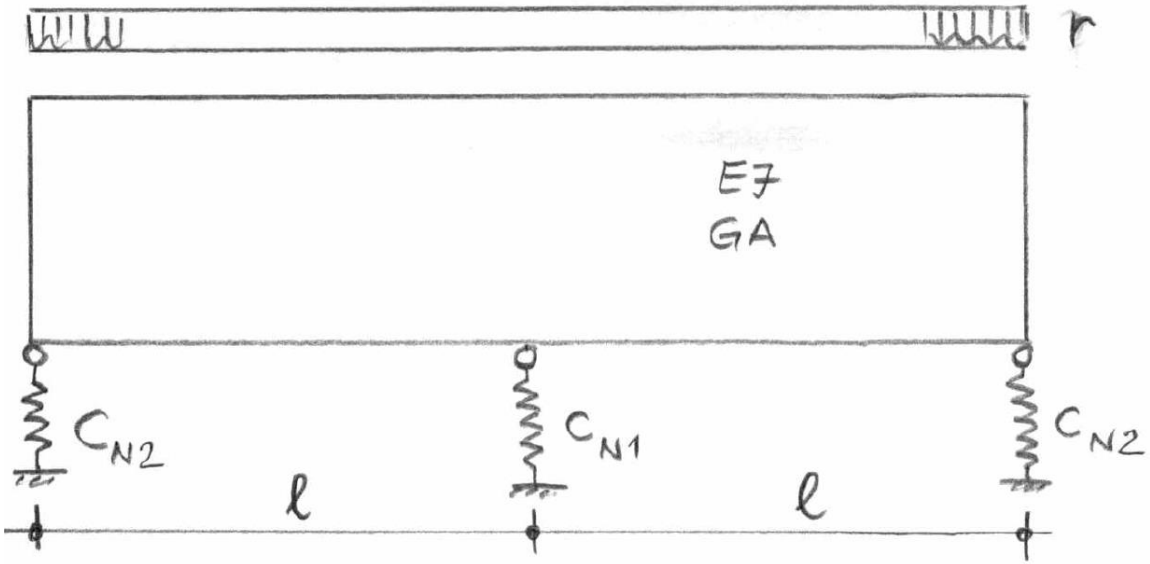
für dünne Bauteile, ggf. für dicke B.



Bewehrung konstruktiv durchlaufend

Stat. unbest. wandartige Träger mit elastischer Lagerung

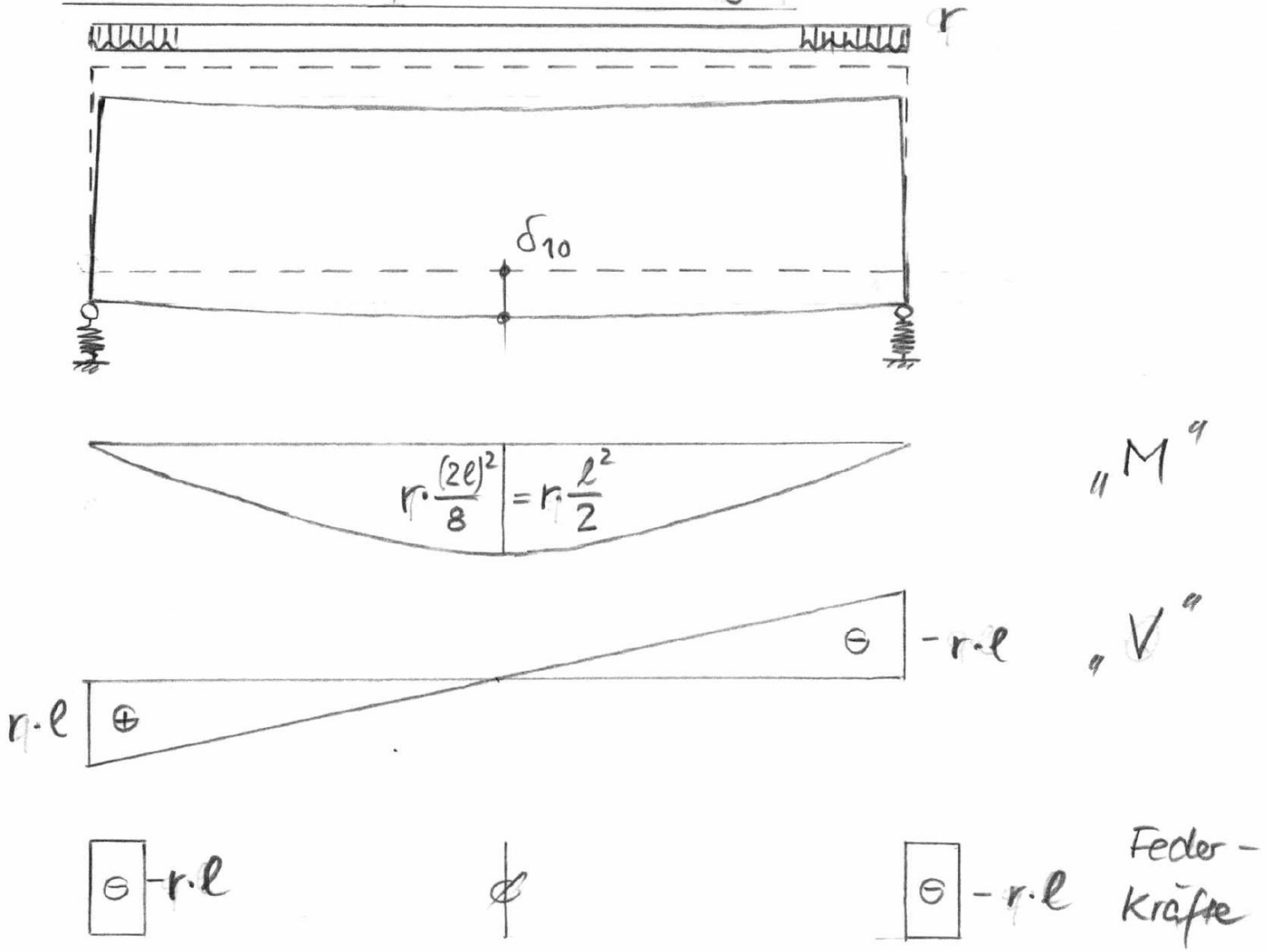
Symmetrischer Zweifeldträger als Einführungsbeispiel



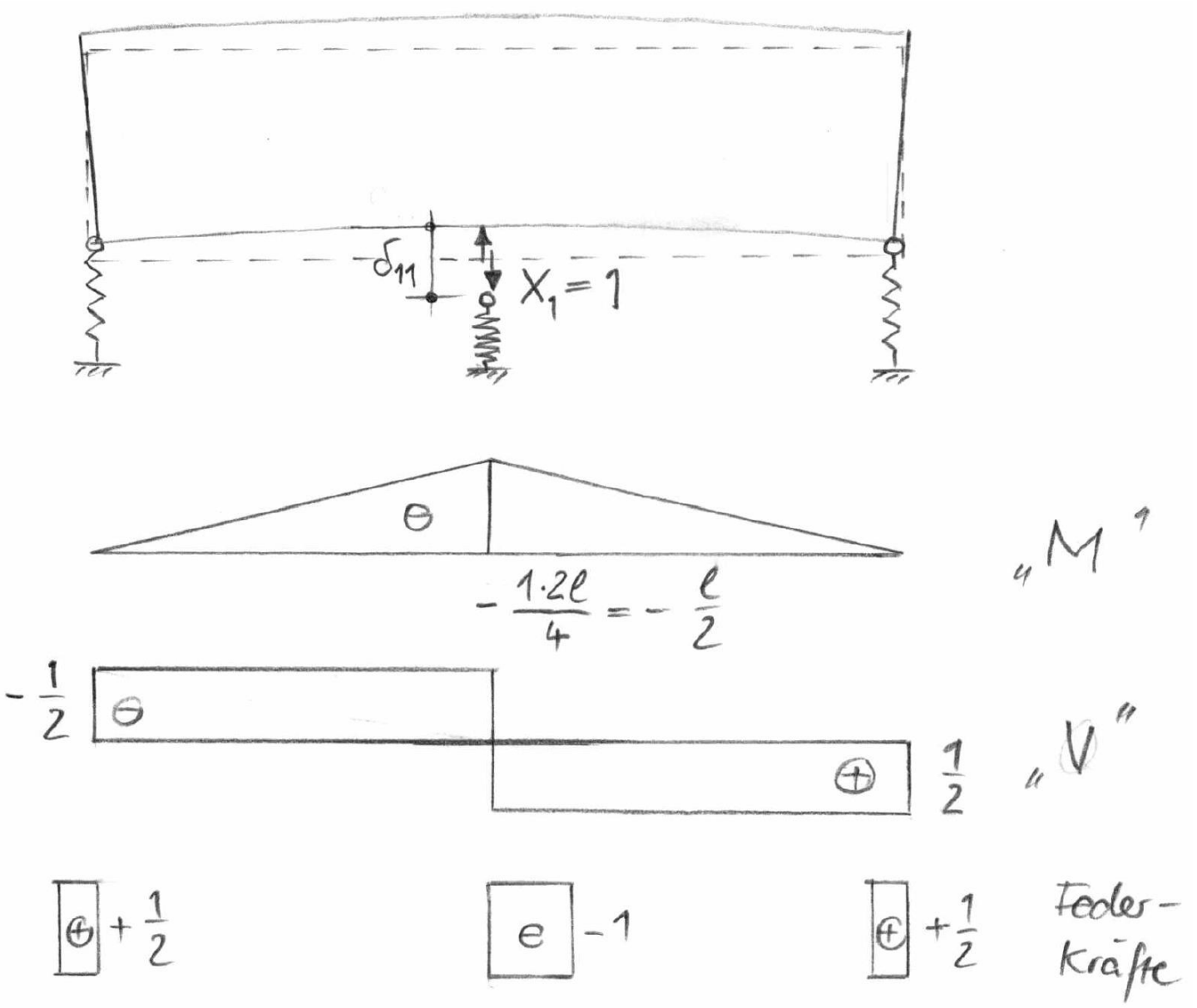
ges.: Auflagerkräfte

Es folgt eine 1fach stat. unbest. Berechnung

Ø - Zustand für die Belastung r



1-Zustand


δ_{11}
$X_1 = 1$
$\ominus$
$-\frac{1 \cdot 2\ell}{4} = -\frac{\ell}{2}$
„M"
$-\frac{1}{2}$
$\ominus$
$\oplus$
$\frac{1}{2}$
„V"
$\oplus$ $+\frac{1}{2}$
e -1
$\oplus$ $+\frac{1}{2}$
Feder-
Kräfte

$$\boxed{1^{\vee}\cdot\delta_{ik} = \int_0^{2\ell} \frac{M}{EJ}\cdot M^{\vee}\cdot dx + \int_0^{2\cdot\ell} \frac{V}{G\cdot A}\cdot V^{\vee}\cdot dx + \sum \frac{N}{C_{Ni}}\cdot N^{\vee}}$$

$$1^{\vee}\cdot\delta_{10} = -\frac{5}{12EJ}\cdot r\frac{\ell^2}{2}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot 2\ell - \frac{1}{2GA}\cdot r\ell\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\ell - 2\cdot\frac{1}{C_{N2}}\cdot r\ell\cdot\frac{1}{2} = -\left(\frac{5\cdot\ell^3}{24EJ} + \frac{\ell}{2GA} + \frac{1}{C_{N2}}\right)\cdot r\cdot\ell$$

$$1^{\vee}\cdot\delta_{11} = \frac{1}{3EJ}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot 2\ell + \frac{1}{GA}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\ell + 2\cdot\frac{1}{C_{N2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{C_{N1}}\cdot 1\cdot 1 = \frac{\ell^3}{6EJ} + \frac{\ell}{2GA} + \frac{1}{2\cdot C_{N2}} + \frac{1}{C_{N1}}$$

$$\delta_{10} + X_1\cdot\delta_{11} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow X_1 = \frac{\frac{5\cdot\ell^3}{24EJ} + \frac{\ell}{2GA} + \frac{1}{C_{N2}}}{\frac{\ell^3}{6EJ} + \frac{\ell}{2GA} + \frac{1}{2\cdot C_{N2}} + \frac{1}{C_{N1}}}\cdot r\cdot\ell}$$

Sonderfall 1: schlanker Biegeträger mit starren Auflagern

$C_{N1} = C_{N2} \to \infty$

Schubverformung vernachlässigbar

$$\Rightarrow X_1 = \frac{\frac{5 \cdot \ell^3}{24 EJ} + 0 + 0}{\frac{\ell^3}{6EJ} + 0 + 0} \cdot r \cdot \ell = \frac{5}{4} r \cdot \ell = +1{,}25 \cdot r \cdot \ell = B$$

$$A = C = 0{,}375 \cdot r \cdot \ell$$

Sonderfall 2: biege- und schubsteife Scheibe, nachgiebige Lagerung

$EJ \to \infty$ $GA \to \infty$ hier gew. $C_{N1} = C_{N2} = C_N$

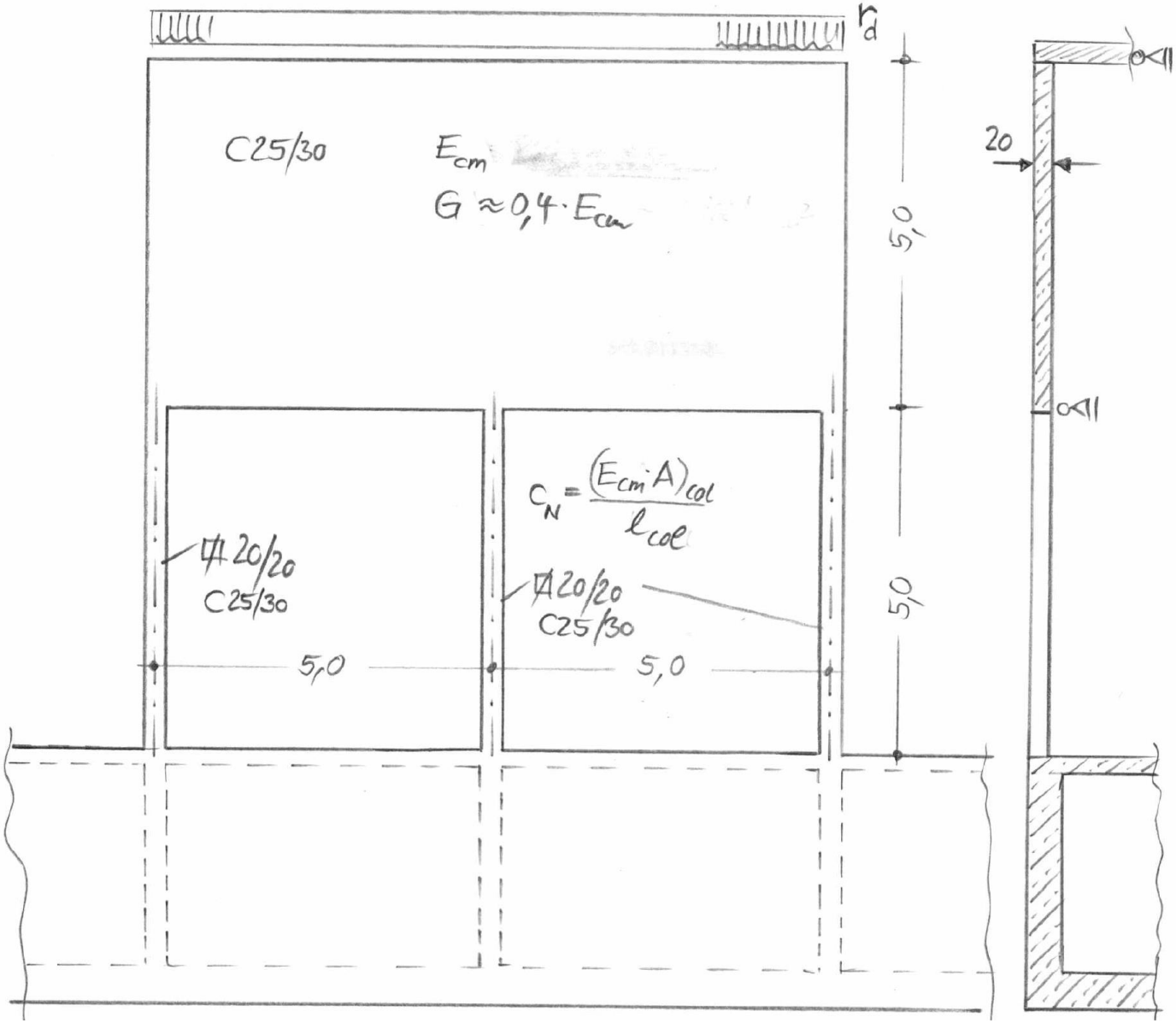
$$\Rightarrow X_1 = \frac{0 + 0 + \frac{1}{C_{N2}}}{0 + 0 + \frac{1}{2C_{N2}} + \frac{1}{C_{N1}}} \cdot r \cdot \ell = \frac{1}{C_N} \cdot \frac{2 C_N}{3} \cdot r \cdot \ell = \frac{2}{3} r \cdot \ell = 0{,}667 \cdot r \cdot \ell = B$$

$$A = C = \frac{2}{3} r \cdot \ell = 0{,}667 \cdot r \cdot \ell$$

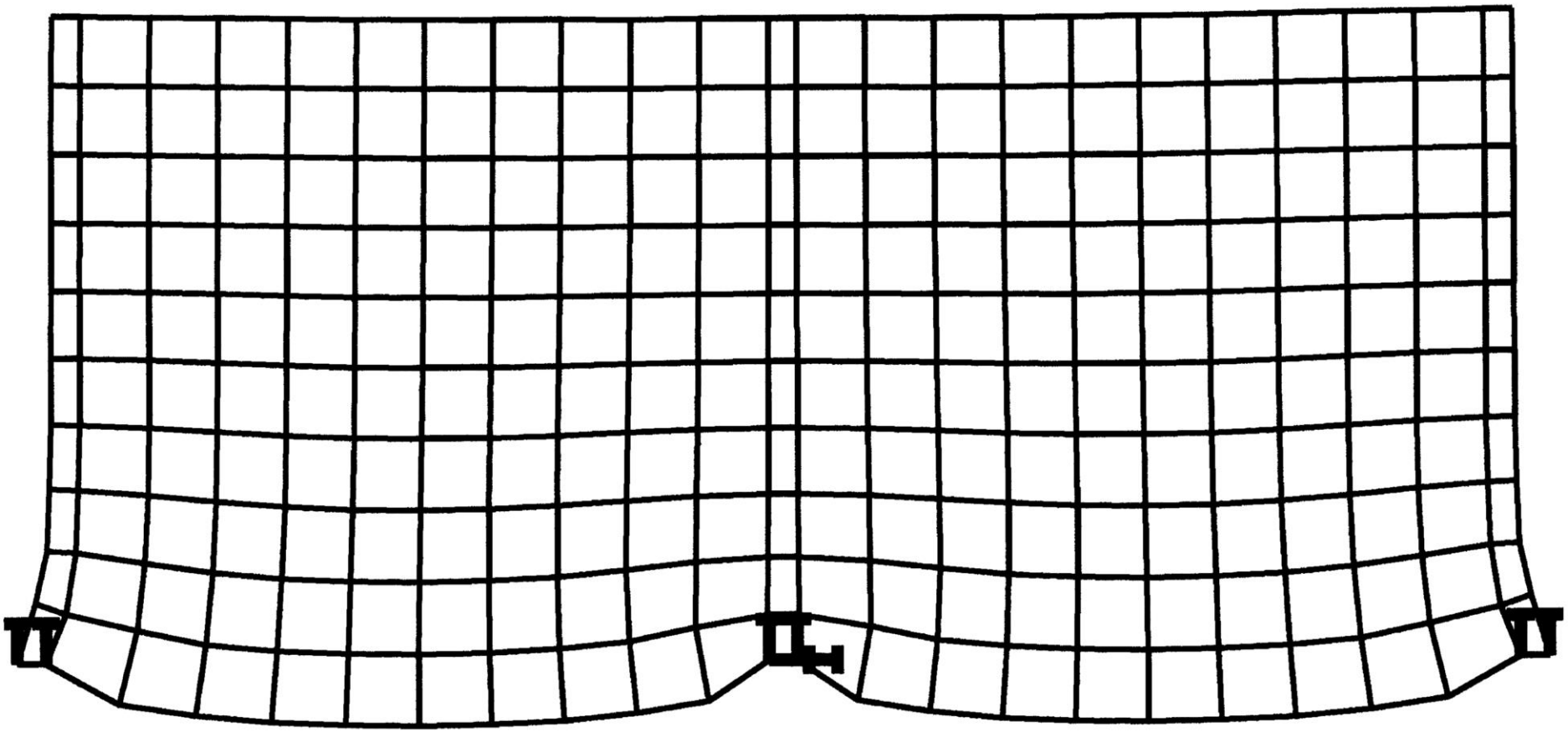
<u>Sonderfall 2.1:</u> wie 2, jedoch $\underset{\text{(innen)}}{c_{N1}} = 2 \cdot \underset{\text{(außen)}}{c_{N2}}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} B &= 1{,}0 \cdot r \cdot \ell \\ A = C &= 0{,}5 \cdot r \cdot \ell \end{aligned}\right\} \text{Verteilung nach Lagersteifigkeit}$$

Beispiel: Wandartiger Träger auf 3 Stützen



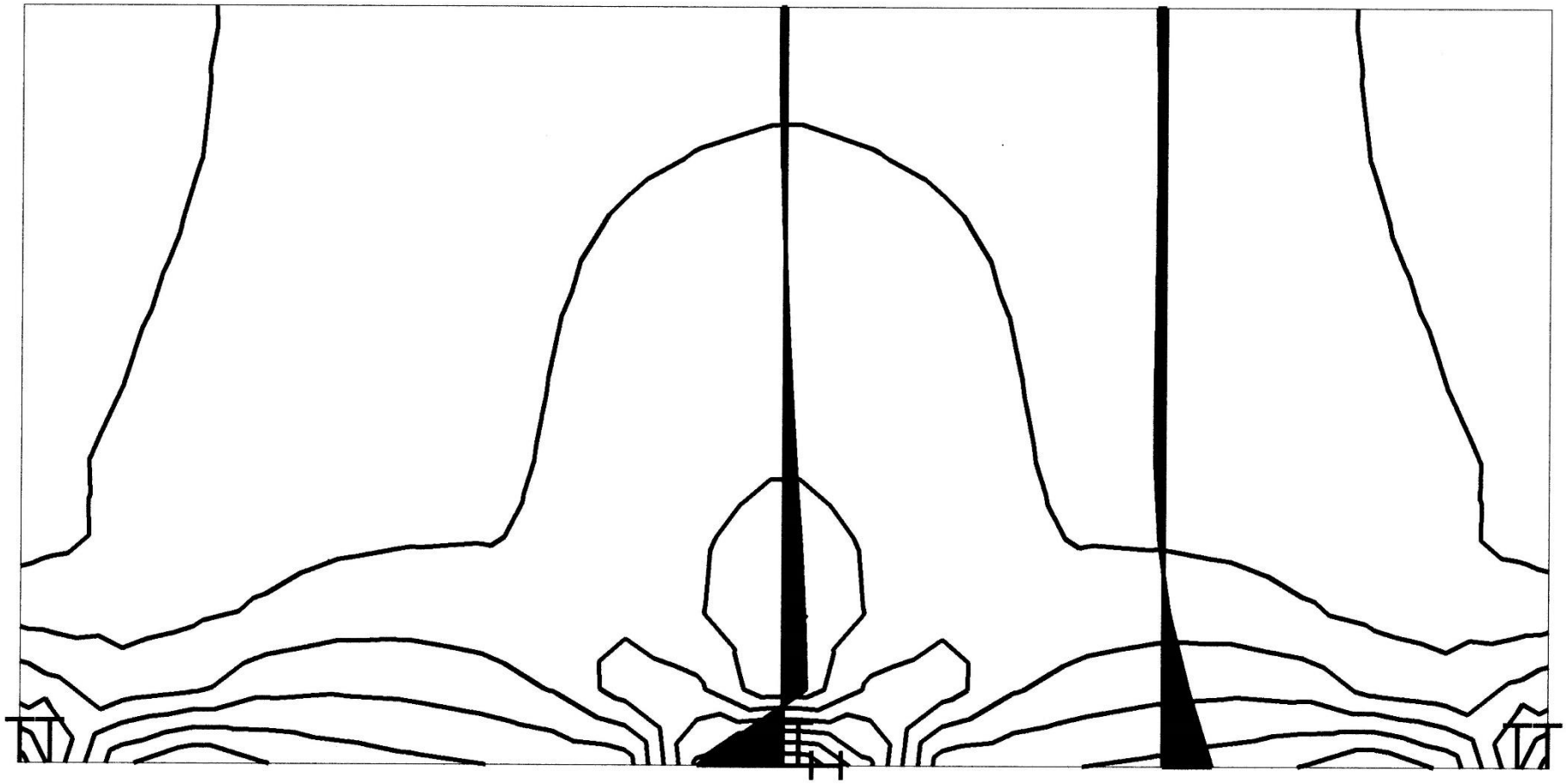
Zweifeldrige Wandscheibe, Verformung (s. auch Folien Stabwerkmod.)



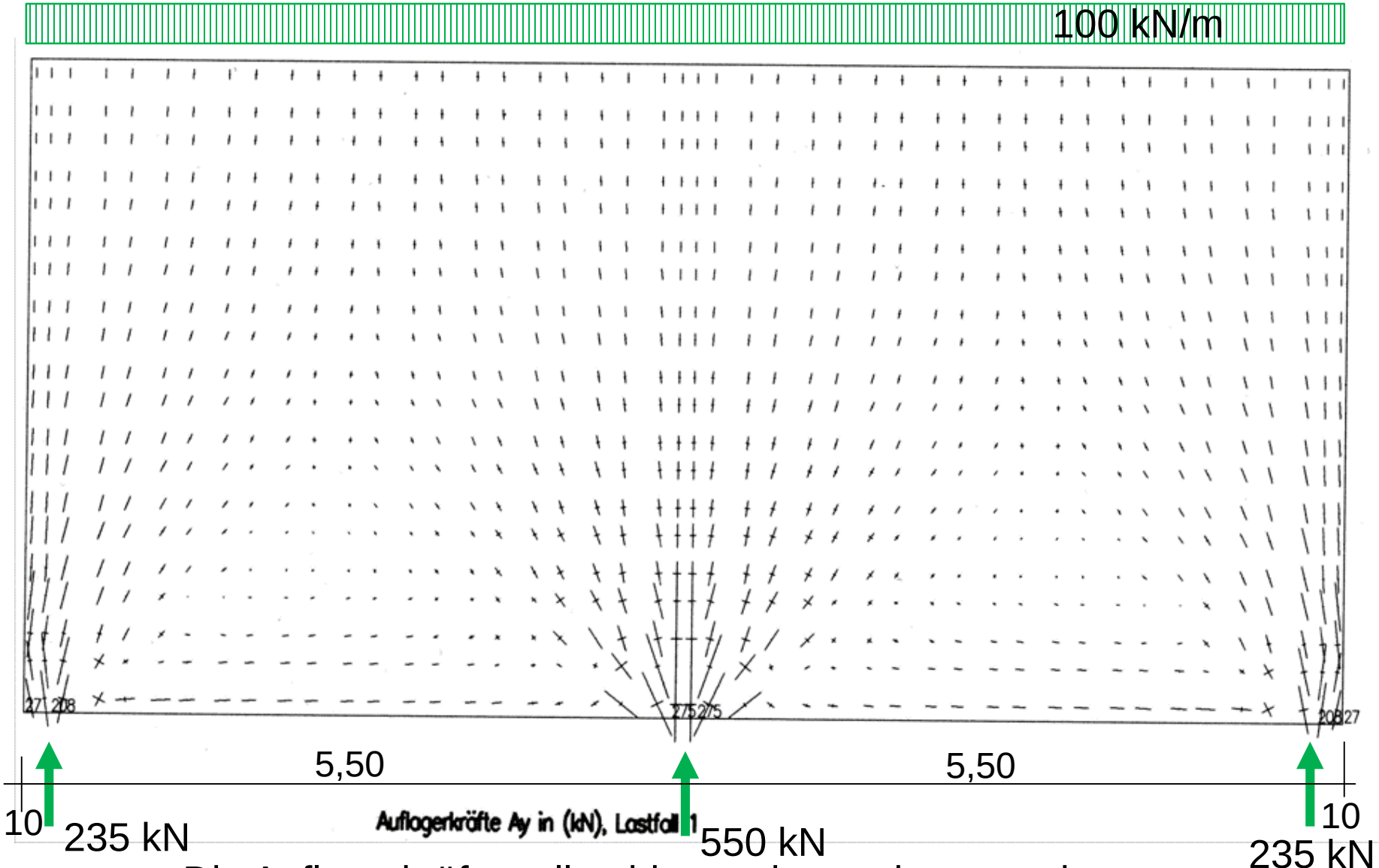
zunächst starre Lager verwendet

Zweifeldrige Wandscheibe, Spannungen

Höhenlinie für sigx in (kN/m2), Lastfall 1



Zweifeldrige Wandscheibe, Spannungen



Die Auflagerkräfte sollen hier nachgerechnet werden

Nachrechnung der FE-Ergebnisse für starre Lagerung:

$$EI = E \cdot 0,2 \cdot \frac{5^3}{12} = 2,083 \cdot E$$

$$GA = 0,4 \cdot E \cdot 0,2 \cdot 5,0 = 0,4 \cdot E$$

$$X_1 = B = \frac{\frac{5}{24} \cdot \frac{5^3}{2,083E} + \frac{5}{2 \cdot 0,4E}}{\frac{4}{24} \cdot \frac{5^3}{2,083E} + \frac{5}{2 \cdot 0,4E}} \cdot r \cdot l = \frac{12,5 + 6,25}{10 + 6,25} \cdot r \cdot l$$

$$= 1,15 \cdot r \cdot l \qquad \Rightarrow A = C = 0,425 \cdot r \cdot l$$

für $r = 100\ kN/m$:

$$B = 1,15 \cdot 100 \cdot 5 = 575 \approx 550 kN$$

sehr gute Übereinstimmung mit FE-Lösung

Das gleiche Beispiel soll noch einmal mit sehr nachgiebigen Stützen berechnet werden:

$$c_{N1} = c_{N2} = c_N = E \cdot \cancel{0,2} \cdot \frac{0,2^2}{5,0} = 0,008 \cdot E \qquad \Rightarrow \frac{1}{c_N} = 125 \cdot \frac{1}{E}$$

$$X_1 = B = \frac{12,5 + 6,25 + 125}{10 + 6,25 + \frac{125}{2} + 125} \cdot r \cdot l$$

$$= 0,706 \cdot r \cdot l \qquad \Rightarrow A = C = 0,647 \cdot r \cdot l$$

Diese Lösung liegt sehr dicht am Sonderfall 2

Die Nachgiebigkeit der Stützen hat erheblichen Einfluss auf die Stützenkräfte (Außenstützen erhalten erheblich größere Beanspruchung) und auf die Beanspruchung des wandartigen Trägers.

➔ Eine Berechnung nach DAfStb-Heft 240 (bzw. Nachfolgeheft 631) allein ist nicht empfehlenswert

Lastfall Lagersenkung der Mittelstütze um 5mm für das gleiche Beispiel:

$$X_1 = B = \frac{0,005}{\left(10 + 6,25 + \frac{125}{2} + 125\right) \cdot \frac{1}{31000}} = -0,761 MN$$ Zugkraft!

$$\Rightarrow A = C = 0,380 MN$$ zus. Druckkraft in den Außenstützen!

Geringe Stützensenkungen haben bereits erheblichen Einfluss auf die Stützenbem. und auf die Biegebem. des wandartigen Trägers.
➔ Auf der sicheren Seite liegende Grenzbetrachtungen sind sinnvoll.

Berechnung der Auflagerkräfte und Schnittgrößen statisch unbestimmt gelagerter Träger (Scheibentragwerke)

Die Auflagerkräfte und damit auch die Schnittgrößen statisch unbestimmt gelagerter Scheibentragwerke sind stark abhängig vom elastischen Verhalten der Unterstützungen (Federwirkung von Unterstützungen, ggf. einschließlich Gründung). Sie verändern ihren Wert schon bei kleinen Setzungsdifferenzen erheblich.

Vorgehensweise: Betrachtung zweier Grenzfälle (Lös. n. H.240 bzw. 631 DAfStb liegt dazwischen)

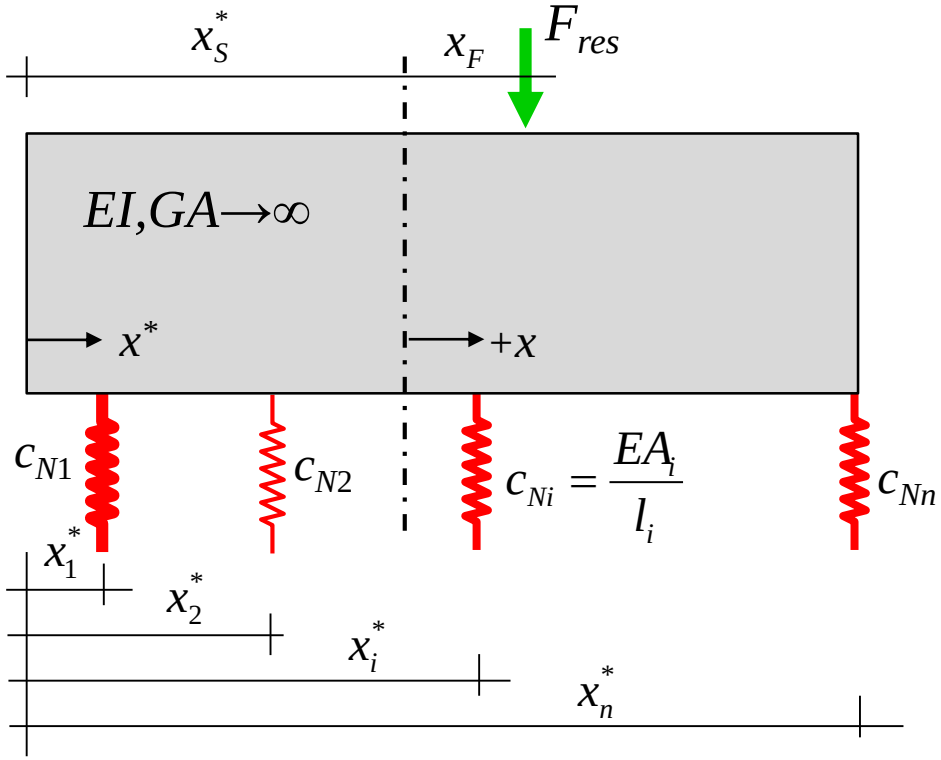
Grenzfall 1: Berechnung als üblicher biegeweicher Durchlaufträger mit starren Lagern.

Grenzfall 2: Berechnung als starre Scheibe mit Berücksichtigung des elastischen Verhaltens der Unterstützungen. Die Biege- und Schubsteifigkeit spielen eine untergeordnete Rolle und können daher als unendlich steif angenommen werden.

Bei einer Bemessung für die jeweils ungünstigste Beanspruchung und konstruktiv sinnvoller Bewehrungsführung sind dann die Scheiben robust und die Unterstützungen auf der sicheren Seite bemessen.

Alternativ können auch FEM-Programme eingesetzt werden, diese sind aber nur aussagekräftig, wenn die elastischen Unterstützungen richtig berücksichtigt werden. Grenzfallbetrachtungen sind auch hier dringend anzuraten.

Verteilung der Auflagerkräfte bei biege- und schubsteifer Scheibe

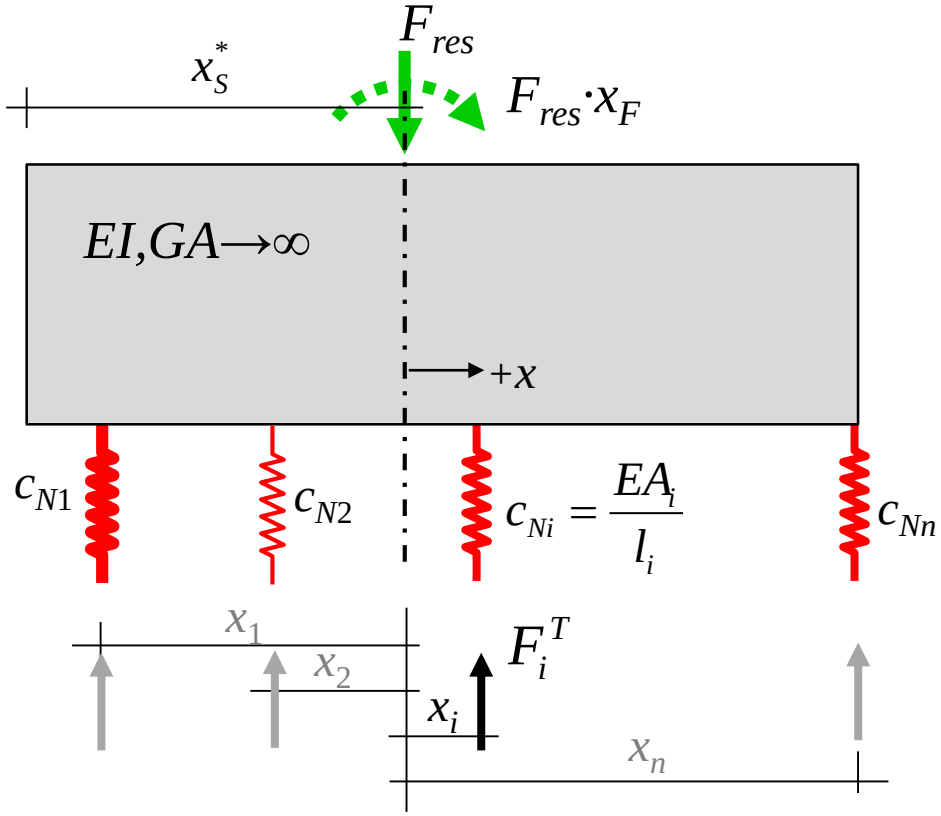


in Analogie zur Verteilung der H-Kräfte auf Wandscheiben

„Schwerpunkt der Federsteifigkeiten“:

$$x_S^* = \frac{\sum \frac{EA_i}{l_i} \cdot x_i^*}{\sum \frac{EA_i}{l_i}}$$

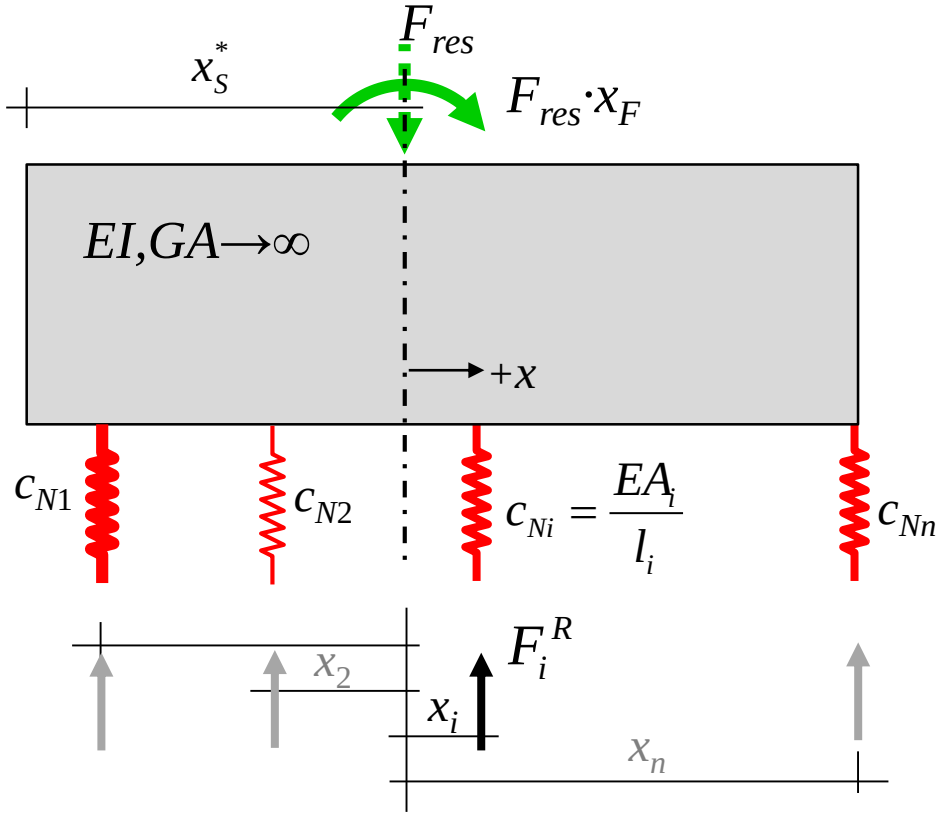
Verteilung der Auflagerkräfte bei biege- und schubsteifer Scheibe



Translationsanteile:

$$F_i^T = \frac{\frac{EA_i}{l_i}}{\sum \frac{EA_i}{l_i}} \cdot F_{res}$$

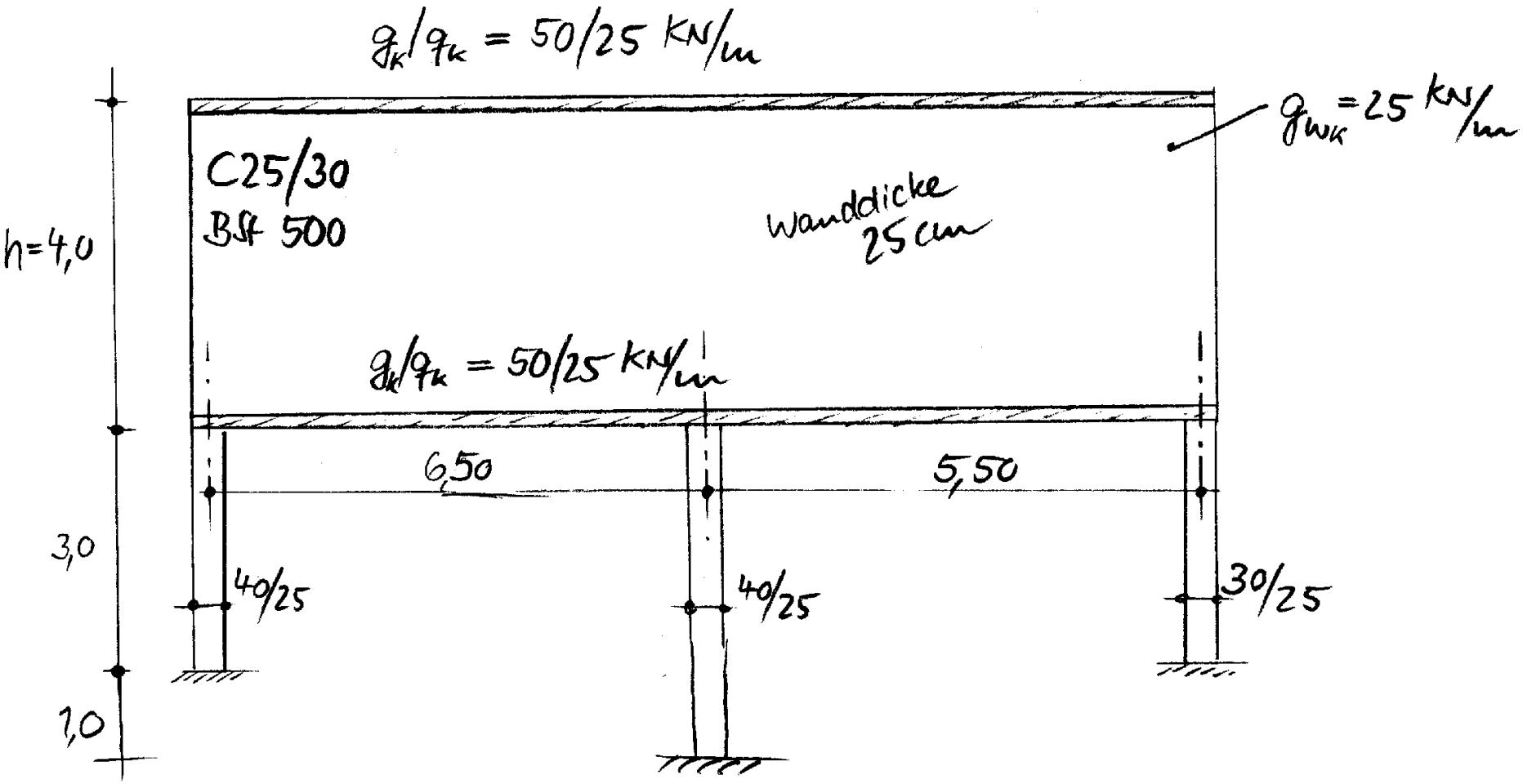
Verteilung der Auflagerkräfte bei biege- und schubsteifer Scheibe



Rotationsanteile:

$$F_i^R = \frac{\frac{EA_i}{l_i} \cdot x_i}{\sum \frac{EA_i}{l_i} \cdot x_i^2} \cdot \left(F_{res} \cdot x_F\right)$$

System und Belastung:

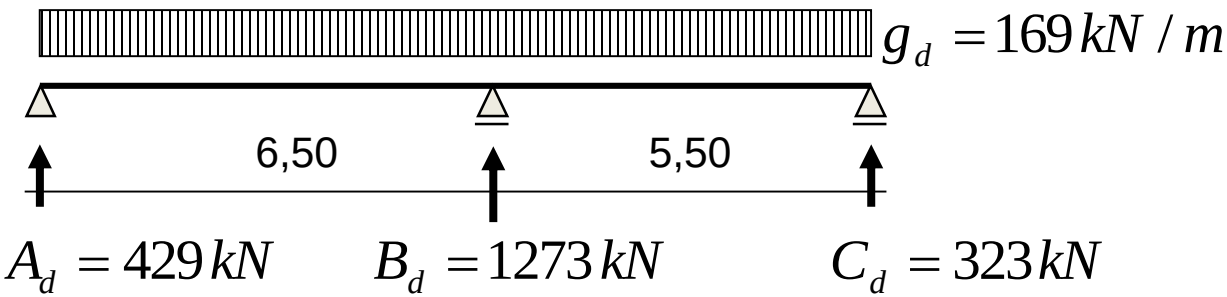


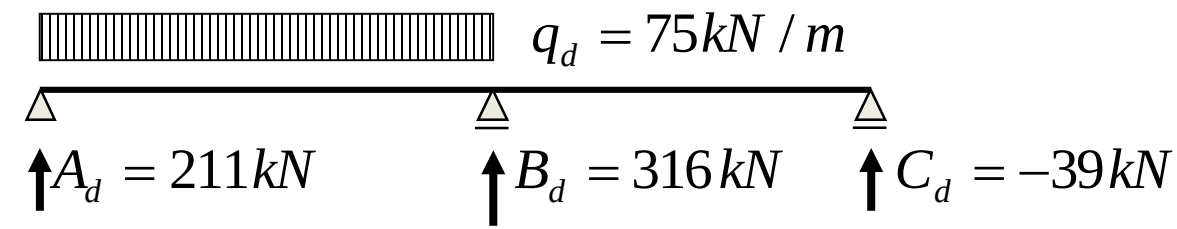
$$g_d = 1{,}35 \cdot (2 \cdot 50 + 25) = 168{,}75 \approx 169\, kN/m$$

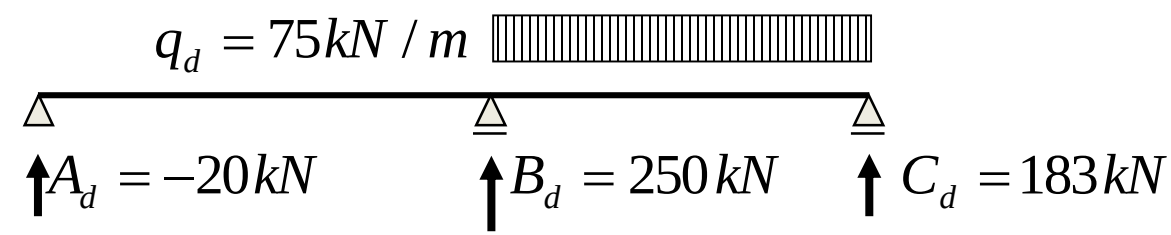
$$q_d = 1{,}5 \cdot 2 \cdot 25 = 75\, kN/m$$

Grenzfall 1: Auflagerkräfte und Schnittgrößen nach üblicher Balkenstatik (starre Lagerung)

Hinweis: sämtliche Zahlenergebnisse sind gerundete Werte einer Excel-Berechnung!







Für Volllast ergibt sich B_d = 1838kN und $M_{Ed,B}$ = -1120kNm

Grenzfall 2: Auflagerkräfte und Schnittgrößen für starre Scheibe mit nachgiebiger Lagerung

Hinweis: sämtliche Zahlenergebnisse sind gerundete Werte einer Excel-Berechnung!

Zunächst werden die Federsteifigkeiten der Stützen ermittelt:

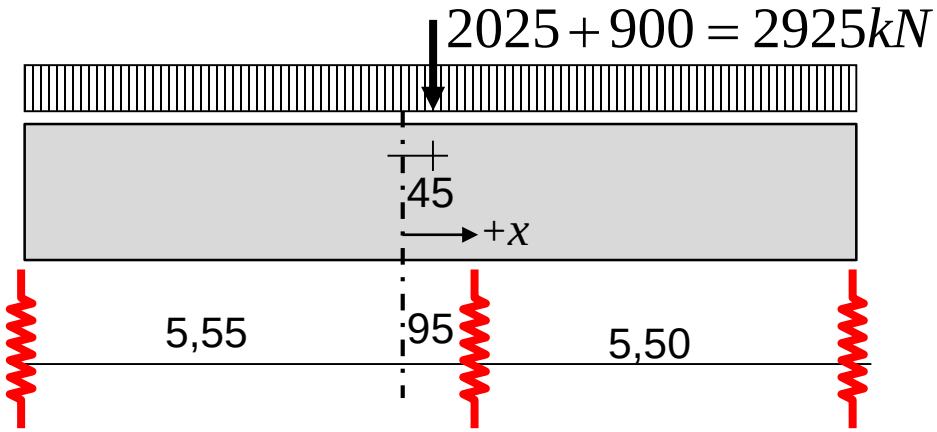
$$\left.\begin{aligned} c_A &= \frac{EA}{l} = \frac{E \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}25}{3{,}0} = \frac{0{,}1 \cdot E}{3{,}0} \\ c_B &= \quad = \frac{E \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}25}{4{,}0} = \frac{0{,}075 \cdot E}{3{,}0} \\ c_C &= \quad = \frac{E \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25}{3{,}0} = \frac{0{,}075 \cdot E}{3{,}0} \end{aligned}\right\} \sum \frac{EA}{l} = \frac{0{,}25 \cdot E}{3{,}0}$$

Schwerpunkt der Dehnsteifigkeit:

$$x_S^* = \frac{0{,}1 \cdot 0 + 0{,}075 \cdot 6{,}5 + 0{,}075 \cdot 12{,}0}{0{,}1 + 0{,}075 + 0{,}075} = 5{,}55m$$

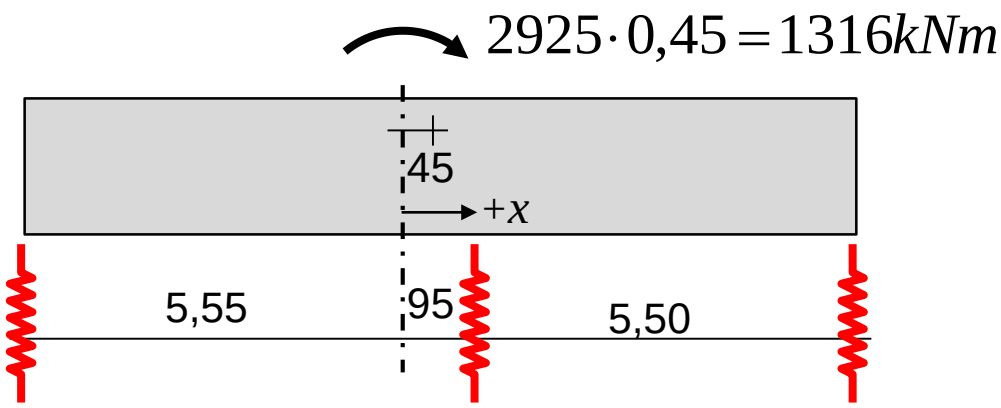
von Achse Auflager A

Betrachtung des Lastfalls Volllast:



Translationsanteile:

$$A_d = \frac{0{,}1}{0{,}25} \cdot 2925 = 1170kN \qquad B_d = 877{,}5kN \qquad C_d = 877{,}5kN$$

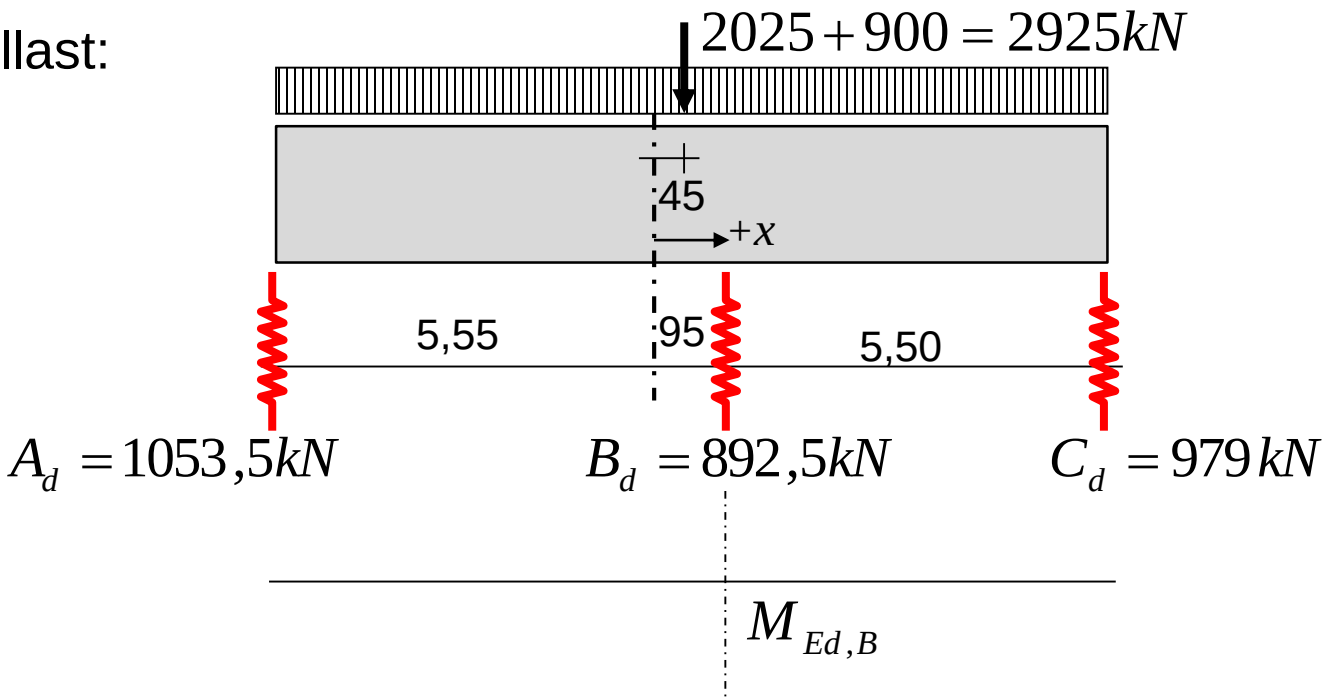


Rotationsanteile:

$$B_d = 15kN \qquad C_d = 102\,kN$$

$$A_d = \frac{\overbrace{-0{,}1 \cdot 5{,}55}^{-0{,}08854}}{0{,}1 \cdot 5{,}55^2 + 0{,}075 \cdot 0{,}95^2 + 0{,}075 \cdot 6{,}45^2} \cdot 1316 = -117kN$$

Ergebnis Lastfall Volllast:

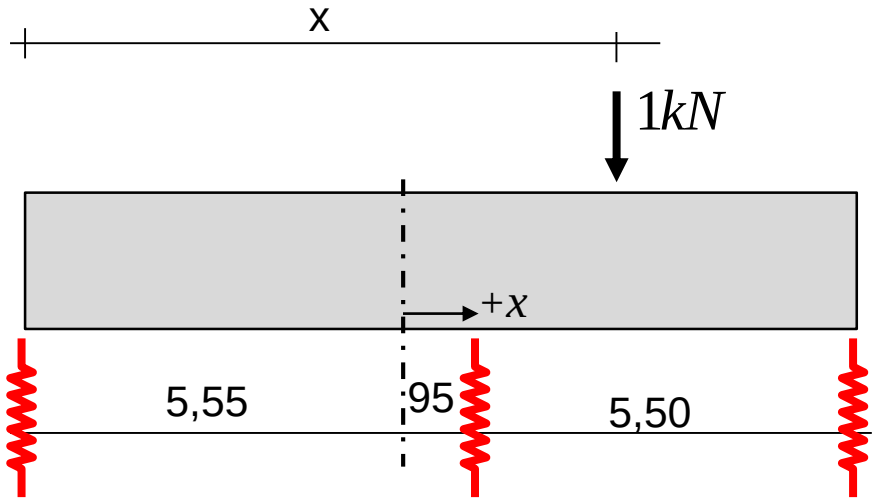


Das Moment an der Stützung B im wandartigen Träger beträgt:
$M_{Ed,B}$ = +1698 kNm (pos. Stützmoment!)

Für welche Belastung wird das Feldmoment maximal?

für die Belastung, die zu max A führt.

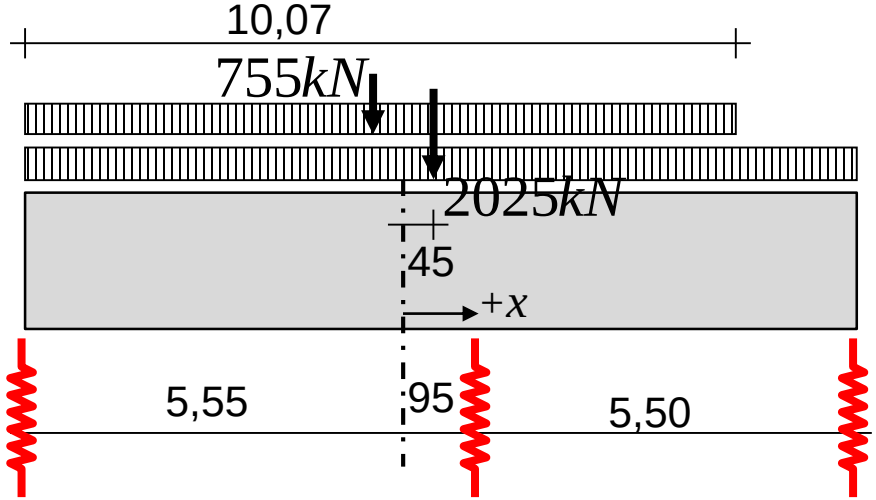
Für die Stelle einer beliebigen Einzellast, für die sich der positive Translations- und negative Rotationsanteil gegenseitig am Auflager A aufheben, ist die Grenze zwischen ungünstig und günstig wirkender Nutzlast gefunden. Entlastend wirkende Nutzlastabschnitte bleiben unbelastet.



$$A_d^T = \frac{0,1}{0,25} \cdot 1 = 0,4$$

$$A_d^R = -0,08854 \cdot 1 \cdot \left(x - 5,55\right) = -0,4$$

Ergebnis Lastfall max A mit Nutzlastlänge 10,07m von linker Lagerachse :



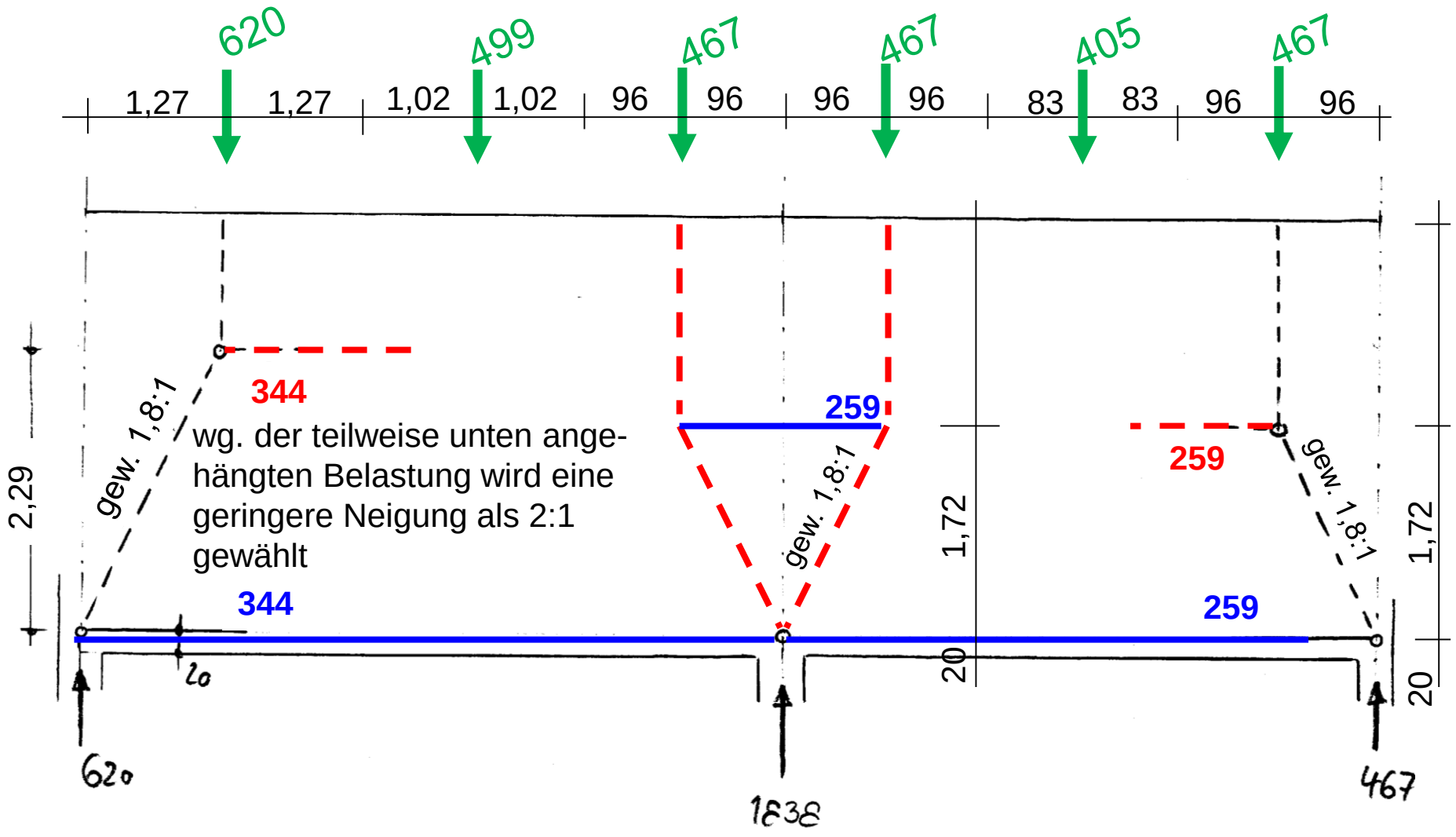
$$\max A_d = 1066\,kN \qquad B_d = 840\,kN \qquad C_d = 874\,kN$$

Ergebnis Lastfall max C mit Nutzlastlänge 9,44m von rechter Lagerachse:

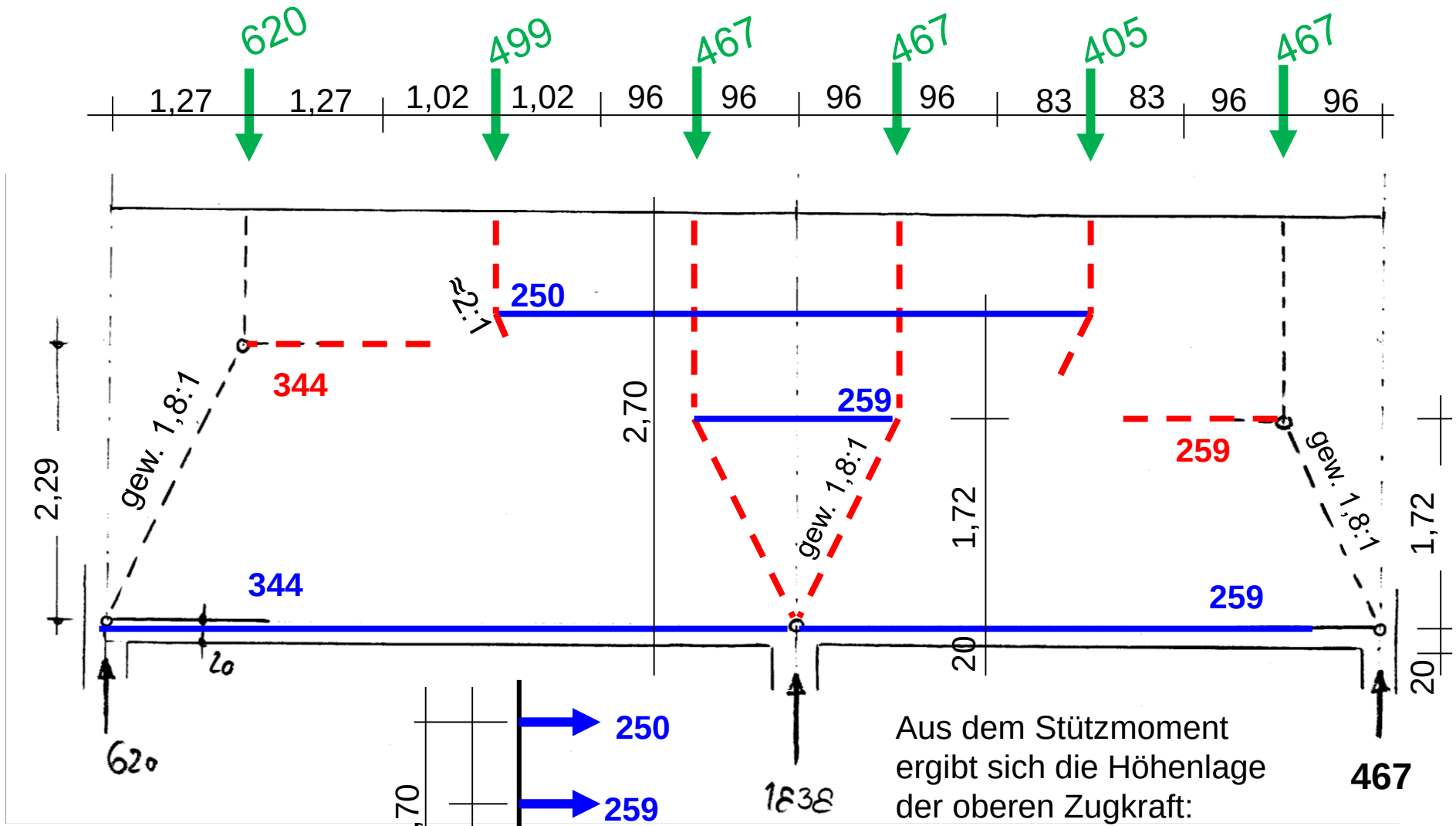
$$A_d = 952\,kN \qquad B_d = 862\,kN \qquad \max C_d = 987\,kN$$

Die größte Lagerkraft am Auflager B ergibt sich aus dem Grenzfall 1!

Stabwerkmodell für Grenzfall 1 (starre Lagerung) für Volllast:



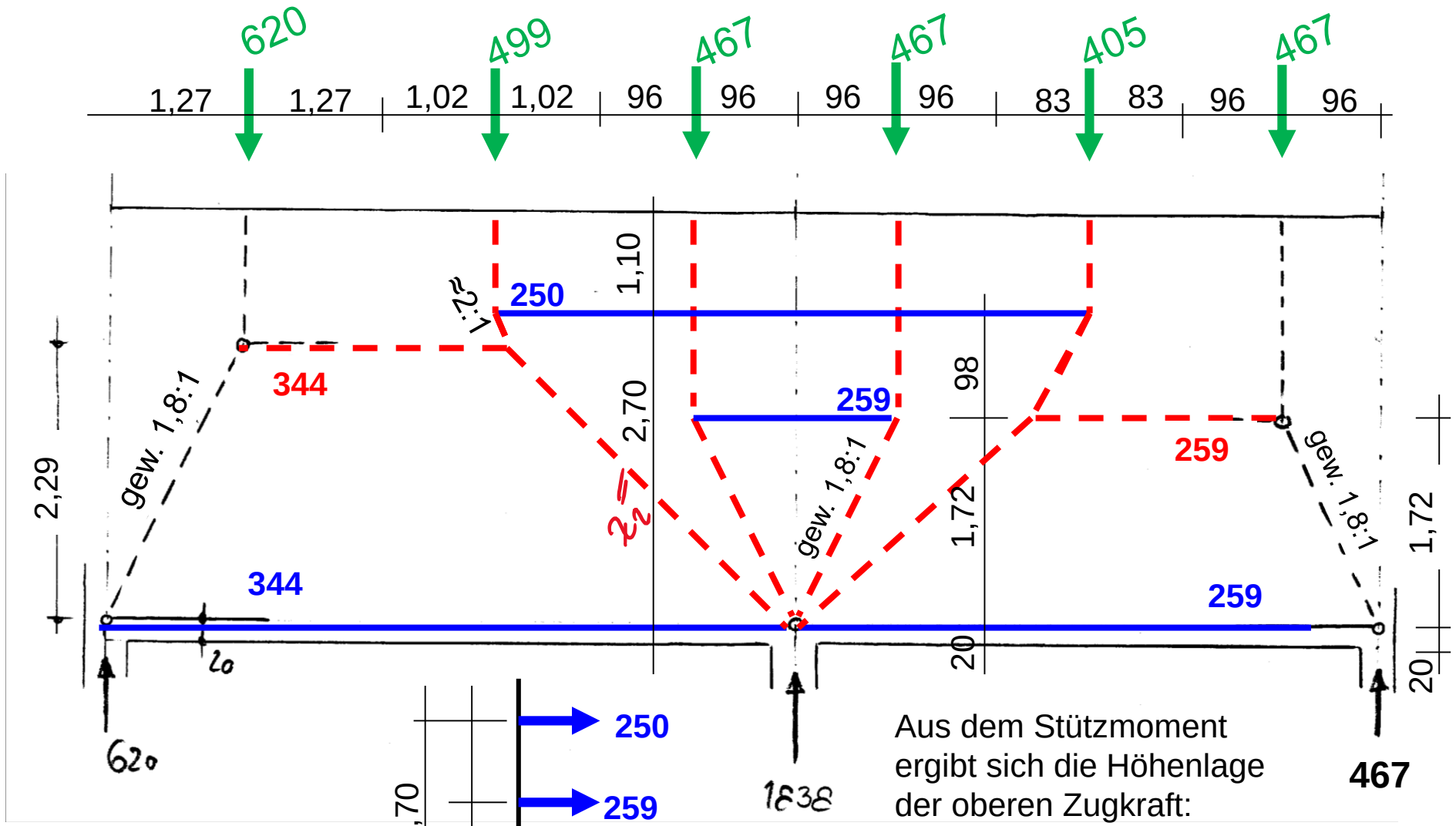
Stabwerkmodell für Grenzfall 1 (starre Lagerung) für Volllast:



Aus dem Stützmoment ergibt sich die Höhenlage der oberen Zugkraft:

$$z_2 = \frac{1120kNm - 259kN \cdot 1{,}72m}{250kN} = 2{,}70m$$

Stabwerkmodell für Grenzfall 1 (starre Lagerung) für Volllast:



Aus dem Stützmoment ergibt sich die Höhenlage der oberen Zugkraft:

$$z_2 = \frac{1120kNm - 259kN \cdot 1{,}72m}{250kN} = 2{,}70m$$

Netzbewehrung: $\min A_s = 1{,}5 \cdot \frac{25}{20} = 1{,}88 cm^2/m$
je Seite und Richtung

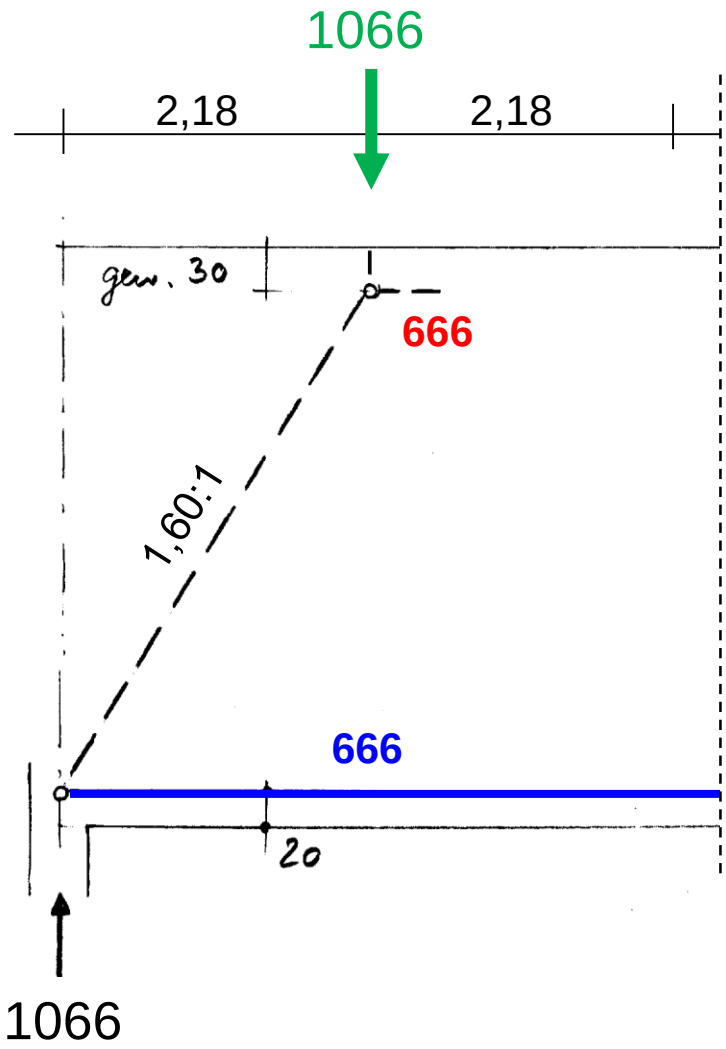
gew. Q188 beidseitig = 1,88cm²/m

Von der Netzbewehrung über die Höhe von $\frac{1{,}72m}{2} + 0{,}98m + 1{,}10m = 2{,}94m$
aufnehmbares Moment im Bereich
der Kraft von 259 + 250 kN:

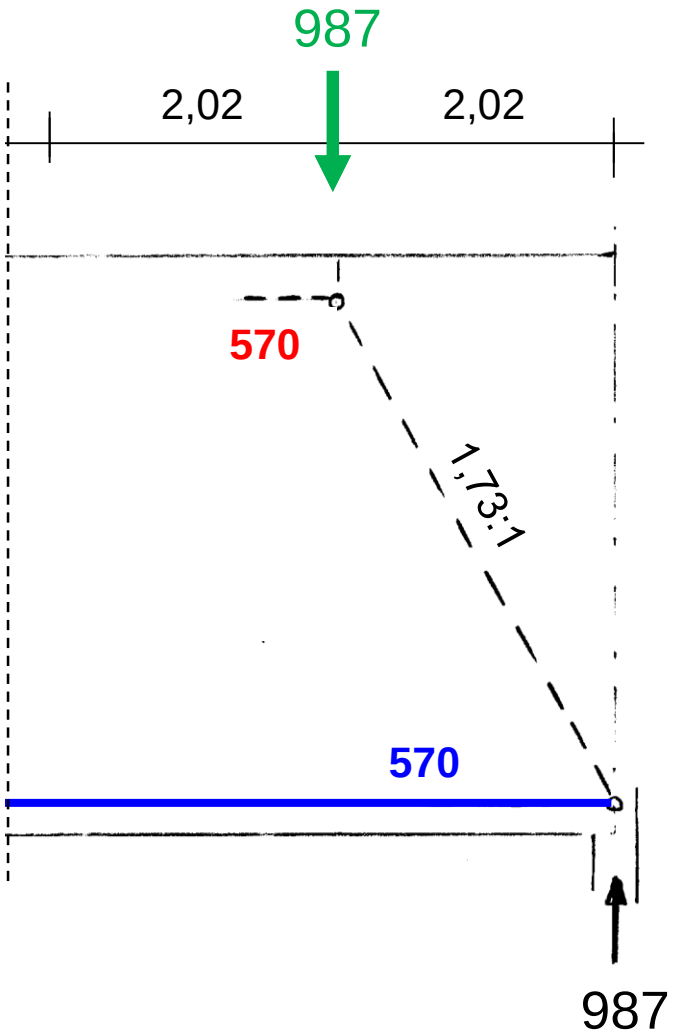
$$M_s \approx 2{,}94 \cdot \left(2{,}94/2 + 1{,}72/2\right) \cdot 2 \cdot 1{,}88\, cm^2/m \cdot 43{,}5\, kN/cm^2 = 1120 kN \geq 1120 kN$$

Bei nicht ausreichender Netzbewehrung kann auch eine horizontale Zulagebewehrung gewählt werden, bei sehr unterschiedlichen Zugkräften ggf. auch nur in dem stärker beanspruchten Teilbereich.

Stabwerkmodell für Grenzfall 2 (nachgiebige Lagerung) max A:



Stabwerkmodell für Grenzfall 2 (nachgiebige Lagerung) max C:



Nachweis der Druckspannungen am Stützenkopf:

Exemplarisch an der Mittelstütze:

$$B_d = 1{,}838\,MN$$

$$F_{cd} = 0{,}4 \cdot 0{,}25 \cdot 14{,}17 = 1{,}417\,MN$$

$$\text{erf}A_s = \frac{1{,}838 - 1{,}417}{435} \cdot 10^4 = 9{,}7\,cm^2$$

vorh. 8Ø16 = 16,1cm²

Bemessung der unteren Zugbänder (li und re):

$$F_{sd} = 1{,}066 / 1{,}60 = 0{,}666\,MN$$

$$\text{erf}A_s = \frac{0{,}666}{435} \cdot 10^4 = 15{,}3\,cm^2$$

$$\text{erf}A_s = ... = 13{,}1\,cm^2$$

gew. 8Ø16 voll durchlaufend über beide Felder = 16,1cm²

Nachweis der Verankerungslänge am Endauflager (bei C maßgebend):

gew. 4 SteckbügelØ16 = 16,1cm²

$$\text{erf}\, l_{b,dir} = \frac{2}{3} \cdot 0,7 \cdot \frac{13,1}{16,1} \cdot 64,4 = 24,5cm < 25cm$$

Aufhängebewehrung:

für $$1,35 \cdot \left(50 + \frac{6,50}{2} \cdot 0,25 \cdot 25kN/m^3 \right) + 1,5 \cdot 25 = 132kN/m$$

$$\text{erf}\, A_s = \frac{0,132}{435} \cdot 10^4 = 3,03cm^2/m$$

Netzbewehrung voll anrechenbar und ausreichend

gew. Steckbügel Ø8/15 als Anfängerbew. in der Decke = 6,68cm²/m

Empfehlung: auf $0{,}2 \cdot h \leq 0{,}2 \cdot l$ mind. Risskraft abdecken mit

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing \cdot F_{s,cr} \cdot (F_s - 0{,}4 \cdot F_{s,cr})}{3{,}6 \cdot E_s \cdot w_k \cdot f_{ct,eff}}}$$ für dünne Bauteile, ggf. für dicke Bt.

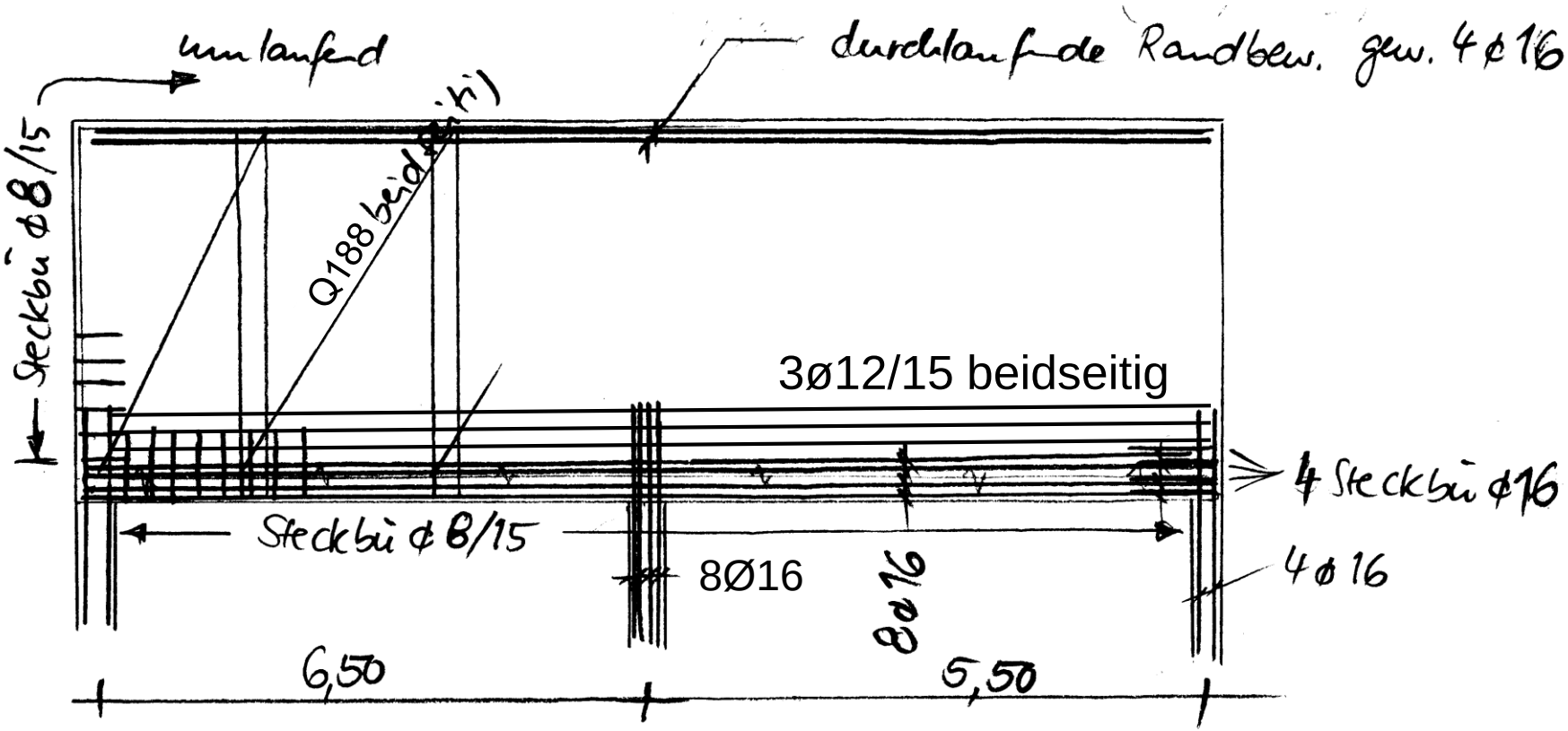
Innenbauteil c_v = 2 cm, Steckbü ø8

$$F_{s,cr} = 0{,}5 \cdot 2{,}6 \cdot \frac{0{,}25}{2} = 0{,}163 MN/m$$

Vorschädigungsfaktor $k = 0{,}5$

$$F_{s,cr,eff} = 0{,}5 \cdot 2{,}6 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}034 = 0{,}111 MN/m$$ => dickes Bauteil

$$A_s = \sqrt{\frac{12 \cdot 0{,}111 \cdot (0{,}163 - 0{,}4 \cdot 0{,}111)}{3{,}6 \cdot 200000 \cdot 0{,}4 \cdot 2{,}6}} \cdot 10^4 = 4{,}6 cm^2/m$$

gew. Zulage ø12/15 = 7,54cm²/m in dem 40 cm hohen Streifen oberhalb der 8ø16

Bewehrungsführung: